# О ФИГУРЕ РАВНОВЕСИЯ И НАТЯЖЕНИИ ГИБКОЙ НИТИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНЕШНИХ СИЛ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ НАПРАВЛЕНИЯ НИТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

**Н. И. Алексеев**

(Москва)

Частные решения рассматриваемой задачи для конкретных полей внешних сил получены Иоганном Бернулли (форма паруса под действием ветра), А. Ф. Поповым [1], А. Н. Крыловым [2], Н. Е. Кочиным [3].

В общем виде задача решена только для плоского поля сил А. П. Минаковым [4]. При решении Минаков предполагал, что внешняя сила задана в проекциях на касательную и нормаль нити, и пользовался натуральными уравнениями равновесия.

Ниже излагается общее решение задачи в декартовых координатах для пространственного и плоского случаев расположения нити.

§ 1. Пусть внешняя сила F, отнесенная к единице длины нити, зависит от направления нити в пространстве, т. е. от направляющих косинусов нити $dx / ds$, $dy / ds$, $dz / ds$ и задана в проекциях $F_x$, $F_y$, $F_z$ на декартовы оси координат.

Уравнения равновесия гибкой нерастяжимой однородной нити в этом случае принимают вид

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right)+F_x\left(\frac{dx}{ds},\ \frac{dy}{ds},\ \frac{dz}{ds}\right)=0 \qquad (x,\ y,\ z)$$

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2=1$$

Здесь $s$ — длина нити; $T$ — натяжение нити; $(x, y, z)$ — символ круговой перестановки.

Раскроем производные в левых частях первых трех уравнений системы и прибавим к третьему уравнению, умноженному на $dz / ds$, первые два уравнения, умноженные соответственно на $dx/ ds$ и $dy / ds$. Учитывая при этом четвертое уравнение системы, а также соотношение, получающееся путем дифференцирования четвертого уравнения по $s$, сведем уравнения равновесия к следующему виду:

$$\begin{gathered}\frac{dT}{ds}\frac{dx}{ds}+T\frac{d^2x}{ds^2}+F_x\left(\frac{dx}{ds},\ \frac{dy}{ds},\ \frac{dz}{ds}\right)=0\\ \frac{dT}{ds}\frac{dy}{ds}+T\frac{d^2y}{ds^2}+F_y\left(\frac{dx}{ds},\ \frac{dy}{ds},\ \frac{dz}{ds}\right)=0\\ \frac{dT}{ds}+\frac{dx}{ds}F_x\left(\frac{dx}{ds},\frac{dy}{ds},\frac{dz}{ds}\right)+\frac{dy}{ds}F_y\left(\frac{dx}{ds},\frac{dy}{ds},\frac{dz}{ds}\right)+\frac{dz}{ds}F_z\left(\frac{dx}{ds},\frac{dy}{ds},\frac{dz}{ds}\right)=0\\ \left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2=1\end{gathered} \qquad (1.1)$$

Без существенного уменьшения общности положим, что нить нигде не образует прямого угла с одной из осей координат, например с осью $x$. Тогда $dx / ds \neq 0$.

Введем новые переменные $u$ и $v$, так что с учетом четвертого уравнения системы (1.1) будем иметь

$$\frac{dx}{ds}=u, \qquad \frac{dy}{ds}=uv, \qquad \frac{dz}{ds}=\sqrt{1-u^2-u^2v^2} \qquad (1.2)$$

После такой замены переменных проекции внешней силы на оси координат выразятся в функциях от $u$ и $v$, а первые три уравнения системы (1.1) будут

$$\frac{dT}{ds}u+T\frac{du}{ds}+F_x(u,\ v)=0 \qquad (1.3)$$

$$\frac{dT}{ds}uv+T\left(\frac{du}{ds}v+u\frac{dv}{ds}\right)+F_y(u,\ v)=0 \qquad (1.4)$$

$$\frac{dT}{ds}=-uF_x(u,\ v)-uvF_y(u,\ v)-\sqrt{1-u^2-u^2v^2}F_z(u,\ v) \qquad (1.5)$$

Умножим уравнение (1.3) на $v$ и вычтем из уравнения (1.4); получим

$$T\frac{dv}{ds}=\frac{v}{u}F_x(u,v)-\frac{1}{u}F_y(u,v) \tag{1.6}$$

С другой стороны, из уравнения (1.3), учитывая (1.5), найдем

$$T\frac{du}{ds}=(u^2-1)F_x(u,v)+u^2vF_y(u,v)+u\sqrt{1-u^2-u^2v^2}F_z(u,v) \tag{1.7}$$

Разделим уравнение (1.6) на (1.7). Получим разрешенное относительно производной обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, связывающее переменные $u$ и $v$

$$\frac{dv}{du}=\frac{vF_x(u,v)-F_y(u,v)}{u(u^2-1)F_x(u,v)+u^3vF_y(u,v)+u^2\sqrt{1-u^2-u^2v^2}F_z(u,v)}$$

После того как путем приближенного интегрирования этого уравнения будет определена зависимость $v(u)$, нахождение пяти функций $x(u)$, $y(u)$, $z(u)$, $s(u)$, $T(u)$, представляющих полное параметрическое решение задачи, сводится к квадратурам. Действительно, разделив уравнение (1.5) на (1.7), получим уравнение с разделяющимися переменными, интегрирование которого дает для натяжения нити

$$T(u)=C_1\exp\int\frac{uF_x(u,v)+uvF_y(u,v)+\sqrt{1-u^2-u^2v^2}F_z(u,v)}{(1-u^2)F_x(u,v)-u^2vF_y(u,v)-u\sqrt{1-u^2-u^2v^2}F_z(u,v)}du$$

Далее, интегрируя уравнение (1.7), найдем

$$s(u)=\int\frac{T(u)\,du}{(u^2-1)F_x(u,v)+u^2vF_y(u,v)+u\sqrt{1-u^2-u^2v^2}F_z(u,v)}+C_2$$

Наконец, зависимости текущих координат нити от $u$ получим, проинтегрировав уравнения (1.2)

$$x(u)=\int u\,ds(u)+C_3,\qquad y(u)=\int uv\,ds(u)+C_4$$

$$z(u)=\int\sqrt{1-u^2-u^2v^2}\,ds(u)+C_5$$

Постоянные $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5$ определяются, если заданы начальные условия.

**§ 2.** В случае плоского расположения нити уравнения равновесия гибкой однородной нерастяжимой нити принимают вид

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right)+F_x\left(\frac{dx}{ds},\frac{dy}{ds}\right)=0,\qquad \frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right)+F_y\left(\frac{dx}{ds},\frac{dy}{ds}\right)=0$$

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2=1 \tag{2.1}$$

Натяжение и фигуру равновесия нити будем искать в параметрической форме — в виде четырех функций направляющего косинуса $dx/ds$:

$$x, y, s, T \mid (dx/ds)$$

Введем обозначение — с учетом третьего уравнения (2.1), обозначим

$$\frac{dx}{ds}=u,\qquad \frac{dy}{ds}=\sqrt{1-u^2} \tag{2.2}$$

После такой замены $F_x$ и $F_y$ выразятся в функциях от одной переменной $u$.

Раскроем производные в левых частях уравнений равновесия и сложим первое уравнение, умноженное на $dx/ds$, со вторым, умноженным на $dy/ds$. Учитывая при этом третье уравнение системы (2.1) и соотношение

$$\frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}=0$$

получим

$$\frac{dT}{ds} = -uF_x(u) - \sqrt{1-u^2}F_y(u) \tag{2.3}$$

Заметим, что

$$\frac{d^2x}{ds^2}\frac{dy}{ds} - \frac{d^2y}{ds^2}\frac{dx}{ds} = \frac{d}{ds}\frac{dx}{ds} \Big/ \frac{dy}{ds}$$

Умножим второе уравнение системы (2.1) на $dx/ds$ и вычтем из него первое уравнение системы, умноженное на $dy/ds$. Учитывая при этом последнее соотношение, получим

$$\frac{T}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{ds} = uF_y(u) - \sqrt{1-u^2}F_x(u) \tag{2.4}$$

Разделим уравнение (2.3) на (2.4)

$$\frac{\sqrt{1-u^2}}{T}\frac{dT}{du} = \frac{uF_x(u) + \sqrt{1-u^2}F_y(u)}{\sqrt{1-u^2}F_x(u) - uF_y(u)}$$

Отсюда после интегрирования определяем натяжение нити:

$$T(u) = C_1{}^\circ \exp \int \frac{uF_x(u) + \sqrt{1-u^2}F_y(u)}{(1-u^2)F_x(u) - u\sqrt{1-u^2}F_y(u)}\,du$$

Интегрируя затем уравнение (2.4), определим

$$s(u) = \int \frac{T(u)\,du}{u\sqrt{1-u^2}F_y(u) + (u^2-1)F_x(u)} + C_2{}^\circ$$

Теперь найдем зависимости текущих координат нити от направляющего косинуса. С этой целью проинтегрируем уравнения (2.2), учитывая последнее соотношение

$$x(u) = \int \frac{uT(u)\,du}{u\sqrt{1-u^2}F_y(u) + (u^2-1)F_x(u)} + C_3{}^\circ$$

$$y(u) = \int \frac{T(u)\,du}{uF_y(u) - \sqrt{1-u^2}F_x(u)} + C_4{}^\circ$$

Постоянные $C_1{}^\circ$, $C_2{}^\circ$, $C_3{}^\circ$, $C_4{}^\circ$ определяются по начальным условиям.

Таким образом, натяжение и фигура равновесия нити находятся в квадратурах.

§ 3. Пусть на нить, кроме внешних сил, зависящих от направления нити, воздействует еще однородное поле сил, например поле сил тяжести.

При составлении уравнений равновесия гибкой нити выберем систему координат таким образом, чтобы направление одной из осей координат, например оси $y$, совпадало с направлением сил однородного поля. Теперь, для того чтобы распространить решения §§ 1 и 2 на случай дополнительного воздействия однородного поля сил, достаточно в окончательных формулах этих решений заменить $F_y$ на $F_y + q$, где $q = \text{const}$ — абсолютная величина силы однородного поля, отнесенной к единице длины нити.

Поступила 15 II 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Попов А. Ф. Аналитическое решение задачи. Записки Императорской Академии наук, 1867, т. 11, кн. 1.
2. Крылов А. Н. О равновесии шаровой мины на течении. Известия по минному делу, 1909, вып. 44.
3. Кочин Н. Е. Об изгибе троса змейкового аэростата под действием ветра, ПММ, 1946, т. 10.
4. Минаков А. П. Основы механики нити. Научн.-исслед. тр. Моск. текст. ин-та, 1941, т. 9.