ГЛУБОКОПРОНИКАЮЩИЕ ПОПЕРЕЧНЫЕ ВОЛНЫ ВО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Ю. Г. Мамаладзе

(Тбилиси)

Показано, что при приближении частоты вращения жидкости к половине частоты аксиальных колебаний погруженного в нее диска резко возрастает глубина проникновения вязких волн, возбуждаемых колебаниями диска.

1. Постановка задачи. В работе [1] были исследованы аксиальные колебания диска во вращающейся вязкой несжимаемой жидкости. При этом из рассмотрения исключался случай, когда угловая скорость вращения ω_0 близка к половине частоты колебаний Ω, поскольку при этом нарушались некоторые условия, необходимые для осуществленного в [1] вывода формул краевых поправок.

Предметом данной работы является именно этот случай $2\omega_0 \approx \Omega$; при этом вопрос о краевых поправках не затрагивается.

Пусть бесконечная в радиальном направлении вязкая несжимаемая жидкость вращается вокруг оси Oz с постоянной угловой скоростью ω_0, а погруженный в нее диск бесконечного радиуса участвует во вращении жидкости и одновременно совершает малые аксиальные колебания вокруг оси вращения с амплитудой $\varphi_0 \ll 1$, частотой Ω и коэффициентом затухания γ. Жидкость сверху и снизу предполагается неограниченной или ограниченной плоскими поверхностями, параллельными поверхности диска.

Угловая скорость диска $\varphi^{\boldsymbol{\cdot}}$ зависит от времени t следующим образом:

$$\varphi^{\boldsymbol{\cdot}} = \omega_0 + i\alpha\varphi_0 e^{i\alpha t} \qquad (\alpha = \Omega + i\gamma) \tag{1.1}$$

Здесь α — комплексная частота колебаний, которые предполагаются квазигармоническими ($\gamma \ll \Omega$).

Учитывая аксиальную симметрию задачи, распределение скоростей и давлений в жидкости представим в цилиндрических координатах r, φ, z, в виде суммы «вращательных» и «колебательных» членов [1]:

$$v_r = rw_r(z)\, e^{i\alpha t}, \qquad v_\varphi = \omega_0 r + rw_\varphi(z)\, e^{i\alpha t}, \qquad v_z = w_z(z)\, e^{i\alpha t} \tag{1.2}$$

$$p = p_0 + {}^1\!/_2\rho\omega_0^2 r^2 + p_1(r, z)\, e^{i\alpha t} \qquad (p_0 = \mathrm{const}) \tag{1.3}$$

ρ — плотность жидкости.

Предполагая амплитуду колебаний малой настолько, что $\Omega\varphi_0 \ll \omega_0$, можно произвести линеаризацию уравнения Навье — Стокса по величинам w_r, w_φ, w_z и, дополнив его уравнением непрерывности, получить относительно четырех неизвестных функций w_r, w_φ, w_z и p_1 следующую систему линейных уравнений:

$$i\alpha w_r - 2\omega_0 w_\varphi = -\frac{1}{\rho}\frac{1}{r}\frac{dp_1}{dr} + \nu\frac{d^2 w_r}{dz^2}, \qquad 2w_r + \frac{dw_z}{dz} = 0 \tag{1.4}$$

$$i\alpha w_\varphi + 2\omega_0 w_r = \nu\frac{d^2 w_\varphi}{dz^2}, \qquad i\alpha w_z = -\frac{1}{\rho}\frac{dp_1}{dz} + \nu\frac{d^2 w_z}{dz^2} \tag{1.5}$$

Здесь $\nu = \eta/\rho$ — кинематическая вязкость жидкости, η — динамическая вязкость.

2. Решение системы. Решение системы уравнений (1.4) и (1.5) имеет вид

$$2w_r(z) = B^{(+)}\exp(ik^{(+)}z) + C^{(+)}\exp(-ik^{(+)}z) + B^{(-)}\exp(ik^{(-)}z) + C^{(-)}\exp(-ik^{(-)}z) - \frac{2i\alpha A}{\alpha^2 - 4\omega_0^2} \tag{2.1}$$

$$2iw_\varphi(z) = B^{(+)}\exp(ik^{(+)}z) + C^{(+)}\exp(-ik^{(+)}z) - B^{(-)}\exp(ik^{(-)}z) - C^{(-)}\exp(-ik^{(-)}z) + \frac{4i\omega_0 A}{\alpha^2 - 4\omega_0^2} \tag{2.2}$$

$$w_z(z) = \frac{i}{k^{(+)}}\left(B^{(+)}\exp(ik^{(+)}z) - C^{(+)}\exp(-ik^{(+)}z)\right) + \frac{i}{k^{(-)}}\left(B^{(-)}\exp(ik^{(-)}z) - \right.$$

$$\left. - C^{(-)}\exp(-ik^{(-)}z)\right) + \frac{2i\alpha A}{\alpha^2 - 4\omega_0^2} z + D \tag{2.3}$$

$$-\frac{1}{\rho} p_1(r, z) = \frac{1}{2} A r^2 - \nu \frac{dw_z(z)}{dz} + i\alpha \int_a^z w_z(u)\, du \tag{2.4}$$

Решение содержит семь коэффициентов: A, B^+, B^-, C^+, C^-, D и постоянную интегрирования в (2.4).

3. Граничные условия. Ввиду отсутствия непосредственной связи между жидкостью, размещенной над диском, и жидкостью под ним, их можно рассматривать раздельно. Тогда для определения коэффициентов решения (2.1) — (2.4) имеем три граничных условия на поверхности диска ($z = 0$), связанных с законом ее движения (1.1) и с формулами (1.2)

$$w_r(0)=0, \quad w_\varphi(0)=i\alpha\varphi_0, \quad w_z(0)=0 \tag{3.1}$$

Еще три граничных условия задаются на поверхности, ограничивающей жидкость сверху или снизу (обозначим ее $z = H$). Если эта поверхность твердая и движется так же, как и основной диск, то условия при $z = H$ совпадут с (3.1). Если она является твердой и неколеблющейся плоскостью, то

$$w_r(H) = 0, \quad w_\varphi(H) = 0, \quad w_z(H) = 0 \tag{3.2}$$

В случаях (3.1) и (3.2) граничные условия не затрагивают функцию p_1, и поэтому постоянная интегрирования в (2.4) ими не определяется.

Если же верхняя граница жидкости является свободной поверхностью, то граничные условия на ней определяются обычным образом (см. [2], стр. 69) при помощи тензора потока импульса. Легко убедиться, что они сводятся к равенствам

$$w_r'(H) = 0, \qquad w_\varphi'(H) = 0, \qquad p_1(r, H) = 0 \tag{3.3}$$

Хотя и здесь, как и в случаях (3.1) и (3.2), имеются три равенства, однако, как будет показано в п. 5, одно из них распадается на два. Таким образом, совокупность условий (3.1) и (3.3) определяет все семь коэффициентов решения (2.1) — (2.4).

4. Анализ волновых чисел. Формулы (2.1) и (2.2) показывают, что колебания диска генерируют в вязкой жидкости две волны со взаимно противоположными круговыми поляризациями и с волновыми числами $k^{(+)}$ (плюс-волна) и $k^{(-)}$ (минус-волна). Волновые числа $k^{(\pm)}$ определяются формулой

$$k^{(\pm)2} = -i\frac{\alpha \pm 2\omega_0}{\nu} \tag{4.1}$$

В дальнейшем будем для определенности считать, что

$$\operatorname{Im} k^{(\pm)} > 0 \tag{4.2}$$

Формула (4.1) отличается от соответствующей формулы (2.1) в работе [1] тем, что в последней вместо $\alpha = \Omega + i\gamma$ фигурировала только частота Ω. В связи с условием $\gamma \ll \Omega$ такая неточность (сознательно допущенная в работе [1]) не оказывала влияния на достоверность результатов ввиду исключения из рассмотрения случая $2\omega_0 \approx \Omega$. Однако, если $2\omega_0 \approx \Omega$, возможен случай

$$|\Omega - 2\omega_0| \ll \gamma \tag{4.3}$$

когда разница между формулой (4.1) и формулой (2.1) работы [1] становится весьма существенной.

Введем обозначение

$$k^{(\pm)} = \sigma^{(\pm)} + i\tau^{(\pm)} \tag{4.4}$$

и при помощи формулы (4.1) определим действительные и мнимые части волновых чисел $k^{(\pm)}$:

$$\tau^{(\pm)} = \frac{1}{\sqrt{2\nu}} \left(\sqrt{\gamma^2 + (\Omega \pm 2\omega_0)^2} - \gamma\right)^{1/2} \tag{4.5}$$

$$\sigma^{(\pm)} = -\frac{1}{\sqrt{2\nu}} \frac{\Omega \pm 2\omega_0}{\left(\sqrt{\gamma^2 + (\Omega \pm 2\omega_0)^2} - \gamma\right)^{1/2}} \tag{4.6}$$

Ввиду условия $\gamma \ll \Omega$ всегда имеем $\Omega + 2\omega_0 \gg \gamma$. Поэтому для $\tau^{(+)}$ и $\sigma^{(+)}$ с высокой степенью точности применимы формулы

$$\tau^{(+)} = -\sigma^{(+)} = \left(\frac{\Omega + 2\omega_0}{\nu}\right)^{1/2} \qquad (\text{при } \Omega + 2\omega_0 \gg \gamma) \tag{4.7}$$

Отсюда следует, что глубина проникновения плюс-волны $\lambda^{(+)}$ и ее длина связаны соотношением

$$L^{(+)} = 2\pi\lambda^{(+)} = 2\pi\left(\frac{\nu}{\Omega + 2\omega_0}\right)^{1/2} \qquad \left(\lambda^{(+)} = \frac{1}{\tau^{(+)}}\, L^{(+)} = \frac{2\pi}{|\sigma^{(+)}|}\right) \tag{4.8}$$

В таких условиях практически осуществляется не волна, а колебания примыкающего к диску слоя с толщиной порядка $^1/_2\lambda^{(+)}$ ([2], стр. 112). Если к тому же учесть, что величина $\lambda^{(+)}$ очень мала для жидкостей с не очень большой вязкостью и при удобных для проведения измерений частотах Ω, то наблюдение результатов достижения этой волной поверхности, отдаленной от диска на расстояние H, и отражения ее от этой поверхности представляется неосуществимым.

Минус-волна имеет такой же характер, пока $|\Omega - 2\omega_0| \gg \gamma$. Тогда

$$L^{(-)} = 2\pi\lambda^{(-)} = 2\pi\left(\frac{\nu}{|\Omega - 2\omega_0|}\right)^{1/2} \qquad (\text{при } |\Omega - 2\omega_0| \gg \gamma) \tag{4.9}$$

Однако, когда $2\omega_0 \to \Omega$, из формул (4.5), (4.6) следует

$$\lim_{2\omega_0 \to \Omega} \tau^{(-)} = 0, \qquad \lim_{2\omega_0 \to \Omega \pm 0} \sigma^{(-)} = \pm\left(\frac{\gamma}{\nu}\right)^{1/2} \tag{4.10}$$

Отсюда

$$\lim_{2\omega_0 \to \Omega} \lambda^{(-)} = \infty, \qquad \lim_{2\omega_0 \to \Omega} L^{(-)} = 2\pi\left(\frac{\nu}{\gamma}\right)^{1/2} \tag{4.11}$$

Следовательно, если только $\gamma \neq 0$, то в области частот вращения, близких к половине частоты колебаний, глубина проникновения минус-волны может быть сравнима с ее длиной и может даже значительно превышать ее. При наличии таких глубокопроникающих волн должны легко наблюдаться резонансные явления, связанные с образованием стоячей минус-волны в пространстве между диском (генератором волны) и отражающей поверхностью. Эти эффекты должны наблюдаться, пока расстояние H не превысит глубину проникновения $\lambda^{(-)}$, определяемую, согласно (4.5), формулой

$$\lambda^{(-)} = \frac{\sqrt{2\nu}}{\left(\sqrt{\gamma^2 + (\Omega - 2\omega_0)^2} - \gamma\right)^{1/2}} \tag{4.12}$$

Расстояние H_0, на котором затухают резонансные эффекты, может служить для экспериментальной оценки величины $\lambda^{(-)}$.

Стоячие волны образуются между колеблющимися поверхностями, если $H = {}^1/_2 nL^{(-)}$, между диском и неколеблющейся поверхностью при $H = {}^1/_4 (2n - 1) L^{(-)}$, между диском и свободной поверхностью при $H = {}^1/_4 n L^{(-)}$, где $n = 1, 2, \ldots$, а $L^{(-)}$ определяется при помощи формулы (4.6):

$$L^{(-)} = \frac{2\pi\sqrt{2\nu}\left(\sqrt{\gamma^2 + (\Omega \pm 2\omega_0)^2} - \gamma\right)^{1/2}}{|\Omega - 2\omega_0|} \tag{4.13}$$

Поэтому явления, зависящие от условий распространения минус-волны, должны проявлять периодическую зависимость от H, изучение которой позволит измерить величину $L^{(-)}$.

5. Колебания диска под свободной поверхностью. Свободно подвешенный и колеблющийся диск не только генерирует колебания вязкой жидкости, но и сам испытывает ее воздействие. Поэтому он сам может служить индикатором резонансных эффектов, предсказанных в предыдущем параграфе,— они отразятся в периодической зависимости характера его колебаний от расстояния H.

Методом, описанным в [1], зная решение системы (1.4) и (1.5), соответствующее определенным граничным условиям, можно найти частоту и затухание колебаний диска. Мы исследуем зависимость от H только второй из этих величин. Для этого выпишем момент силы M, действующей на поверхность диска (см. (3.1) в [1]), и вклад этого момента в затухание $\Delta\gamma$ (величина γ—аддитивная) (см. (3.6) в [1]):

$$M = {}^1/_2\, \pi\eta R^4 w_\varphi{}' (0)\, e^{i\alpha t}, \qquad \Delta\gamma = -\frac{\operatorname{Im}(Me^{-i\alpha t})}{2I\Omega\varphi_0} \tag{5.2}$$

Здесь R и I — радиус диска и момент инерции колеблющейся системы. До сих пор речь шла о колебаниях диска бесконечного радиуса, поэтому использование формул (5.1) связано с пренебрежением краевыми эффектами.

Здесь рассматривается только случай свободной поверхности (свободная поверхность может считаться плоской, если соблюдается условие малости кривизны мениска| вращающейся жидкости $\omega_0{}^2 R\, /\, g \ll 1$, здесь g — ускорение свободного падения), когда выражение для M оказывается сравнительно простым. При этом исследуется взаимодействие с нею только верхней поверхности диска; предполагается, что расстояние между диском и дном сосуда не меняется; вклад в затухание колебаний не зависит от H. Согласно (2.4), последнее из условий (3.3) имеем в виде

$$\frac{1}{2} Ar^2 - \nu w_z{}' (H) + i\alpha \int\limits_a^H w_z (z)\, dz = 0 \tag{5.2}$$

В связи с независимостью w_z от r оно дает $A = 0$. Тогда граничные условия (3.1) и (3.3) оказываются достаточными для определения остальных шести коэффициентов решения (2.1) — (2.4), из которых выпишем только $B^{(\pm)}$ и $C^{(\pm)}$:

$$B^{(\pm)} = \mp \alpha\varphi_0 \frac{e^{-ik^{(\pm)}H}}{e^{ik^{(\pm)}H} + e^{-ik^{(\pm)}H}}, \qquad C^{(\pm)} = \mp \alpha\varphi_0 \frac{e^{ik^{(\pm)}H}}{e^{ik^{(\pm)}H} + e^{-ik^{(\pm)}H}} \tag{5.3}$$

так как остальные коэффициенты не нужны для вычисления величины M, равной, согласно (5.1), (2.2) и (5.3),

$$M = {}^1/_4\, \pi R^4 \eta i\alpha \left(k^{(+)} \operatorname{tg} k^{(+)} H + k^{(-)} \operatorname{tg} k^{(-)} H\right) \tag{5.4}$$

Подстановка (5.4) в (5.2) и учет неравенства $\gamma \ll \Omega$ дает (5.5)

$$\Delta\gamma = \frac{\pi R^4 \eta}{8I} \left(\frac{\tau^{(+)} \operatorname{sh} 2\tau^{(+)} H - \sigma^{(+)} \sin 2\sigma^{(+)} H}{\cos 2\sigma^{(+)} H + \operatorname{ch} 2\tau^{(+)} H} + \frac{\tau^{(-)} \operatorname{sh} 2\tau^{(-)} H - \sigma^{(-)} \sin 2\sigma^{(-)} H}{\cos 2\sigma^{(-)} H + \operatorname{ch} 2\tau^{(-)} H} \right)$$

Численные расчеты по этой формуле показывают, что при растущем, но еще довольно малом H ($H \gg \lambda^{(+)}$) первый член в скобках перестает от него зависеть. Если $2\omega_0 \approx \Omega$, то второй член периодически зависит от H (тем дольше, чем ближе ω_0 к $\Omega\, /\, 2$), и эта зависимость постепенно затухает, сходя на нет при $H \gg \lambda^{(-)}$; при таких значениях H затухание колебаний имеет величину, вычисленную в [1] и характерную для колебаний диска в неограниченной жидкости.

Автор благодарен Э. Л. Андроникашвили, С. Г. Матиняну и Дж. С. Цакадзе за интерес к работе и ценные дискуссии.

Поступила 22 XI 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Мамаладзе Ю. Г., Матинян С. Г. К гидродинамике колебаний диска во вращающейся жидкости. ПММ, 1960, т. 24, вып. 3.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. Гостехиздат, М., 1953.