ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ ПОСТРОЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Ю. А. Архангельский (Москва)

Как известно, построение периодических решений квазилинейных систем основывается на решении некоторых уравнений — уравнений периодичности, вытекающих из условий периодичности.

Случай, когда уравнения основных амплитуд, представляющие уравнения периодичности при нулевом значении малого параметра, имеют якобиан, отличный от нуля, т. е. уравнения основных амплитуд имеют простые корни, достаточно полно исследован И. Г. Малкиным [1]. Получаемые при этом периодические решения разлагаются по целым степеням малого параметра.

Случай, когда якобиан уравнений основных амплитуд равен нулю, т. е. уравнения основных амплитуд имеют кратные корни, исследован при определенных условиях А. П. Проскуряковым и Г. В. Плотниковой, в частности для неавтономных систем с одной степенью свободы в работах [2, 3]. Получаемые в этом случае периодические решения представляются разложениями как по целым, так и по дробным степеням малого параметра.

В этих двух случаях предполагается, что исследуемые значения амплитуд порождающего решения полностью определяются уравнениями основных амплитуд.

Однако для неавтономных систем и автономных систем с несколькими степенями свободы может представиться случай, когда для некоторых значений амплитуд порождающего решения система уравнений основных амплитуд вырождается. Это может означать (при отсутствии у рассматриваемой квазилинейной системы первого интеграла [4]), что для определения соответствующих амплитуд порождающего решения данная форма уравнений периодичности не является подходящей. В этом случае определяемые начальные значения периодического решения разбиваются на группы, каждой из которых должна соответствовать своя форма уравнений периодичности.

1°. Рассмотрим, например, квазилинейную неавтономную систему с одной степенью свободы, у которой, следуя А. П. Проскурякову [2], уравнения периодичности после сокращения на малый параметр μ представим в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_{jn}(A, B)\mu^n = 0, \qquad A = A_0 + \beta_1,\ B = B_0 + \beta_2 \qquad (j = 1, 2) \tag{1}$$

Здесь $M_{jn}(A, B)$ — полиномы от A, B. Предположим M_{jn} такими, что уравнения (1) примут вид

$$\begin{gathered} f_1^{(1)}\varphi_0^{(1)} + \mu f_1^{(1)}\varphi_1^{(1)} + \cdots + \mu^{k-1} f_1^{(1)}\varphi_{k-1}^{(1)} + \mu^k f_1^* + \cdots = 0 \\ f_2^{(1)}\varphi_0^{(1)} + \mu f_2^{(1)}\varphi_1^{(1)} + \cdots + \mu^{k-1} f_2^{(1)}\varphi_{k-1}^{(1)} + \mu^k f_2^* + \cdots = 0 \\ \psi_0^{(1)} = f_2^{(1)} f_1^* - f_1^{(1)} f_2^* \not\equiv 0 \end{gathered} \qquad (k > 0) \tag{2}$$

Здесь, как и в дальнейшем, φ, f — полиномы от A, B, и f_0^i, $f_1^{(i)}, f_2^{(i)}$ для каждого i не имеют общих множителей, а кривые $\varphi_0^{(i)}(A, B) = 0$ не имеют изолированных особых точек. Разбивая уравнения основных амплитуд на две группы

$$f_1^{(1)}(A_0, B_0) = 0, \qquad f_2^{(1)}(A_0, B_0) = 0; \qquad \varphi_0^{(1)}(A_0, B_0) = 0 \tag{3}$$

найдем из первой группы уравнений действительные корни $A_0^{(1)}$ и $B_0^{(1)}$ (если они существуют) и из уравнений (2) — соответствующие величины $\beta_1^{(1)}$ и $\beta_2^{(1)}$.

Для определения остальных амплитуд порождающего решения поступим следующим образом. Вычитая из первого уравнения системы (2), умноженного на $f_2^{(1)}$, второе уравнение, умноженное на $f_1^{(1)}$), получим после сокращения на μ^k уравнение, которое вместе с каждым из уравнений (2), например с первым, будет представлять новую форму уравнений периодичности

$$\psi_1^{(1)} + \mu(\ldots) = 0, \quad \psi_0^{(1)} + \mu(\ldots) = 0, \qquad \psi_j^{(1)} = f_j^{(1)}\varphi_0^{(1)} \qquad (j = 1,2) \tag{4}$$

Если величины $\psi_1^{(1)}$ и $\psi_0^{(1)}$ представляются в виде

$$\psi_1^{(1)} = f_1^{(2)}\varphi_0^{(2)}, \qquad \psi_0^{(1)} = f_0^{(2)}\varphi_0^{(2)} \tag{5}$$

то уравнения периодичности (4) аналогичны уравнениям (2), и весь процесс по выбранному направлению повторяется до тех пор (что и предполагается,) пока не будет иметь место хотя бы одно из неравенств

$$\psi_1^{(l)} \neq f_1^{(l+1)}\varphi_0^{(l+1)}, \qquad \psi_0^{(l)} \neq f_0^{(l+1)}\varphi_0^{(l+1)} \qquad (l \geqslant 1)$$

В этом случае из уравнений основных амплитуд

$$\psi_1^{(l)}(A_0, B_0) = 0, \qquad \psi_0^{(l)}(A_0, B_0) = 0$$

находятся остальные амплитуды $A_0^{(l)}$, $B_0^{(l)}$ порождающего решения (если они существуют) и из уравнений периодичности

$$\psi_1^{(l)} + \mu(\ldots) = 0, \qquad \psi_0^{(l)} + \mu(\ldots) = 0 \tag{6}$$

соответствующие величины $\beta_1^{(l)}, \beta_2^{(l)}$. Затем процесс повторяется по другому направлению и т. д. Таким образом, все начальные значения искомых периодических решений A, B разбиваются на группы, каждой из которых соответствует своя форма уравнений периодичности. Аналогичные рассуждения могут быть проведены для автономных и неавтономных систем с несколькими степенями свободы.

2°. В качестве примера рассмотрим задачу Дюффинга в квазилинейной постановке [1,2]. Для уравнения колебаний

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = \mu(\alpha x - \beta x^3) + \mu^2\gamma \cos t \qquad (\alpha\beta > 0),\ \gamma \neq 0) \tag{7}$$

порождающее решение будет $x_0 = A_0 \cos t + B_0 \sin t$, а уравнения периодичности —

$$\begin{aligned} &B\,[\alpha - {}^3/_4\beta(A^2 + B^2)] - \mu^3/_{32}\beta B\,[\alpha(3A^2 - B^2) - \\ &\qquad - {}^1/_2\beta(7A^4 - 5B^4 + 8A^2B^2)] + \mu^2(\ldots) = 0 \\ &A\,[\alpha - {}^3/_4\beta(A^2 + B^2)] - \mu\,\{{}^1/_{32}\beta A\,[\alpha(A^2 - 3B^2) - \\ &\qquad - {}^3/_2\beta(A^4 - 5B^4 + 4A^2B^2)] - \gamma\} + \mu^2(\ldots) = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

Уравнения основных амплитуд разбиваются на две группы

$$A_0 = 0, \quad B_0 = 0; \qquad \alpha - {}^3/_4\beta(A_0^2 + B_0^2) = 0$$

и величины $\beta_1^{(1)}$и $\beta_2^{(1)}$, соответствующие нулевому значению амплитуд порождающего решения, находятся из системы (8). Для определения ненулевых амплитуд порождающего решения преобразуем систему (8) к виду

$$\begin{aligned} &f\,[\alpha - {}^3/_4\beta(A^2 + B^2)] + \mu(\ldots) = 0 \qquad (f = A, B) \\ &B\,\{\gamma + {}^1/_{32}\beta A^3\,[8\alpha - 3\beta(3A^2 + 2B^2)]\} + \mu(\ldots) = 0 \end{aligned} \tag{9}$$

и получим уравнения основных амплитуд при предположении $B_0 \neq 0$

$$A_0^2 + B_0^2 = {}^4/_3\alpha\beta^{-1}, \quad \gamma - {}^3/_{32}\beta^2 A_0^5 = 0$$

Отсюда, при условии, что $|\alpha|^5 > 27|\beta|\gamma^2$, будем иметь

$$A_0 = 2\left(\frac{\gamma}{3\beta^2}\right)^{1/5}, \qquad B_0 = \pm\left[\frac{4\alpha}{3\beta} - 4\left(\frac{\gamma^2}{9\beta^4}\right)^{1/5}\right]^{1/2}$$

и $\beta_1^{(2)}$ и $\beta_2^{(2)}$, соответствующие этим значениям амплитуд, найдутся из уравнений (9).

Поступила 14 IV 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. Гостехиздат, 1956.
2. Проскуряков А. П. Колебания квазилинейных неавтономных систем с одной степенью свободы вблизи резонанса. ПММ, 1959, т. 23, вып. 5.
3. Плотникова Г. В. О построении периодических решений неавтономной квазилинейной системы с одной степенью свободы вблизи резонанса в случае двукратных корней уравнений основных амплитуд. ПММ, 1962, т. 26, вып. 4.
4. Архангельский Ю. А. Периодические решения квазилинейных автономных систем, обладающих первыми интегралами. ПММ, 1963, т. 27, вып. 2.