ВЛИЯНИЕ ЧЛЕНОВ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА МАЛОСТИ НА ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

А. П. Проскуряков (Москва)

В заметке рассматривается влияние членов различного порядка малости, стоящих в правых частях уравнений, на существование, вид и устойчивость периодических решений квазилинейных систем. Этот вопрос подробно анализируется на системах с одной степенью свободы как автономных, так и неавтономных, используя метод Пуанкаре в современном его виде. Рассмотрение систем с несколькими степенями свободы не вносит ничего существенно нового и поэтому не приводится.

1. Рассмотрим сначала автономные системы [1, 2]

$$x^{\cdot\cdot} + k^2 x = \mu F(x, x^{\cdot}, \mu) \tag{1.1}$$

Функция $F(x, x^{\cdot}, \mu)$ — аналитическая от своих аргументов, μ — малый положительный параметр, k — постоянная. Предполагается, что малость параметра μ обеспечивает существование периодических решений, разлагающихся в ряды по степеням μ. Как известно, решение порождающей системы ($\mu = 0$) зависит от одного параметра и имеет вид

$$x_0(t) = A_0 \cos kt \tag{1.2}$$

Периодические решения строятся при начальных условиях

$$x(0) = A_0 + \beta, \qquad x^{\cdot}(0) = 0$$

где β — функция от μ, причем $\beta(0) = 0$.

Решение уравнения (1.1) можно записать в виде ряда Пуанкаре по степеням β и μ в форме

$$x(t, A_0 + \beta, \mu) = (A_0 + \beta)\cos kt + \sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n(t) + \frac{\partial C_n(t)}{\partial A_0}\beta + \ldots\right]\mu^n \tag{1.3}$$

Разложим правую часть уравнения (1.1) в ряд по степеням μ

$$\mu F(x, x^{\cdot}, \mu) = \sum_{n=1}^{\infty} H_n(t)\mu^n, \qquad H_n(t) = \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{d^{n-1}F}{d\mu^{n-1}}\right)_{\mu=\beta=0} \tag{1.4}$$

Значения первых четырех коэффициентов $H_n(t)$ приведено в [1]. Заметим, что явная зависимость функции F от μ отражается на величинах $H_n(t)$, начиная с $H_2(t)$.

Функции $C_n(t)$ определяются формулой

$$C_n(t) = \frac{1}{k}\int_0^t H_n(t')\sin k(t - t')\,dt' \tag{1.5}$$

Индекс функции $C_n(t)$ равен порядку малости члена разложения (1.4), коэффициентом которого является $H_n(t)$. Производные любого порядка от $C_n(t)$ по t и A_0 выражаются через $H_n(t)$ и $H^{\cdot}_n(t)$ и их производные по A_0.

Все величины, входящие в выражения для периодических решений квазилинейных систем, будем оценивать в зависимости от наивысшего порядка малости членов разложения правых частей уравнений, которые еще могут влиять на данную величину. Очевидно, что такая оценка может быть произведена по наибольшему индексу функций $C_n(t)$ и их производных по t и A_0, от которых данная величина зависит. Формулировка «такая-то величина зависит от членов s-го порядка малости» в дальнейшем будет означать, что упомянутая величина зависит, вообще говоря, от коэффициентов при членах с 1-го по s-й порядок малости.

Как известно, одно из условий периодичности определяет период искомого решения в виде разложения по степеням μ. Второе условие периодичности приводит к соотношению

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n(T_0, A_0 + \beta)\mu^n = 0 \qquad \left(T_0 = \frac{2\pi}{k}\right) \tag{1.6}$$

где T_0 — период порождающего решения.

Обозначая величины $M_n(T_0, A_0 + \beta)$ при $\beta = 0$ через M_n, имеем

$$M_1 = C_1(T_0) = -\frac{1}{k}\int_0^{T_0} F(x, x^{\cdot}, 0)\sin kt\,dt$$

$$M_2 = C_2(T_0) + \frac{1}{2k^2A_0}{}_1{}^{\cdot 2}(T_0)] \qquad \text{и т. д.}$$

Из формул работы [1] видно, что величина M_n зависит от членов n-го порядка малости. Основные амплитуды A_0 определяются в общем случае из уравнения

$$C_1(T_0) = 0 \tag{1.7}$$

Следовательно, в этом случае значения A_0 зависят от членов 1-го порядка малости.

Если кратность рассматриваемого корня уравнения (1.7) равна l, то разложение величины β может иметь вид [2]

$$\beta = \sum_{n=1}^{\infty} A_{n/r}\mu^{n/r} \qquad (r = 1, \ldots, l) \tag{1.8}$$

При $l = 1$ коэффициенты A_n находятся из линейных уравнений. Например, для A_1 имеем

$$A_1\partial C_1 / \partial A_0 + M_2 = 0$$

Из уравнений для последующих коэффициентов [1] видно, что коэффициент A_n зависит от членов $n + 1$-го порядка малости.

При $M_2 \neq 0$ и при разложении β по дробным степеням μ первый коэффициент разложения определяется из уравнения [2]

$$\frac{1}{r!}\frac{\partial^r C_1}{\partial A_0{}^r}A_{1/r}{}^r + M_2 = 0$$

и, следовательно, также зависит от членов 2-го порядка малости. Анализ последующих уравнений для коэффициентов $A_{n/r}$ показывает, что эти коэффициенты зависят от членов $n + 1$-го порядка малости. Заметим, что при принятых обозначениях коэффициенты с одинаковым индексом, взятые из разложений разного вида, зависят от членов различного порядка малости. Например, коэффициент A_1 является первым коэффициентом в разложении по целым степеням μ и r-м коэффициентом в разложении по $\mu^{1/r}$. В первом случае A_1 зависит от величин 2-го порядка малости, а во втором — от величин $r + 1$-го порядка.

Для автономных систем при получении периодических решений с постоянным периодом производится преобразование времени по формуле

$$t = \tau\left(1 + \sum_{n=r}^{\infty} h_{n/r}\mu^{n/r}\right) \tag{1.9}$$

Можно показать, что на коэффициент $h_{n/r}$ могут влиять величины $n - r + 1$-го порядка малости.

Периодическое решение уравнения (1.1) разлагается в ряд такого же вида, как и величина β

$$x(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^{n/r}x_{n/r}(\tau) \tag{1.10}$$

В выражение функции $x_{n/r}(\tau)$ входит член $A_{n/r}\cos kt$. В силу этого функция $x_{n/r}(\tau)$ в общем случае будет зависеть от членов $n + 1$-го порядка малости.

Устойчивость периодических решений уравнений (1.1) при достаточно малом μ определяется в случае простых корней уравнения (1.7) неравенством

$$\partial C_1 / \partial A_0 < 0 \tag{1.11}$$

В случае двукратных корней уравнения (1.7) при разложении β в ряд по степеням $\mu^{1/2}$ условие устойчивости будет [3]

$$A_{n/2}\partial^2 C_1 / \partial A_0{}^2 < 0 \tag{1.12}$$

Здесь $A_{n/2}$ — первый, не равный нулю коэффициент с дробным индексом. При разложении β по целым степеням μ условие устойчивости принимает вид

$$A_n \partial^2 C_1 / \partial A_0^2 + \ldots < 0 \tag{1.13}$$

Здесь A_n — первый, не равный нулю коэффициент разложения β, а невыписанные члены зависят от $C_{n+1}(T_0)$.

В случае трехкратных корней уравнения (1.7) при $r = 3$ условие устойчивости не зависит от членов порядка выше первого

$$\partial^3 C_1 / \partial A_0^3 < 0 \tag{1.14}$$

При $r = 1$ члены выше первого порядка малости оказывают влияние на устойчивость, а при $r = 2$ в одних случаях могут оказывать влияние, тогда как в других случаях условие устойчивости совпадает с (1.14).

Следует отметить, что в тех случаях, когда выражения, стоящие в левых частях условий устойчивости, не могут обращаться в нуль, эти условия при достаточно малых μ являются не только достаточными, но и необходимыми.

2. Перейдем теперь к неавтономным системам [4,5]

$$x^{\cdot\cdot} + m^2 x = f(t) + \mu F(t, x, x^{\cdot}, \mu) \tag{2.1}$$

Функция $F(t, x, x^{\cdot}, \mu)$ — аналитическая по x, $x^{\cdot}$, μ и периодическая по t с периодом, равным 2π. Величина m является целым числом, а разложение функции $F(t, x, x^{\cdot}, \mu)$ в ряд Фурье по t не содержит m-х гармоник.

Решение порождающей системы ($\mu = 0$) зависит от двух параметров и имеет вид

$$x_0(t) = A_0 \cos mt + \frac{B_0}{m} \sin mt + \varphi(t) \tag{2.2}$$

Начальные условия принимаются в виде

$$x(0) = A_0 + \beta + \varphi(0), \qquad x^{\cdot}(0) = B_0 + \gamma + \varphi^{\cdot}(0)$$

Величина γ обладает теми же свойствами, что и β.

Решение уравнения (2.1) может быть представлено рядом Пуанкаре по β, γ и μ, аналогичным ряду (1.3). Функции $C_n(t)$ определяются формулой (1.5).

Условия периодичности решения приводят к двум соотношениям [4]

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n \mu^n = 0, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} N_n \mu^n = 0 \tag{2.3}$$

где

$$L_n = C_n(2\pi, A_0 + \beta, B_0 + \gamma), \qquad N_n = C_1^{\cdot}(2\pi, A_0 + \beta, B_0 + \gamma)$$

Значения L_n и N_n при $\beta = \gamma = 0$ обозначаются в дальнейшем через $C_n(2\pi)$ и $C_n^{\cdot}(2\pi)$ или C_n и $C_n^{\cdot}$.

Амплитуды A_0 и B_0 определяются в общем случае из систем уравнений

$$C_1(2\pi) = 0, \qquad C_1^{\cdot}(2\pi) = 0 \tag{2.4}$$

Таким образом, величины A_0 и B_0 зависят от членов 1-го порядка малости.

В случае простых корней уравнений (2.4) определитель

$$\Delta = \frac{\partial C_1}{\partial A_0} \frac{\partial C_1^{\cdot}}{\partial B_0} - \frac{\partial C_1}{\partial B_0} \frac{\partial C_1^{\cdot}}{\partial A_0} \tag{2.5}$$

не равен нулю. В этом случае величины β и γ разлагаются в ряды по целым степеням μ. Коэффициенты A_n и B_n этих рядов определяются из систем линейных уравнений. Например, для определения A_1 и B_1 имеем

$$\frac{\partial C_1}{\partial A_0} A_1 + \frac{\partial C_1}{\partial B_0} B_1 + C_2 = 0, \qquad \frac{\partial C_1^{\cdot}}{\partial A_0} A_1 + \frac{\partial C_1^{\cdot}}{\partial B_0} B_1 + C_2^{\cdot} = 0$$

Анализ систем уравнений для последующих коэффициентов [4] показывает, что коэффициенты A_n и B_n зависят от величин $n+1$-го порядка малости.

В случае двукратных корней уравнений (2.4) определитель $\Delta = 0$ и величины β и γ разлагаются в ряды по степеням μ или $\mu^{1/2}$. Коэффициенты $A_{1/2}$ и $B_{1/2}$ определяются формулами [5]

$$A_{1/2}{}^2 = \frac{2\Delta_1}{\Delta^*}\frac{\partial C_1}{\partial B_0}\frac{\partial C_1^{\bullet}}{\partial B_0}, \qquad B_{1/2}{}^2 = \frac{2\Delta_1}{\Delta^*}\frac{\partial C_1}{\partial A_0}\frac{\partial C_1^{\bullet}}{\partial A_0}$$

В этих формулах определитель 2-го порядка Δ^* выражается через производные первого и второго порядка от $C_1(2\pi)$ и $C_1^{\bullet}(2\pi)$ по A_0 и B_0. Определитель Δ_1 равен

$$\Delta_1 = \frac{\partial C_1}{\partial B_0} C_2^{\bullet} - \frac{\partial C_1^{\bullet}}{\partial B_0} C_2$$

Анализ выражений для других коэффициентов показывает, что коэффициенты $A_{n/2}$ и $B_{n/2}$ зависят от членов $n+1$-го порядка малости.

Решения $x(t)$ разлагаются в ряды по целым или дробным степеням параметра μ в зависимости от характера разложений величин β и γ. Оценка коэффициентов разложений $x(t)$ остается такой же, как и для автономных систем.

Устойчивость неавтономных систем (2.1) при достаточно малых μ в случае простых корней уравнений (2.4) определяется из условий

$$\Delta > 0, \qquad \frac{\partial C_1}{\partial A_0} + \frac{\partial C_1^{\bullet}}{\partial B_0} < 0 \tag{2.6}$$

Следовательно, устойчивость в этом случае зависит только от членов 1-го порядка малости.

Для двукратных корней уравнений (2.4) первое условие (2.6) заменяется на следующее [6]

$$A_{1/2}\frac{\partial\Delta}{\partial A_0} + B_{1/2}\frac{\partial\Delta}{\partial B_0} > 0 \tag{2.7}$$

В этом случае устойчивость зависит уже от членов 2-го порядка малости. При $A_{1/2} = B_{1/2} = 0$ устойчивость будет зависеть от членов еще более высокого порядка малости.

Таким образом, анализ автономных и неавтономных систем с одной степенью свободы показывает, что влияние членов различного порядка малости на периодические решения тех и других систем совершенно одинаково. Можно показать, исходя из современной методики построения периодических решений, что для систем с несколькими степенями свободы оценки будут такие же, как и для систем с одной степенью свободы.

3. Рассмотрим следующую задачу. Имеется автономная или неавтономная система с одной степенью свободы вида (1.1) или (2.1). Предположим, что все периодические решения этой системы известны. Добавим в правую часть уравнения системы одну или несколько функций с множителями второй и более высокой степени μ. Тогда правая часть уравнения будет выглядеть следующим образом:

$$\mu F(t, x, x^{\bullet}, \mu) = \mu F_1(t, x, x_1^{\bullet}, \mu) + \mu^2 F_2(\ldots) + \mu^3 F_3(\ldots) + \ldots \tag{3.1}$$

где F_1 — первоначальная функция, а функции $F_2, F_3, \ldots$ — не зависимые от F_1 и в общем случае — друг от друга, удовлетворяющие тем же условиям, что и функция F_1.

Исследуем изменения в периодических решениях (количество решений, вид решений и их устойчивость) от добавления функций $F_2, F_3, \ldots$

Если разложить правую часть уравнения по формуле (1.4), то получим

$$H_1(t) = H_{11}(t), \quad H_2(t) = H_{12}(t) + H_{21}(t)$$
$$H_3(t) = H_{13}(t) + H_{22}(t) + H_{31}(t) \quad \text{и т. д.} \tag{3.2}$$

Первый индекс у $H_{sn}(t)$ является индексом функции F_s, а второй индекс — порядковый, согласно второй формуле (1.4).

Если решение новой системы разложить в ряд Пуанкаре, то функции $C_n(t)$, входящие в этот ряд, будут удовлетворять соотношениям, аналогичным (3.2)

$$C_1(t) = C_{11}(t), \qquad C_2(t) \doteq C_{12}(t) + C_{21}(t) \qquad \text{и т. д.} \tag{3.3}$$

При рассмотрении поставленной задачи возможны три основных случая.

1°. Основные амплитуды A_0 и B_0 полностью определяются из уравнений (1.7) или (2.4), т. е. из уравнений, зависящих только от величин 1-го порядка малости. В этом случае значения A_0 и B_0 не изменяются от добавления членов более высокого порядка малости. Имеется два подслучая: а) корни амплитудных уравнений простые. Тогда все периодические решения разлагаются в ряды по целым степеням μ. Члены второго порядка малости не могут изменить ни вид решений, ни их устойчивость; б) среди корней амплитудных уравнений имеются кратные. Для этих корней решение может разлагаться как по целым, так и по дробным степеням параметра. При добавлении функций F_s $(s = 2, 3, \ldots)$ вид решений может измениться. Решение в виде ряда по целым степеням μ может перейти в решение, разлагающееся по дробным степеням μ, и наоборот. Действительные ветви решений могут превратиться в мнимые, и обратно. Характеристики устойчивости решений также могут меняться на противоположные.

2°. Амплитуды A_0 и B_0 или некоторые значения этих амплитуд не определяются из уравнений (1.7) или (2.4). Например, в случае $C_1(2\pi) \equiv 0$, $C_1^{\cdot}(2\pi) \equiv 0$ — для неавтономных систем или $C_1(2\pi) \equiv 0$ — для автономных систем.

Возможны и более сложные случаи [7]. Например, уравнения (2.4) имеют вид

$$C_1(2\pi) = \Phi^{(1)}\Psi = 0, \qquad C_1^{\cdot}(2\pi) = \Phi^{(2)}\Psi = 0 \tag{3.4}$$

Часть значений A_0 и B_0 определяется из уравнений

$$\Phi^{(1)} = 0, \qquad \Phi^{(2)} = 0 \tag{3.5}$$

Значения A_0 и B_0, отвечающие $\Psi = 0$, не могут быть определены из системы (3.4); в этом случае определитель Δ системы обращается в нуль. Эти значения A_0 и B_0 в общем случае могут быть определены из следующей системы уравнений

$$\Psi = 0, \qquad \Phi^{(1)}C_2^{\cdot}(2\pi) - \Phi^{(2)}C_2(2\pi) = 0 \tag{3.6}$$

В рассматриваемом случае периодические решения для значений A_0 и B_0, полученных из уравнений (3.6), будут зависеть от функции F_2.

В случае, когда основные амплитуды A_0 и B_0 определяются из уравнений, которые происходят от $C_s(2\pi)$ или $C_s^{\cdot}(2\pi)$, оценки всех величин, характеризующих такие периодические решения будут полностью зависеть от функций F_s и функций с меньшим индексом. При кратных корнях амплитудных уравнений на вид решений и их устойчивость могут влиять функции F_{s+1} и функции с более высоким индексом.

3°. Некоторые значения амплитуд A_0 и B_0 не могут быть определены ни из какой системы уравнений. Для этих значений амплитуд периодическое решение зависит от одного или двух параметров, а в случае нескольких степеней свободы — от некоторого числа параметров, не превышающих числа степеней свободы. К таким системам принадлежат, например, системы, обладающие первыми интегралами [8]. При этом периодическое решение этих систем имеет столько свободных параметров, сколько существует первых интегралов.

В рассматриваемом случае при добавлении функций F_s $(s = 2, 3, \ldots)$ возможно сохранение семейства решений, сохранение изолированных решений из этого семейства и полное исчезновение периодических решений. Например, если имеется консервативная автономная система, то добавление в правую часть уравнения функции $F_s(x, x^{\cdot}, \mu)$ уничтожает консервативность системы. Из первоначального семейства периодических решений, зависящего от одного параметра, могут сохраниться только изолированные решения.

В заключение рассмотрим в качестве иллюстрации следующую задачу. Имеется квазилинейная система с одной степенью свободы, пусть, для определенности, автономная типа (1.1). В эту систему вводится малое запаздывание времени τ_0. Система приобретает вид

$$x^{\cdot\cdot}(t) + k^2 x(t-\tau_0) = \mu F(x(t-\tau_0),\ x^{\cdot}(t-\tau_0), \mu) \qquad (3.7)$$

Эта задача была поставлена Ю. А. Рябовым в его докладе от 5 мая 1964 г. на семинаре отдела аналитической механики Института механики АН СССР и решена для трех частных примеров (уравнение Ван дер Поля, уравнение Дюфинга и уравнение колебаний лампового генератора).

Если все функции, зависящие от τ_0, разложить в степенные ряды по τ_0, то уравнение (3.7) можно записать в виде

$$x^{\cdot\cdot}(t) + k^2 x(t) = \mu F(x(t),\ x^{\cdot}(t), \mu) + k^2\tau_0 x^{\cdot}(t) + \ldots \qquad (3.8)$$

Последующие члены имеют порядок $\mu\tau_0$, τ_0^2 и т. д. Пусть запаздывание τ_0 имеет порядок μ^n, т. е.

$$\tau_0 = p\mu^n \qquad (3.9)$$

где p — положительный коэффициент порядка единицы. Предполагая, что системы (3.7) и (3.8) эквивалентны друг другу, исследуем влияние малого запаздывания на периодические решения исходной системы (1.1). При принятых условиях дополнительная функция наинизшего порядка будет

$$F_n = pk^2 x^{\cdot}(t)$$

В результате вычислений получим

$$C_{n1}(T_0) = p\pi k A_0 \qquad (3.10)$$

При $n = 1$ запаздывание порядка μ влияет на периодические решения данной системы наряду с основным членом 1-го порядка малости от нелинейной функции F. При $n = 2$ для оценки влияния запаздывания необходимо использовать вышеуказанные соображения и оценки. В этом случае системы, у которых амплитуды A_0 являются простыми корнями уравнения (1.7), при введении запаздывания сохраняют количество периодических решений, их вид и устойчивость.

Если исходная система консервативная, то $C_{1n}(T_0) \equiv 0$ для любого n. Амплитуда A_0 для системы с запаздыванием определяется в этом случае из уравнения $C_{n1}(T_0) = 0$, и, следовательно, $A_0 = 0$. Это соответствует состоянию равновесия системы. Таким образом, наличие сколь угодно малого запаздывания в консервативной автономной системе приводит к исчезновению периодических решений.

Поступила 15 VI 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Проскуряков А. П. Построение периодических решений автономных систем с одной степенью свободы в случае произвольных вещественных корней уравнения основных амплитуд. ПММ, 1958, т. 22, вып. 4.
2. Проскуряков А. П. Периодические решения квазилинейных автономных систем с одной степенью свободы в виде рядов по дробным степеням параметра. ПММ, 1961, 25, вып. 5.
3. Проскуряков А. П. Устойчивость периодических решений квазилинейных автономных систем с одной степенью свободы. ПММ, 1963, 27, вып. 3.
4. Проскуряков А. П. Колебания квазилинейных неавтономных систем с одной степенью свободы вблизи резонанса. ПММ, 1959, т. 23, вып. 5.
5. Плотникова Г. В. О построении периодических решений неавтономной квазилинейной системы с одной степенью свободы в случае двукратных корней уравнений основных амплитуд. ПММ, 1962, т. 26, вып. 4.
6. Плотникова Г. В. Об устойчивости периодических решений неавтономных квазилинейных систем с одной степенью свободы. ПММ, 1963, т. 27, вып. 1.
7. Архангельский Ю. А. Об одном случае построения периодических решений квазилинейных систем. ПММ, 1964, т. 28, вып. 5.
8. Архангельский Ю. А. Периодические решения квазилинейных автономных систем, обладающих первыми интегралами. ПММ, 1963, т. 27, вып. 2.