О РАБОТЕ КОНСЕРВАТИВНОЙ СИСТЕМЫ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ МАЛОГО ТРЕНИЯ И МАЛОГО СЛУЧАЙНОГО ШУМА

Р. З. Хасьминский (Москва)

Разработанный в [1, 2] принцип усреднения для марковских процессов применяется для анализа стационарного режима работы одномерной консервативной системы, подверженной воздействию малого случайного шума типа «белого» и малого нелинейного трения.

В ряде работ принцип усреднения применялся к марковским процессам. Например, в [3] рассматривалась линейная консервативная система, подверженная воздействию малого «белого» шума. В [4] изучалась такая же система с трением, но предполагалось, что эффект шума много меньше эффекта трения. Произвольная одномерная консервативная система рассматривалась в содержательной монографии [5], однако там предполагалось, что интенсивность шума не зависит от точки фазового пространства. Во всех этих работах, кроме того, не было дано строгого обоснования применения принципа усреднения к случайным процессам.

В [6] рассмотрена линейная консервативная система, подверженная воздействию нелинейного трения и «белого» шума при различных соотношениях между трением и шумом. Там же дано обоснование метода усреднения для таких систем на основе [1, 2]. В настоящей заметке результаты [6] обобщены на случай одномерной консервативной системы общего вида. В частности, получено явное выражение для предела плотности стационарного распределения вероятностей рассматриваемых систем, когда шум и трение стремятся к нулю. Указан также метод получения следующих членов асимптотического разложения.

1. Постановка задачи. Рассмотрим механическую систему с одной степенью свободы, невозмущенное движение которой — периодическое и описывается функцией Гамильтона $H(p, q)$.

Пусть система подвержена действию малого трения и малых случайных возмущений типа «белого шума». Если предположить, что эффект случайных возмущений и работа сил трения за период имеют один и тот же порядок малости ε, то движение такой системы описывается уравнениями

$$
\begin{aligned}
dq &= [\partial H / \partial p - \varepsilon f_q(p, q)]\, dt + \sqrt{\varepsilon}\, [\sigma_{11}(p, q)\, d\xi_1(t) + \sigma_{12}(p, q)\, d\xi_2(t)] \\
dp &= [-\partial H / \partial q + \varepsilon f_p(p, q)]\, dt + \sqrt{\varepsilon}\, [\sigma_{21}(p, q)\, d\xi_1(t) + \sigma_{22}(p, q)\, d\xi_2(t)] \qquad (1.1)
\end{aligned}
$$

В системе (1.1) функции $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ — независимые винеровские случайные процессы (интегралы от «белого шума») такие, что $\langle \xi(t) \rangle = 0$, $\langle \xi^2(t) \rangle = t$ (угловыми скобками обозначается вероятностное усреднение), функции f_p и f_q характеризуют нелинейное, вообще говоря, трение в системе, матрица $((\sigma_{ij}(p, q))$ — интенсивность случайных толчков в точке (p, q) фазового пространства. Нетрудно показать, что за время порядка $O(1)$ решение системы (1.1) будет сколь угодно мало отличаться от решения невозмущенной системы

$$
q' = \partial H / \partial p, \qquad p' = -\partial H / \partial q \qquad (1.2)
$$

если ε достаточно мало. В частности, энергия системы не изменится заметным образом за это время. Однако время релаксации для системы (1.1) имеет порядок $1/\varepsilon$. Поэтому ниже изучается поведение системы (1.1) на этом отрезке времени; в частности, при этом определяется стационарный режим работы системы.

2. Уравнение изменения энергии системы. Функции $\xi_i(t)$ не имеют дифференциала в классическом понимании, однако системе (1.1) можно придать точный смысл, если понимать ее как систему стохастических дифференциальных уравнений Ито [7,8].

Как известно, решение $p_\varepsilon(t)$, $q_\varepsilon(t)$ системы (1.1), удовлетворяющее начальным условиям

$$
p_\varepsilon(0) = p_0, \qquad q_\varepsilon(0) = q_0 \qquad (2.1)
$$

представляет собой случайный процесс в фазовом пространстве системы. Применяя формулу Ито замены переменных в стохастическом интеграле [8], можно написать уравнение изменения энергии $E_\varepsilon(t) = H(p_\varepsilon(t), q_\varepsilon(t))$ системы (1.1). Это уравнение имеет вид

$$dE_\varepsilon(t) = \varepsilon\left[-f_p(p, q)\frac{\partial H}{\partial q} + f_q\frac{\partial H}{\partial p} + \frac{1}{2}\left(a_{11}\frac{\partial^2 H}{\partial q^2} + 2a_{12}\frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} + a_{22}\frac{\partial^2 H}{\partial p^2}\right)\right]dt +$$

$$+ \sqrt{\varepsilon}\left[\left(\sigma_{11}\frac{\partial H}{\partial q} + \sigma_{21}\frac{\partial H}{\partial p}\right)d\xi_1(t) + \left(\sigma_{12}\frac{\partial H}{\partial q} + \sigma_{22}\frac{\partial H}{\partial p}\right)d\xi_2(t)\right] \qquad (2.2)$$

$$(a_{ij} = \sigma_{i1}\sigma_{j1} + \sigma_{i2}\sigma_{j2})$$

Рассмотрим уравнение (2.2) совместно с одним из уравнений системы (1.1). В получившейся таким образом системе «быстрое» и «медленное» движения разделены. Для таких (и значительно более общих) систем хорошо известен принцип усреднения, который при отсутствии случайности (т. е. при $\sigma_{ij} \equiv 0$) был обоснован в работах Крылова, Боголюбова, Митропольского. Этот принцип позволяет на отрезке времени порядка $1/\varepsilon$ приблизить уравнение медленного движения уравнением, правая часть которого усредняется по быстрому движению (быстрое движение в данном случае совпадает с движением невозмущенной системы). Соответствующий принцип усреднения для систем, содержащих случайность рассматриваемого здесь вида, разработан автором (см. [1, 2]). Применяя его к данному случаю, получим, что распределение вероятностей для энергии $E_\varepsilon(t)$ системы (1.1) на отрезке времени порядка $1/\varepsilon$ при малых ε близко к распределению вероятностей для одномерного марковского случайного процесса $E_0(t)$, описываемого уравнением

$$dE_0(t) = \frac{\varepsilon}{T(E_0)}[f^*(E_0)] + F^*(E_0)]\,dt + \sqrt{\varepsilon}\,\frac{\sigma^*(E_0)}{\sqrt{T(E_0)}}d\xi(t) \qquad (2.3)$$

Здесь

$$T(E) = \oint\left(\frac{\partial H}{\partial q}\right)^{-1}dq, \qquad \varepsilon\sigma^{*2}(E) = \oint\left\langle\frac{[\Delta H(p_\varepsilon(t), q_\varepsilon(t)]^2}{\Delta t}\right\rangle dt =$$

$$= \varepsilon\oint\left[a_{11}\left(\frac{\partial H}{\partial q}\right)^2 + 2a_{12}\frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} + a_{22}\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)^2\right]dt$$

$$f^*(E) = \oint f_p dp + f_q dq, \qquad F^*(E) = \frac{1}{2}\oint\left[a_{11}\frac{\partial^2 H}{\partial q^2} + 2a_{12}\frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} + a_{22}\frac{\partial^2 H}{\partial p^2}\right]dt$$

Интегрирование производится по траектории невозмущенного движения $H(p, q) = E$.

Из этих формул видно, что $T(E)$ — период невозмущенного движения, соответствующего значению энергии E, а $\varepsilon f^*(E)$, $\varepsilon\sigma^{*2}(E)$ и $\varepsilon F^*(E)$ — работа сил трения, локальная диффузия процесса $H(p_\varepsilon(t), q_\varepsilon(t))$ и работа добавочных сил трения, возникающих из-за диффузии, на той же траектории $H(p, q) = E$.

Обозначим через $u(E, t)$ плотность распределения вероятностей для процесса $E_0(t)$. Известно, что эта плотность удовлетворяет уравнению Фоккера — Планка — Колмогорова, которое в данном случае имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon\left\{\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial E^2}\left(\frac{\sigma^{*2}(E)}{T(E)}u\right) - \frac{\partial}{\partial E}\left[(f^*(E) + F^*(E))\frac{u}{T(E)}\right]\right. \qquad (2.4)$$

Если известна начальная плотность распределения

$$u(E, 0) = u_0(E) \qquad (2.5)$$

то, решая уравнение (2.4) при начальном условии (2.5), можно найти приближенно распределение вероятностей для энергии системы (1.1) на отрезке времени длины $O(1/\varepsilon)$ тем точнее, чем меньше ε. Не зависящее от времени решение $\mu_0(E)$ уравнения (2.4), нормированное условием

$$\int_0^\infty \mu_0(E)\,dE = 1 \qquad (2.6)$$

дает плотность стационарного распределения процесса (2.3), если оно существует.

Функцию $\mu_0(E)$ легко вычислить. Заметим для этого, что, как нетрудно проверить, функции σ^{*2} и F^* связаны соотношением

$$\frac{\partial}{\partial E}\sigma^{*2} = 2(F^* + \Phi) \qquad \left(\Phi(E) = \frac{1}{2}\oint\limits_{H=E}\frac{\partial a_{22}}{\partial p}dq - \frac{\partial a_{11}}{\partial q}dp\right) \tag{2.7}$$

Учитывая (2.7), находим

$$\mu_0(E) = cT(E)\exp\left\{2\int\limits_0^E \frac{f^*(z) - \Phi(z)}{\sigma^{*2}(z)}dz\right\} \tag{2.8}$$

где нормировочная постоянная c находится из условия (2.6), и предполагается, что σ^{*2} не обращается в нуль, так что процесс (2.3) эргодичен.

В частном случае $\Phi(E) = 0$

$$\mu_0(E) = cT(E)\exp\left\{2\int\limits_0^E \frac{f^*(z)}{\sigma^{*2}(z)}dz\right\} \tag{2.9}$$

Условие $\Phi(E) = 0$ выглядит несколько искусственным, однако оно выполнено в важном частном случае, когда $H = {}^1/_2 p^2 / m + U(q)$, а случайный шум зависит только от положения q-частицы и влияет непосредственно лишь на импульс системы. Система (1.1) тогда принимает вид

$$dq = \frac{p}{m}dt, \qquad dp = \left[-\frac{dU}{dq} + \varepsilon f(p, q)\right]dt + \sqrt{\varepsilon}\,\sigma(q)\,d\xi(t) \tag{2.10}$$

Так как $\sigma_{11} = \sigma_{12} = \sigma_{21} = 0$, а $\sigma_{22} = \sigma(q)$ в этом случае, то $a_{11} = 0$, $a_{22} = \sigma^2(q)$. Поэтому условие $\Phi(E) = 0$ выполнено.

3. Стационарный режим работы системы. Так как коэффициенты системы (1.1) не зависят от времени, то естественно ожидать, что при $t \to \infty$ в ней устанавливается определенный предельный режим, если выполнены общие предположения относительно трения в системе. Интересно изучить этот предельный режим при $\varepsilon \to 0$.

Уточним постановку задачи. Пусть $\mu^{(\varepsilon)}(p, q)$ — плотность по мере $dp\,dq$ стационарного распределения вероятностей для марковского процесса (1.1), т. е. такая функция, что

$$\begin{gathered}\iint \mu^{(\varepsilon)}(p_1, q_1)\,P_\varepsilon(p, q, t, p_1, q_1)\,dp_1\,dq_1 = \mu^{(\varepsilon)}(p, q)\\ \iint \mu^{(\varepsilon)}(p, q)\,dp\,dq = 1\end{gathered} \tag{3.1}$$

Здесь $P_\varepsilon(p, q, t, p_1, q_1)$ — плотность вероятности перехода из точки (p, q) в точку (p_1, q_1) за время t для процесса (1.1). Найдем предел функции $\mu^{(\varepsilon)}(p, q)$ при $\varepsilon \to 0$.

Из теоремы Лиувилля легко получить, что предел $\mu^{(0)}(p, q)$, если он существует, на самом деле зависит лишь от одной переменной: $\mu^{(0)}(p, q) = \mu^{(0)}(H(p, q))$.

Пусть выполнены условия: а) при любом $\varepsilon > 0$ существует стационарное распределение для процесса (1.1), плотность которого $\mu^{(\varepsilon)}$ по мере $dp\,dq$ удовлетворяет соотношениям (3.1); б) распределение $\mu^{(\varepsilon)}$ «не расплывается» при $\varepsilon \to 0$, т. е. для любого δ найдется c такое, что

$$\iint\limits_{H(p,q)>c} \mu^{(\varepsilon)}(p, q)\,dp\,dq < \delta \tag{3.2}$$

для всех $\varepsilon > 0$. Тогда, применяя рассуждения, аналогичные [6], можно показать, что слабый предел функции $\mu^{(\varepsilon)}(p, q)$ при $\varepsilon \to 0$ лишь множителем $1 / T(H)$ отличается от стационарного решения задачи (2.4), (2.6), т. е.

$$\mu^{(0)}(p, q) = \mu_0(H(p, q)) / T(H(p, q))$$

Множитель $1 / T(H)$ возникает из-за того, что $\mu^{(0)}$ — плотность по мере $dp\,dq$, а μ_r — плотность по мере dE.

Учитывая (2.8), получаем

$$\mu^{(0)}(p, q) = c \exp\left\{2 \int_0^{H(p,q)} \frac{f^*(z) - \Phi(z)}{\sigma^{*2}(z)} dz\right\} \tag{3.3}$$

Этот результат позволяет вычислить приближенные значения важных характеристик процесса (1.1) при малых значениях ε. Например, средняя энергия колебаний $\langle E_\varepsilon \rangle$ при $\varepsilon \to 0$ стремится к пределу

$$\langle E_0 \rangle = \int E\mu_0(E)\, dE$$

Интересно отметить, что при выполнении условия $\Phi(E) = 0$ экстремумы функции $\mu^{(0)}(p, q)$ достигаются на тех траекториях невозмущенного движения $H(p, q) = E_0$, для которых E_0 совпадают с корнями уравнения

$$f^*(E_0) = 0 \tag{3.4}$$

Условие (3.4) есть хорошо известное условие для определения расположения предельного цикла у системы с малым трением, состоящее в том, чтобы работа сил трения на предельном цикле равнялась нулю. Таким образом, устойчивым и неустойчивым предельным циклам для системы без случайности соответствуют максимумы и минимумы плотности инвариантной меры для системы с белым шумом, если выполнено условие $\Phi(E) = 0$.

Вероятно, практически чаще всего приходится иметь дело с тем случаем, когда случайный шум много меньше трения, т. е. $a_{ij} \ll 1$. Пусть $a_{ij}(p, q) = \mu \mathring{a}_{ij}(p, q)$, где $\mu \ll 1$ — параметр, характеризующий отношение работы случайного шума к работе сил трения за период движения. Тогда и $\Phi(E) = \mu\Phi^\circ(E)$, $\sigma^{*2}(E) = \mu\sigma^{\circ 2}(E)$, где функции $\Phi^\circ(E)$ и $\sigma^{\circ 2}(E)$ определяются по $\mathring{a}_{ij}$ так же, как Φ и σ^{*2} определяются по a_{ij}. Из формулы (3.3) видно, что при $\mu \ll 1$ стационарное распределение процесса сосредоточивается в самом высоком максимуме функции

$$U(E) = \int_0^E \frac{f^*(z)}{\sigma^{\circ 2}(z)} dz$$

т. е. на одном из предельных циклов системы без случайности. Если функция имеет несколько максимумов одинаковой высоты, то ситуация также детально проанализирована (см. [9]).

В заключение сделаем несколько замечаний:

1) Для доказательства вышеизложенных результатов большое значение имеют условия а) и б) § 3. Можно дать достаточные условия для их выполнения в терминах функций Ляпунова, опираясь на результаты [10].

2) Изложенный здесь метод может быть применен и для анализа многомерных систем. Однако для таких систем существует, как правило, более чем один интеграл движения. Поэтому «медленное движение» здесь будет, вообще говоря, многомерным, и изложенная методика приведет лишь к понижению размерности задачи. Например, предел плотности стационарного распределения будет зависеть не только от энергии, но и от всех других интегралов движения, а потому получение явных формул возможно лишь в виде исключения.

3) Функция $\mu^{(0)}$ является лишь главным членом асимптотического разложения

$$\mu^{(\varepsilon)}(p, q) = \mu^{(0)} + \varepsilon\mu^{(1)} + \cdots$$

Используя другой подход, аналогичный предложенному в [11], можно получить и другие члены этого асимптотического разложения. При этом, разумеется, функции $\mu^{(1)}$ при $n \geqslant 1$ будут зависеть не только от энергии.

Поступила 23 III 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Хасьминский Р. З. Об одной оценке решения параболического уравнения и некоторых ее применениях. Докл. АН СССР, 1962, т. 143, вып. 5, стр. 1060—1063.
2. Хасьминский Р. З. О методе усреднения для параболических и эллиптических дифференциальных уравнений и случайных процессов диффузионного типа. Теория вероятн. и ее примен., 1963, т. 8, вып. 1, стр. 3—25.
3. Kramers H. A. Brownian motion in a field of force and the diffusion model of chemical reactions. Physica, 1940, v. 7, p. 284—304.
4. Берштейн И. Л. Флуктуации амплитуды и фазы лампового генератора. Изв. АН СССР. Сер. физ., 1950, т. 14, № 2, стр. 145—173.
5. Стратонович Р. Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. Изд. «Сов. радио», М., 1961.
6. Хасьминский Р. З. О работе автоколебательной системы при воздействии на нее малого шума. ПММ, 1963, т. 27, вып. 4, стр. 683—688.
7. Doob J. L. Stochastic processes, N. Y., J. Wiley and sons, 1953. (Русский перевод: Дуб Дж. Вероятностные процессы. Изд. иностр. лит., 1959).
8. Jto K. On a formula concerning stochastic differentials, Nagoya Math. J., 1951, v. 3, p.p. 55—65. (Русский перевод; Ито К. Об одной формуле, касающейся стохастических дифференциалов. Математика (сб. перев.), 1959, т. 3, вып. 5, стр. 131—141).
9. Bernstein S. N. Sur l'equation differentielle de Fokker-Planck. C. r. Acad. Sci, Paris, 1933, v. 196, p. 1062—1064.
10. Хасьминский Р. З. Эргодические свойства возвратных диффузионных процессов. Теория вероятн. и ее примен., 1960, т. 5, вып. 2, стр. 196—214.
11. Хасьминский Р. З. О диффузионных процессах с малым параметром. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1963, т. 27, вып. 6, стр. 1281—1300.

О НЕВОЗМОЖНОСТИ СТАБИЛИЗАЦИИ СИСТЕМЫ В СРЕДНЕМ КВАДРАТИЧНОМ СЛУЧАЙНЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ ЕЕ ПАРАМЕТРОВ

Ю. Л. Работников

(Харьков)

К настоящему времени имеется уже довольно много работ, в которых рассматриваются вопросы устойчивости систем с параметрами, представляющими собой случайные функции независимой переменной (таковы, например, работы [1–13]). При этом во многих из них рассматривается устойчивость в среднем квадратичном.

В работах [5–6] был рассмотрен также следующий вопрос. Пусть некоторое решение дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами неограниченно возрастает вместе с аргументом. Возможно ли добиться ограниченности имеющего те же начальные условия решения в среднем квадратичном, если к одному из коэффициентов этого уравнения прибавить случайную функцию $\alpha(t)$? Правильный ответ, полученный в работе [6], в которой функция $\alpha(t)$ удовлетворяет тем же требованиям, что и в работе [5] (например, $\alpha(t)$ описывает гауссовский белый шум), оказался отрицательным.

В работе [10] была рассмотрена, в частности, система уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} (c_{ij} + r_{ij}(t))\, x_j(t)$$

где c_{ij} — постоянные, $r_{ij}(t)$ — случайные функции. Оказалось, что эта система неустойчива в среднем, если функции $r_{ij}(t)$ описывают гауссовский белый шум, и соответствующая детерминированная система неустойчива.