ЛИТЕРАТУРА

1. Хасьминский Р. З. Об одной оценке решения параболического уравнения и некоторых ее применениях. Докл. АН СССР, 1962, т. 143, вып. 5, стр. 1060—1063.
2. Хасьминский Р. З. О методе усреднения для параболических и эллиптических дифференциальных уравнений и случайных процессов диффузионного типа. Теория вероятн. и ее примен., 1963, т. 8, вып. 1, стр. 3—25.
3. Kramers H. A. Brownian motion in a field of force and the diffusion model of chemical reactions. Physica, 1940, v. 7, p. 284—304.
4. Берштейн И. Л. Флуктуации амплитуды и фазы лампового генератора. Изв. АН СССР. Сер. физ., 1950, т. 14, № 2, стр. 145—173.
5. Стратонович Р. Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. Изд. «Сов. радио», М., 1961.
6. Хасьминский Р. З. О работе автоколебательной системы при воздействии на нее малого шума. ПММ, 1963, т. 27, вып. 4, стр. 683—688.
7. Doob J. L. Stochastic processes, N. Y., J. Wiley and sons, 1953. (Русский перевод: Дуб Дж. Вероятностные процессы. Изд. иностр. лит., 1959).
8. Jto K. On a formula concerning stochastic differentials, Nagoya Math. J., 1951, v. 3, p.p. 55—65. (Русский перевод; Ито К. Об одной формуле, касающейся стохастических дифференциалов. Математика (сб. перев.), 1959, т. 3, вып. 5, стр. 131—141).
9. Bernstein S. N. Sur l'equation differentielle de Fokker-Planck. C. r. Acad. Sci, Paris, 1933, v. 196, p. 1062—1064.
10. Хасьминский Р. З. Эргодические свойства возвратных диффузионных процессов. Теория вероятн. и ее примен., 1960, т. 5, вып. 2, стр. 196—214.
11. Хасьминский Р. З. О диффузионных процессах с малым параметром. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1963, т. 27, вып. 6, стр. 1281—1300.

О НЕВОЗМОЖНОСТИ СТАБИЛИЗАЦИИ СИСТЕМЫ В СРЕДНЕМ КВАДРАТИЧНОМ СЛУЧАЙНЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ ЕЕ ПАРАМЕТРОВ

Ю. Л. Работников

(Харьков)

К настоящему времени имеется уже довольно много работ, в которых рассматриваются вопросы устойчивости систем с параметрами, представляющими собой случайные функции независимой переменной (таковы, например, работы [1–13]). При этом во многих из них рассматривается устойчивость в среднем квадратичном.

В работах [5–6] был рассмотрен также следующий вопрос. Пусть некоторое решение дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами неограниченно возрастает вместе с аргументом. Возможно ли добиться ограниченности имеющего те же начальные условия решения в среднем квадратичном, если к одному из коэффициентов этого уравнения прибавить случайную функцию $\alpha(t)$? Правильный ответ, полученный в работе [6], в которой функция $\alpha(t)$ удовлетворяет тем же требованиям, что и в работе [5] (например, $\alpha(t)$ описывает гауссовский белый шум), оказался отрицательным.

В работе [10] была рассмотрена, в частности, система уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} (c_{ij} + r_{ij}(t))\, x_j(t)$$

где c_{ij} — постоянные, $r_{ij}(t)$ — случайные функции. Оказалось, что эта система неустойчива в среднем, если функции $r_{ij}(t)$ описывают гауссовский белый шум, и соответствующая детерминированная система неустойчива.

В настоящей заметке ставится следующая задача.

1. Пусть некоторая детерминированная система описывается уравнением

$$u^{(n)}(t)+a_{n-1}u^{(n-1)}(t)+\ldots+a_0u(t)=f(t) \qquad (n>1,\ 0\leqslant t\leqslant\infty) \tag{1.1}$$

причем коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ — вещественные постоянные, функция $f(t)$ вещественна и

$$|f(t)|<\frac{N}{(1+\varkappa t)^\rho} \qquad (\rho>0,\ \varkappa\geqslant 0) \tag{1.2}$$

Величины N, $\varkappa$ и ρ не зависят от t.

Замена какого-либо коэффициента a_j ($j=0, 1, \ldots, n-2$) на $a_j-\alpha_j(t)$, где $\alpha_j(t)$ — случайная функция, приводит к уравнению

$$u^{(n)}(t,\alpha_j)+a_{n-1}u^{(n-1)}(t,\alpha_j)+\ldots+a_0u(t,\alpha_j)=f(t)+\alpha_j(t)\,u^{(j)}(t,\alpha_j)$$
$$(j=0,1,\ldots,n-2) \tag{1.3}$$

Относительно случайной функции $\alpha_j(t)$ предполагается следующее.

(1) Интервал автокорреляции a случайного процесса $\alpha_j(t)$ равен нулю [1]

(2) $\langle\alpha_j(t)\rangle=0, \qquad \langle\alpha_j(t)\,\alpha_j(t+\tau)\rangle=S_j\delta(\tau) \qquad (-\infty\leqslant t,\ \tau\leqslant\infty; S_j=\text{const}>0)$

Здесь и в дальнейшем угловые скобки означают усреднение по ансамблю. Условия (1) и (2) представляют собой идеализацию (при $a\to 0$) следующих условий.

(1a) Случайный процесс $\alpha_j(t)$ имеет интервал автокорреляции $a>0$;

(2a) $\qquad \langle\alpha_j(t)\rangle=0, \qquad \displaystyle\int_{-a}^{a}\langle\alpha_j(t)\,\alpha_j(t+\tau)\rangle\,d\tau=S_j, \quad \mathbf{P}\left[\,|\alpha_j(t)|<\frac{\gamma_j}{\sqrt{a}}\right]=1$

где $\gamma_j=\text{const}>0$, $\mathbf{P}$ — вероятность; $-\infty\leqslant t\leqslant\infty$.

Необходимо выяснить связь между асимптотиками любого частного решения $u(t)$ уравнения (1.1) и среднего квадрата $\langle u^2(t,\alpha_j)\rangle$ решения $u(t;\alpha_j)$ уравнения (1.2), полученного при тех же начальных условиях, что и $u(t)$.

Полученные результаты сводятся к следующим двум теоремам.

Теорема 1.1. Если реальная часть хотя бы одного характеристического числа уравнения (1.1) положительна, то средний квадрат $\langle u^2(t,\alpha_j)\rangle$ любого частного решения уравнения (1.3) (со случайной функцией $\alpha_j(t)$, обладающей свойствами (1) и (2)) неограниченно возрастает с t при любых значениях S_j.

Теорема 1.2. Если характеристические числа λ_i уравнения (1.1) таковы, что $\operatorname{Re}\lambda_i<0$ ($i=1,\ldots,n$), то средний квадрат $\langle u^2(t,\alpha_j)\rangle$ любого частного решения уравнения (1.3) (со случайной функцией $\alpha_j(t)$, обладающей свойствами (1) и (2)), неограниченно возрастает с t в том и только в том случае, если

$$S_j>S_j{}^*=\left[\frac{(-1)^j}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{z^{2j}\,dz}{L_n(z)\,L_n(-z)}\right]^{-1}>0$$

Здесь $L_n(\lambda)$ — характеристический полином уравнения (1.1) [2].

---

[1] Интервалом автокорреляции случайного процесса $\alpha_j(t)$ называется такая величина $a>0$, что при любом фиксированном t и $|\tau|>a$ случайные величины $\alpha_j(t)$ и $\alpha_j(t+\tau)$ независимы.

[2] Например, для уравнения второго порядка

$$u^{\cdot\cdot}(t,\alpha_0)+2\beta u^{\cdot}(t,\alpha_0)+\omega_0^2\,[1+\alpha_0(t)]\,u(t,\alpha_0)=0 \quad (\beta>0)$$

необходимое и достаточное условие ограниченности любого частного решения в среднем есть $S_0<4\beta/\omega_0^2$, в полном согласии с [6].

В случае же $S_j < S_j^*$ и $\varkappa > 0$

$$\lim \langle u^2(t, \alpha_j)\rangle = 0 \quad \text{при } t \to \infty$$

Для доказательства этих теорем выведем выражение $\langle u^2(t, \alpha_j)\rangle$.

2. Пусть в уравнении (1.3) случайная функция $\alpha_j(t)$ удовлетворяет условиям (1a) и (2a) из п. 1. Уравнение (1.3) эквивалентно соотношению (2.1)

$$u(t, \alpha_j) = u(t) + \int_0^t W(t-q)\,\alpha_j(q)\,u^{(j)}(q, \alpha_j)\,dq, \qquad W(t-q) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{e^{p(t-q)}}{L_n(p)}\,dp$$

Здесь $u(t)$ — любое частное решение[1] уравнения (1.1), а $W(t-q)$ — функция Коши; $\gamma > \operatorname{Re}\Lambda$, где Λ — тот нуль характеристического полинома $L_n(\lambda)$ уравнения (1.1), который имеет наибольшую реальную часть (или один из таких нулей). Как известно, функция $W(t)\,e^{-\gamma t} \to 0$ при $t \to \infty$, каково бы ни было $\gamma > \operatorname{Re}\Lambda$.

Из соотношения (2.1) легко получить интегральное уравнение

$$u^{(j)}(t, \alpha_j) = u^{(j)}(t) + \int_0^t W^{(j)}(t-q)\,\alpha_j(q)\,u^{(j)}(q, \alpha_j)\,dq \qquad (j = 0, 1, \ldots, n-2) \tag{2.2}$$

Решение этого уравнения имеет, как известно, вид

$$u^{(j)}(t, \alpha_j) = \sum_{s=0}^{\infty} U_s(t, \alpha_j), \qquad U_0(t, \alpha_j) = u^{(j)}(t)$$

$$U^s(t, \alpha_j) = \int_{\Gamma_s} W_{js}(y)\,\alpha_{js}(y)\,u^{(j)}(y_s)\,dy \qquad (s = 1, 2, \ldots$$

Здесь $y = \{y_1, \ldots, y_s\}$ — s-мерный вектор; Γ_s — область в s-мерном пространстве, выделенная неравенствами: $t \geqslant y_1 \geqslant y_2 \geqslant \ldots \geqslant y_s \geqslant 0$;

$$\alpha_{js}(y) = \alpha_j(y_1)\,\alpha_j(y_2)\ldots\alpha_j(y_s), \qquad W_{js}(y) = W^{(j)}(t-y_1)\,W^{(j)}(y_1-y_2)\ldots W^{(j)}(y_{s-1}-y_s)$$

Подстановка выражения (2.2) для $u^{(j)}(t, \alpha_j)$ в (2.1) приводит к соотношению

$$u(t, \alpha_j) = \sum_{s=0}^{\infty} V_s(t, \alpha_j)$$

где

$$V_0(t, \alpha_j) = u(t), \qquad V_s(t, \alpha_j) = \int_{\Gamma_s} G_{js}(y)\,\alpha_{js}(y)\,u^{(j)}(y_s)\,dy \qquad (s = 1, 2, \ldots)$$

$$G_{j1}(y) = W(t-y_1)$$

$$G_{j1}(y) = W(t-y_1)\,W^{(j)}(y_1-y_2)\,W^{(j)}(y_2-y_3)\ldots W^{(j)}(y_{s-1}-y_s) \qquad (s = 2, 3, \ldots)$$

Отсюда

$$\langle u^2(t, \alpha_j)\rangle = u^2(t) + \sum_{s,\,\sigma=0}^{\infty} \langle V_s(t, \alpha_j)\,V_\sigma(t, \alpha_j)\rangle \qquad (s + \sigma \geqslant 2). \tag{2.3}$$

Это выражение существенно упрощается, если интервал автокорреляции a устремить к нулю, т. е. от условий (1a), (2a) п. 1 перейти к условиям (1) и (2).

При этом необходимо иметь в виду следующее.

а) Каждое слагаемое суммы в (2.3) есть некоторый интеграл. Те слагаемые, для которых $n = s + \sigma$ нечетно, обращаются в нуль вместе с a. Это следует из оценки способом, изложенным в [11], суммы объемов тех частей области интегрирования Γ_n, где подынтегральное выражение отлично от нуля.

[1] Начальные условия для $u(t)$ предполагаются для простоты детерминированными.

б) Вклад в любое из остальных слагаемых от интегрирования по тем частям области Γ_n, которые не соответствуют группировке аргументов по два [1], обращается в нуль вместе с a. Это следует из оценки тем же способом суммы объемов таких частей Γ_n.

в) Вклад от интегрирования по частям Γ_n, соответствующим такой группировке аргументов по два, при которой хотя бы одна пара аргументов совпадает с аргументами какой-либо из функций $W^{(j)}(y_i - y_{i+1})$ $(j = 0, 1, \ldots, n-2)$, также стремится к нулю. Последнее есть результат точного вычисления такого вклада с переходом к свойствам (1) и (2) как пределу, если при этом учитывать, что $W^{(j)}(0) = 0$ для $j = 0, 1, \ldots, n-2$.

Итак, не обращаются в нуль вместе с a лишь те слагаемые суммы в (2.3), у которых $s = \sigma$. Вычисляя их, нужно интегрировать только по тем частям области Γ_n, которые соответствуют группировке аргументов по два, и притом такой, что ни одна из пар не совпадает с аргументами какой-либо из функций $W^{(j)}$.

Тогда функция $\langle u^2(t, \alpha_j)\rangle$ в пределе $a \to 0$ принимает вид

$$\langle u^2(t, \alpha_j)\rangle = u^2(t) + \sum_{n=1}^{\infty} S_j^n \int_{\Gamma_n} [G_{jn}(y)\, u^{(j)}(y_n)]^2\, dy \tag{2.4}$$

Уже из этой формулы видно, что если $u^2(t)$ неограниченно возрастает с t, то неограниченно возрастает и $\langle u^2(t, \alpha_j)\rangle$.

Легко заметить, что в последней формуле каждый член ряда представляет собой свертку, что позволяет, воспользовавшись преобразованием Лапласа, просуммировать этот ряд. Действительно,

$$L\{\langle u^2(t, \alpha_j)\rangle\} = L\{u^2(t)\} + L\{W^2(t)\}\, L\{[u^{(j)}(t)]^2\} \sum_{n=1}^{\infty} S_j^n (L\{[W^{(j)}(t)]^2\})^{n-1}$$

где символ $L\{\ldots\}$ означает преобразование Лапласа. Отсюда

$$\langle u^2(t, \alpha_j)\rangle = \tag{2.5}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{p_0 - i\infty}^{p_0 + i\infty} \frac{L\{u^2(t)\} + S_j (L\{W^2(t)\}\, L\{[u^{(j)}(t)]^2\} - L\{[W^{(j)}(t)]^2\}\, L\{u^2(t)\})}{1 - S_j L\{[W^{(j)}(t)]^2\}}\, e^{pt} dp$$

Здесь $p_0 > \operatorname{Re} p_i$, где p_i — особенности подынтегрального выражения.

При $S_j = 0$ правая часть формулы (2.5) становится равной $u^2(t)$ (следует напомнить, что $u(t)$ — любое частное решение уравнения (1.1), а $u(t, \alpha_j)$ — решение уравнения (1.3), полученное при тех же начальных условиях, что и $u(t)$).

3. Формула (2.5) позволяет при помощи элементарных соображений решить вопрос об ограниченности функции $\langle u^2(t, \alpha_j)\rangle$.

Из формулы (2.5) следует, что если $S_j > 0$ и характеристические числа λ_i уравнения (1.1) таковы, что $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, то единственными полюсами подынтегральной функции, лежащими в полуплоскости $\operatorname{Re} p > 0$, являются нули знаменателя. Действительно, функции

$$L\{[W^{(j)}(t)]^2\}, \quad L\{[u^{(j)}(t)]^2\} \quad (j = 0, 1, \ldots, n-2)$$

не имеют тогда полюсов в полуплоскости $\operatorname{Re} p > 0$: для $L\{[W^{(j)}(t)]^2\}$ это следует из свойств функции Коши, для функции $L\{[u^{(j)}(t)]^2\}$ — из ограниченности по условию функции $f(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant \infty)$.

---

[1] Группировка аргументов по два — такая группировка $s + \sigma$ аргументов $(y_1, y_2)(y_3, y_4) \ldots (y_{s+\sigma-1}, y_{s+\sigma})$, что

$$y_{2k+1} - y_{2k+2} \leqslant a, \qquad y_{2k+2} - y_{2k+3} > a \qquad \left(k = 0, 1, \ldots, \frac{s+\sigma}{2} - 1\right)$$

Поэтому следует рассмотреть уравнение

$$\Phi_j(p) \equiv L\{[W^{(j)}(t)]^2\} = S_j^{-1} \qquad (j = 0, 1, \ldots, n-2) \tag{3.1}$$

и исследовать положение его корней на плоскости p в зависимости от величины $S_j > 0$ и значений характеристических чисел λ_i $(i = 1, \ldots, n)$ уравнения (1.1).

Легко убедиться, что при любых значениях чисел λ_i $(-\infty < \operatorname{Re}\lambda_i < \infty)$ функция $\Phi_j(p)$ обладает следующими свойствами.

1. Функция $\Phi_j(p)$ определена и аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} p > 2\operatorname{Re}\Lambda$, где Λ — то характеристическое число уравнения (1.1), у которого наибольшая реальная часть.
2. Функция $\Phi_j(p)$ вещественна на вещественной полуоси $p > 2\operatorname{Re}\Lambda$.
3. Функция $\Phi_j(p) \to 0$ при $p \to +\infty$.
4. Если $p > 2\operatorname{Re}\Lambda$, то $\lim \Phi_j(p) = +\infty$ при $p \to 2\operatorname{Re}\Lambda$.
5. Если $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, то наибольшее по модулю значение $\Phi_j(p)$ в замкнутой правой полуплоскости есть $\Phi_j(0) > 0$.

Последнее свойство следует из того, что

$$\Phi_j(p) = \int_0^\infty [W^{(j)}(t)]^2 e^{-pt}\,dt$$

(так как функция $W^{(j)}(t)$ вещественна, $0 \leqslant t \leqslant \infty$).

Из свойств (2), (4), (1) и (3) следует, что если $\operatorname{Re}\Lambda > 0$, то на полуоси $p > 2\operatorname{Re}\Lambda$ лежит, по крайней мере, один корень уравнения (3.1) [1]. Числитель подынтегрального выражения в формуле (2.5) при тех значениях p, которые являются нулями знаменателя, имеет вид

$$S_j L\{W^2(t)\} L\{[u^{(j)}(t)]^2\} e^{pt}$$

т. е. больше нуля при вещественных p. Это доказывает теорему 1.1.

Если $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, то в полуплоскости $\operatorname{Re} p > 0$ находится, по крайней мере, один корень уравнения (3.1) в том и только в том случае, если

$$S_j > S_j^* = \Phi_j^{-1}(0) \tag{3.2}$$

Действительно, из свойства (5) следует, что при $S_j < S_j^*$ уравнение (3.1) не может иметь ни одного корня в замкнутой правой полуплоскости. Если же $S_j > S_j^*$, то из свойств (5), (2), (1) и (3) функции $\Phi_j(p)$ вытекает существование, по крайней мере, одного корня уравнения (3.1) на полуоси $p > 0$.

Как известно, если

$$\operatorname{Re}\lambda_i < 0 \quad (i = 1, \ldots, n), \quad |f(t)| < \frac{N}{(1+\varkappa t)^\rho} \qquad (\rho > 0,\ \varkappa \geqslant 0;\ 0 \leqslant t \leqslant \infty)$$

то справедлива оценка

$$|u^{(j)}(t)| < \frac{C_j}{(1+\varkappa t)^\rho} \equiv M_j(t) \qquad (j = 0, 1, \ldots, n-2;\ 0 \leqslant t \leqslant \infty)$$

Величины C_j не зависят от t.

Если в формулу (2.4) подставить вместо $[u^{(j)}(y_n)]^2$ величину $M_j^2(y_n)$, то полученный в результате такой замены новый ряд сходится к некоторой функции $F_j(t)$ такой, что $F_j(t) > \langle u^2(t, \alpha_j)\rangle$ $(0 \leqslant t \leqslant \infty)$. Каждый член ряда для $F_j(t)$ (подобно членам ряда для $\langle u^2(t, \alpha_j)\rangle$) представляет собой свертку, что позволяет, воспользовавшись преобразованием Лапласа, получить равенство

$$L\{F_j(t)\} = \frac{L\{M_0^2(t)\} + S_j\left(L\{W^2(t)\} L\{M_j^2(t)\} - L\{[W^{(j)}(t)]^2\} L\{M_0^2(t)\}\right)}{1 - S_j L\{[W^{(j)}(t)]^2\}}$$

$$(j = 0, 1, \ldots, n-2)$$

[1] Этот же вывод, очевидно, справедлив и при $\operatorname{Re}\Lambda = 0$, если j меньше кратности характеристического числа Λ или $\operatorname{Im}\Lambda \neq 0$.

Применив к $L\{F_j(t)\}$ формулу обращения и исследовав в ней допустимые при $\varkappa = 0$ и $\varkappa > 0$ деформации контура интегрирования, можно прийти к следующему выводу: если $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, функция $f(t)$ удовлетворяет условию (1.2) и $S_j < S_j^*$ $(j = 0, 1, \ldots, n-2)$, то

$$\sup_t \langle u^2(t, \alpha_j)\rangle < \infty \quad (\varkappa \geqslant 0,\ 0 \leqslant t \leqslant \infty), \qquad \lim_t \langle u^2(t, \alpha_j)\rangle = 0 \quad (\varkappa > 0,\ t \to \infty)$$

Теорема 1.2 доказана.

Вычислим величину $\Phi_j(0)$, фигурирующую в формуле (3.2). Согласно определению функций $\Phi_j(p)$ и $W(t)$ (формулы (3.1) и (2.1))

$$\Phi_j(0) = \int_0^\infty [W^{(j)}(t)]^2\, dt, \qquad W^{(j)}(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{z^j e^{zt} dz}{L_n(z)}$$

$$(j = 0, 1, \ldots, n-2;\ \operatorname{Re}\Lambda < \gamma < 0)$$

После подстановки выражения для $W^{(j)}(t)$ в первую формулу и интегрирования по t величина $\Phi_j(0)$ выразится формулой

$$\Phi_j(0) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\gamma_1 - i\infty}^{\gamma_1 + i\infty} dz_1 \int_{\gamma_2 - i\infty}^{\gamma_2 + i\infty} dz_2\, \frac{z_1 z_2}{L_n(z_1)\, L_n(z_2)\,(z_1 + z_2)} \qquad \left(\begin{matrix} j = 0, 1, \ldots, n-2 \\ \operatorname{Re}\Lambda < \gamma_1, \gamma_2 < 0 \end{matrix}\right)$$

Вычислив внутренний интеграл и устремив γ_1 к нулю, получим окончательно

$$\Phi_j(0) = \frac{(-1)^j}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{z^{2j}\, dz}{L_n(z)\, L_n(-z)}$$

Легко видеть, что подынтегральная функция на контуре интегрирования принимает только вещественные значения.

Автор приносит благодарность Г. Я. Любарскому за полезные советы и помощь при редактировании статьи.

Поступила 2 I 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Rosenbloom A. Analysis of Randomly Time — Varying Linear Systems. Ph. D. Thesis (abbreviated version), University of California at Los Angeles. 1954.
2. Samuels J. C., Eringen A. C. On Stochastic Linear Systems. J. Math. and Phys., 1959, vol. 38, No 2.
3. Bertram J. E., Sarachik P. E. Stability of Circuits with Randomly Time-Varying Parameters. Proc. Int. Symp. on Circuit and Information Theory, Los Angeles, Calif., 1959 (I. R. E. Trans. CT-6, 1959, pp. 260—270).
4. Кац И. Я., Красовский Н. Н. Об устойчивости систем со случайными параметрами. ПММ, 1960, т. 24, вып. 5.
5. Samuels K. C. On the Stability of Random Systems and the Stabilization of Deterministic Systems with Random Noise. J. Acoust. Soc. America, 1960, vol. 32, No. 5.
6. Caughey T. K. Comments on «On the Stability of Random Systems». J. Acoust. Soc. America, 1960, vol. 32, No. 10.
7. Bogdanoff J. L., Kozin F. Moments of the Output of Linear Random Systems. J. Acoust. Soc. America, 1962, vol. 34, No. 8.
8. Caughey T. K., Dienes J. K. The Behaviour of Linear Systems with Random Parametric Excitation. J. Math. and Phys., 1962, vol. 41, No. 4.
9. Хасьминский Р. З. Об устойчивости траектории марковского процесса. ПММ, 1962, т. 26, вып. 6.
10. Leibowitz M. A. Statistical Behaviour of Linear Systems with Randomly Varying Parameters. J. math. Phys., 1963, vol. 4, No. 6.
11. Любарский Г. Я., Работников Ю. Л. К теории дифференциальных уравнений со случайными коэффициентами. Теория вероятн. и ее примен., 1963, т. 8, вып. 3.
12. Kozin F. On Almost Sure Stability of Linear Systems with Random Coefficients. J. Math. and Phys., 1963, vol. 42, No. 1.
13. Кац И. Я. Об устойчивости в целом стохастических систем ПММ, 1964, т. 28, вып. 2.