

УСТОЙЧИВОСТЬ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОГО ИСКУССТВЕННОГО СПУТНИКА СОЛНЦА В ПОЛЕ СИЛ СВЕТОВОГО ДАВЛЕНИЯ

А. А. Карымов (Ленинград)

Рассматривается либрационное движение искусственного спутника Солнца относительно его центра инерции в параллельном световом потоке. Приведены формулы для момента сил светового давления, действующего на тело, ограниченное поверхностью вращения. Полученные выражения позволяют исследовать устойчивость вращательного движения геометрически симметричного спутника Солнца, соответствующего «отслеживанию» осью симметрии спутника направления на Солнце.

В работе [1] было показано, что главный вектор F и главный момент M сил светового давления, действующих на тело произвольной формы с однородной в смысле коэффициента отражения поверхностью в параллельном световом потоке излучения, равны

$$\begin{aligned} F &= (1 - \varepsilon) F^+ + \varepsilon F^- = F^+ + \varepsilon (F^- - F^+) \\ M &= (1 - \varepsilon) M^+ + \varepsilon M^- = M^+ + \varepsilon (M^- - M^+) \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь F^+ , F^- , M^+ , M^- — векторы сил и моментов сил, действующих на тело, если бы его поверхность была полностью поглощающей (F^+ , M^+) или полностью отражающей (F^- , M^-), а ε — коэффициент отражения.

В свою очередь

$$\begin{aligned} F^+ &= -h_0 \int_{(s_1)} \tau (\tau \cdot n) dS = -h_0 \tau \int_{(s_1)} \tau \cdot n dS \\ M^+ &= -h_0 \int_{(s_1)} [R \times \tau] (\tau \cdot n) dS = h_0 \tau \times \int_{(s_1)} R (\tau \cdot n) dS \\ F^- &= -2h_0 \int_{(s_1)} n (\tau \cdot n)^2 dS \\ M^- &= -2h_0 \int_{(s_1)} R \times n (\tau \cdot n)^2 dS \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} F^- &= -2h_0 \int_{(s_1)} n (\tau \cdot n)^2 dS \\ M^- &= -2h_0 \int_{(s_1)} R \times n (\tau \cdot n)^2 dS \end{aligned} \quad (3)$$

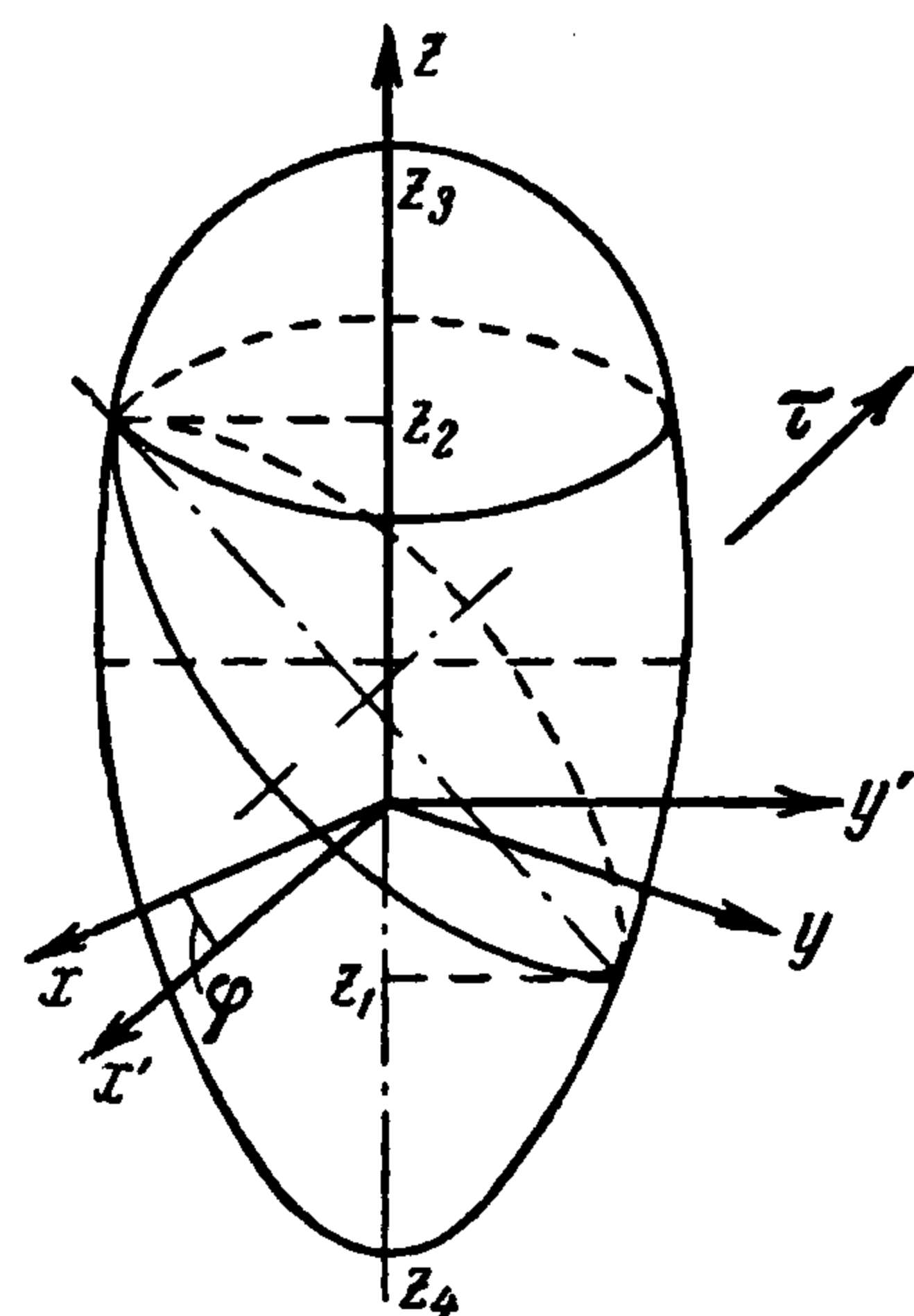
Здесь h_0 — величина, обратно пропорциональная квадрату расстояния от источника света и имеющая размерность давления, n — орт внешней нормали, R — радиус-вектор произвольной точки поверхности тела, τ — орт, противоположный направлению светового потока, (s_1) — освещенная часть поверхности, которая определяется уравнением

$$\tau \cdot n \geq 0 \quad (4)$$

Применим формулы (2), (3) для вычисления момента сил, действующих на тело, ограниченное поверхностью вращения (фиг. 1), уравнение которой в декартовых координатах имеет вид

$$x^2 + y^2 = R^2(z) = f(z) \quad (5)$$

где $R(z)$ — текущий радиус сечения, z — ось симметрии. Тело, ограниченное такой поверхностью, будем называть геометрически симметричным. Для простоты дальнейших выкладок будем предполагать, что поверхность не содержит торцевых плоскостей, а также цилиндрических и конических участков, хотя, как будет видно далее, рассматриваемый метод вычисления интегралов применим и в этих случаях. Существенным является лишь предположение о выпуклости поверхности, которое означает, что кривая $f(z)$ имеет один максимум. Обозначим координату максимума функции $f(z)$ через z^* , а сечение, соответствующее координате $z = z^*$, назовем миделевым сечением.



Фиг. 1

Проекции орта внешней нормали \mathbf{n} на оси x, y, z равны

$$\begin{aligned} n_x &= \frac{x}{\sqrt{f(z) + 1/4 [f'(z)]^2}} = \frac{x}{R(z) \sqrt{1 + [R'(z)]^2}} \\ n_y &= \frac{y}{\sqrt{f(z) + 1/4 [f'(z)]^2}} = \frac{y}{R(z) \sqrt{1 + [R'(z)]^2}} \quad \left(f'(z) = \frac{df}{dz} \right) \\ n_z &= -\frac{1/2 f'(z)}{\sqrt{f(z) + 1/4 [f'(z)]^2}} = -\frac{R'(z)}{\sqrt{1 + [R'(z)]^2}} \quad \left(R'(z) = \frac{dR}{dz} \right) \end{aligned} \quad (6)$$

Обозначим далее через a_0, b_0, c_0 проекции орта $\boldsymbol{\tau}$ на оси x, y, z соответственно. От осей x, y, z перейдем к осям x', y', z , совершив поворот вокруг оси z так, чтобы ось y' совпала с проекцией орта $\boldsymbol{\tau}$ на плоскость $x'y'$; от координат x', y', z перейдем к поверхностным координатам z, φ ; угол φ отсчитывается от оси x' . Тогда

$$\begin{aligned} x &= x' \frac{b_0}{\sqrt{1 - c_0^2}} + y' \frac{a_0}{\sqrt{1 - c_0^2}}, & x' &= R(z) \cos \varphi \\ y &= -x' \frac{a_0}{\sqrt{1 - c_0^2}} + y' \frac{b_0}{\sqrt{1 - c_0^2}}, & y' &= R(z) \sin \varphi \end{aligned} \quad (7)$$

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = \frac{\sqrt{1 - c_0^2} \sin \varphi - c_0 R'(z)}{\sqrt{1 + [R'(z)]^2}}, \quad dS = R(z) \sqrt{1 + [R'(z)]^2} d\varphi dz \quad (8)$$

Уравнение терминатора $\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = 0$ принимает вид¹

$$\sqrt{1 - c_0^2} \sin \varphi - c_0 R'(z) = 0 \quad (9)$$

и служит для определения пределов интегрирования в (2) и (3). Замечая, что изображение орта $\boldsymbol{\tau}$ на фиг. 1 соответствует случаю $c_0 > 0$ и предполагая внутреннее интегрирование проводить по φ , находим, что область интегрирования состоит из двух подобластей. В первой подобласти пределы интегрирования по z от $z_1(c_0)$ до $z^2(c_0)$, а по φ от $\varphi^*(z, c_0)$ до $\pi - \varphi^*(z, c_0)$, причем

$$\sin \varphi^* = \frac{c_0 R'(z)}{\sqrt{1 - c_0^2}} \quad (10)$$

а для определения z_1 и z_2 служит уравнение

$$[R'(z)]^2 = \frac{1 - c_0^2}{c_0^2} \quad (z_2 > z_1) \quad (11)$$

Во второй — пределы интегрирования по z от $z_2(c_0)$ до z_3 , а по φ от $-1/2\pi$ до $+3/2\pi$.

В случае $c_0 < 0$, т. е. при освещении тела «снизу», со стороны отрицательного направления оси z , пределы внешнего интегрирования во второй подобласти, естественно, будут от z_4 до z_1 . Заметим, что в общем случае произвольной выпуклой поверхности вращения наличие обеих подобластей одновременно необязательно (конус, боковая поверхность цилиндра). Обозначим

$$\mathbf{M}^+ = h_0 \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{I} \quad (12)$$

где \mathbf{I} — векторная величина, проекции которой на оси x, y, z равны

$$I_x = \int_{(s_1)} x (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}) ds = \int_{z_1}^{z_2} \int_{\varphi^*}^{\pi - \varphi^*} G(z, \varphi) d\varphi dz + \int_{z_2}^{z_3} \int_{-1/2\pi}^{3/2\pi} G(z, \varphi) d\varphi dz \quad (13)$$

$$I_y = \int_{(s_1)} y (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}) ds = \int_{z_1}^{z_2} \int_{\varphi^*}^{\pi - \varphi^*} H(z, \varphi) d\varphi dz + \int_{z_2}^{z_3} \int_{-1/2\pi}^{3/2\pi} H(z, \varphi) d\varphi dz \quad (14)$$

$$I_z = \int_{(s_1)} z (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}) ds = \int_{z_1}^{z_2} \int_{\varphi^*}^{\pi - \varphi^*} z F(z, \varphi) d\varphi dz + \int_{z_2}^{z_3} \int_{-1/2\pi}^{3/2\pi} z F(z, \varphi) d\varphi dz \quad (15)$$

¹ Под терминатором понимается линия раздела освещенной и неосвещенной частей поверхности.

В формулах (13) — (15) приняты обозначения

$$\begin{aligned} G(z, \varphi) &= (1 - c_0^2)^{-1/2} R(z) F(z) (b_0 \cos \varphi + a_0 \sin \varphi) \\ H(z, \varphi) &= (1 - c_0^2)^{-1/2} R(z) F(z) (b_0 \sin \varphi - a_0 \cos \varphi) \\ F(z, \varphi) &= R(z) [\sqrt{1 - c_0^2} \sin \varphi - c_0 R'(z)] \end{aligned} \quad (16)$$

Интеграл

$$\int_{\varphi^*}^{\pi - \varphi^*} \sin^n \varphi \cos \varphi d\varphi = \frac{1}{n+1} \sin^{n+1} \varphi \Big|_{\varphi^*}^{\pi - \varphi^*} \equiv 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (17)$$

Поэтому в выражении для I_x тождественно равны нулю все члены при коэффициенте b_0 , а в выражении для I_y — при a_0 . Следовательно,

$$I_x = \frac{a_0}{\sqrt{1 - c_0^2}} J, \quad I_y = \frac{b_0}{\sqrt{1 - c_0^2}} J \quad (18)$$

$$\begin{aligned} I_z = 2 \sqrt{1 - c_0^2} \int_{z_1}^{z_2} z R(z) (\cos \varphi^* + \varphi^* \sin \varphi^*) dz + \frac{\pi c_0}{2} [z_2 f(z_2) + z_1 f(z_1)] + \\ + \pi c_0 \left[\frac{1}{2} \int_{z_1}^{z_2} f(z) dz + \int_{z_2}^{z_3} f(z) dz \right] \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$J = \sqrt{1 - c_0^2} \left\{ \pi \left[\frac{1}{2} \int_{z_1}^{z_2} f(z) dz + \int_{z_2}^{z_3} f(z) dz \right] - \int_z^{z_2} f(z) (\varphi^* + \sin \varphi^* \cos \varphi^*) dz \right\}$$

Вычислив произведение $\tau \times \mathbf{I}$, с учетом (18), (19) и проделав аналогичные выкладки для $c_0 < 0$, получим

$$M_x^+ = h_0 b_0 \Phi^+(c_0), \quad M_y^+ = -h_0 a_0 \Phi^+(c_0), \quad M_z^+ = 0 \quad (20)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Phi^+(c_0) &= 2 \sqrt{1 - c_0^2} \int_{z_1}^{z_2} z R(z) (\cos \varphi^* + \varphi^* \sin \varphi^*) dz + \\ &+ c_0 \int_{z_1}^{z_2} f(z) (\varphi^* + \sin \varphi^* \cos \varphi^*) dz + \frac{\pi |c_0|}{2} [z_2 f(z_2) + z_1 f(z_1)] \end{aligned}$$

будет четной функцией величины c_0 .

Нетрудно заметить также, что в случае, когда поверхность тела обладает двойной симметрией, т. е. $R(z) = R(-z)$, $z_2 = -z_1$ (например, эллипсоид вращения), функция $\Phi^+(c_0)$ тождественно равна нулю.

Перейдем к вычислению величины M^- . В проекциях на оси x, y, z эта величина после подстановки выражений (6) записывается в виде

$$\begin{aligned} M_x^- &= 2h_0 \int_{(s_1)} y (\tau \cdot \mathbf{n})^2 \frac{z + R'(z) R(z)}{\sqrt{1 + [R'(z)]^2}} dz, \\ M_y^- &= -2h_0 \int_{(s_1)} x (\tau \cdot \mathbf{n})^2 \frac{z + R'(z) R(z)}{\sqrt{1 + [R'(z)]^2}} dz, \quad M_z^- = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

Подставив (7—(10) в (21) и выполнив внутреннее интегрирование по φ с учетом (17), получим

$$M_x^- = 4h_0 b_0 \Phi^-(c_0), \quad M_y^- = -4h_0 a_0 \Phi^-(c_0), \quad M_z^- = 0 \quad (22)$$

Здесь

$$\Phi^-(c_0) = \sqrt{1-c_0^2} \int_{z_1}^{z_2} \frac{R(z) [z + R'(z) R(z)]}{1 + [R'(z)]^2} \left[\cos \varphi^* - \frac{1}{3} \cos^3 \varphi^* - \right. \\ \left. - \sin \varphi^* \left(\frac{\pi}{2} - \varphi^* \right) \right] dz - \pi c_0 \int_{z_2}^{z_3} \frac{R(z) R'(z) [z + R'(z) R(z)]}{1 + [R'(z)]^2} dz$$

При этом функция $\Phi(c_0)$ записана, как нетрудно видеть, для случая $c_0 > 0$. При $c_0 < 0$ интегрирование во втором слагаемом нужно проводить в пределах от z_4 до z_1 . Следовательно, в рассматриваемом случае не существует единого выражения для главного вектора и главного момента сил светового давления при произвольном знаке величины c_0 . Только при наличии двойной симметрии тела можно записать

$$\Phi^-(c_0) = -\pi c_0 \int_0^{z_3} \frac{R'(z) R(z)}{1 + [R'(z)]^2} [z + R'(z) R(z)] dz = \\ = -\pi c_0 \int_{z_4}^0 \frac{R'(z) R(z)}{1 + [R'(z)]^2} [z + R'(z) R(z)] dz \quad (23)$$

Таким образом, проекции главного момента сил светового давления, действующего на геометрически симметричное тело, равны

$$M_x = h_0 b_0 \Phi_0(c_0) \quad (24)$$

$$M_y = -h_0 a_0 \Phi(c_0), \quad M_z = 0$$

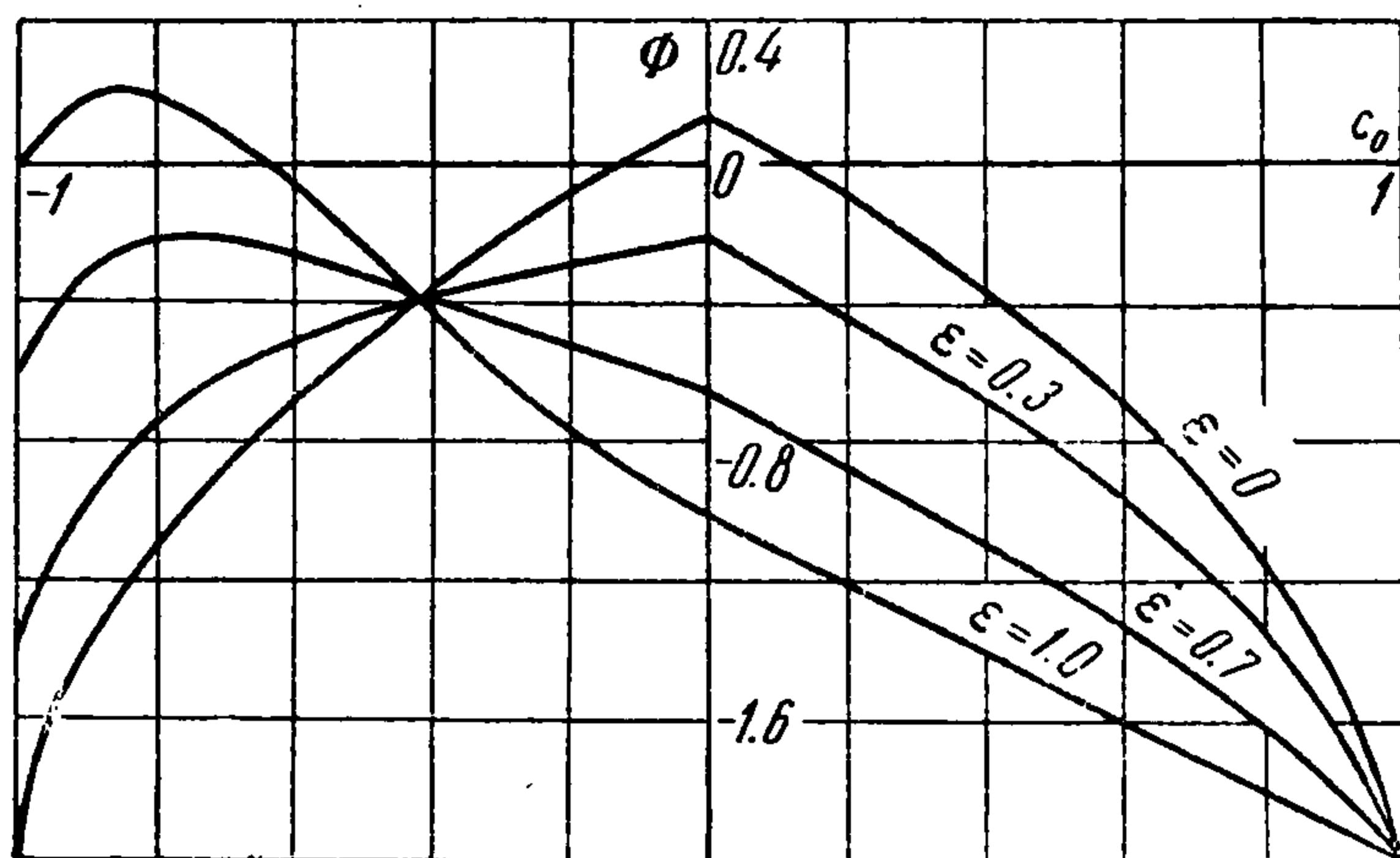
или в векторном виде

$$\mathbf{M} = h_0 \Phi(c_0) [\boldsymbol{\tau} \times \mathbf{k}] \quad (25)$$

$$\Phi(c_0) = (1 - \varepsilon) \Phi^+(c_0) + 4\varepsilon \Phi^-(c_0)$$

Здесь \mathbf{k} — орт оси тела z .

В работе [2] приведена аналогичная формула для момента сил светового давления без каких-

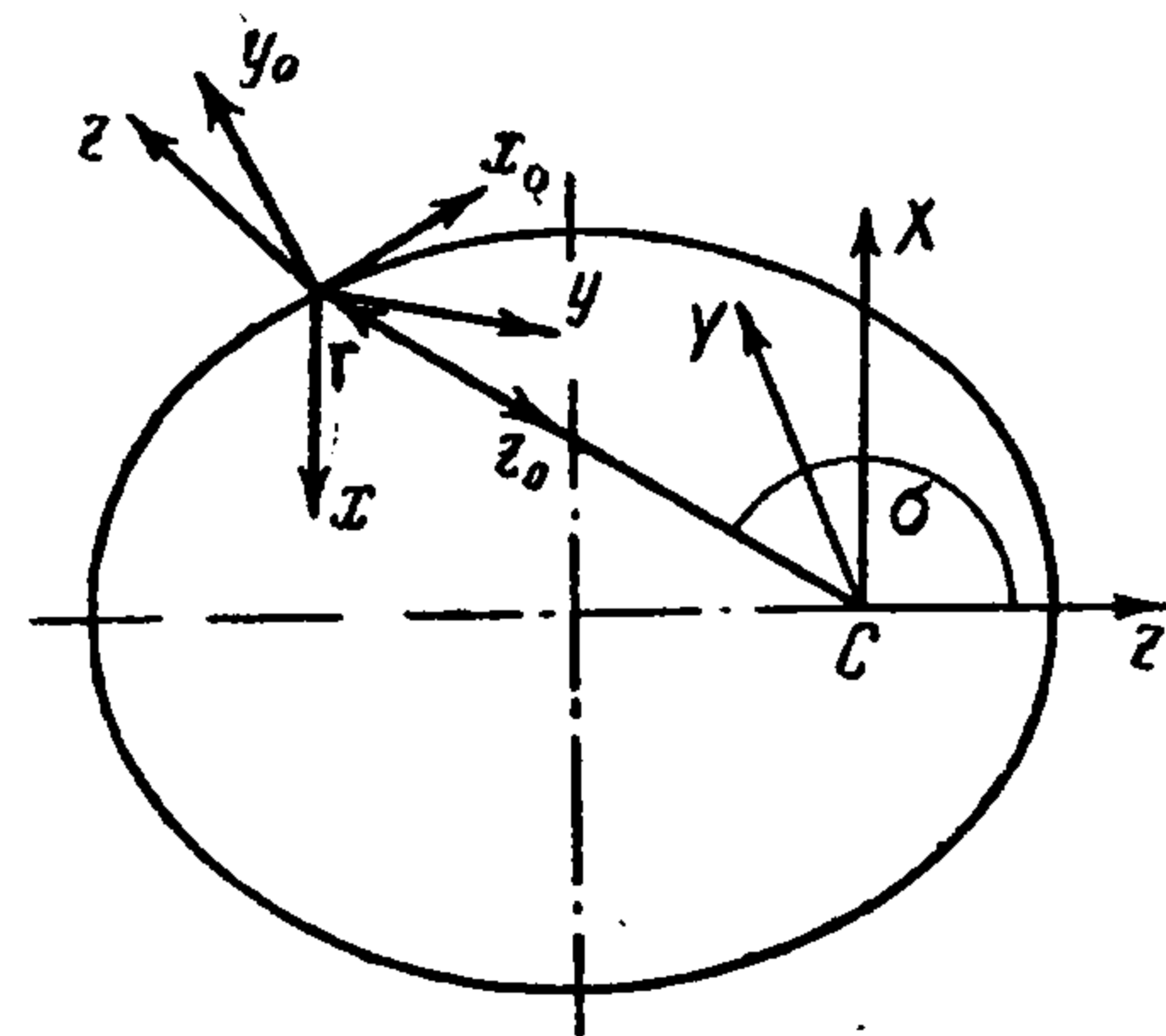


Фиг. 2

либо предварительных выкладок, способ вычисления функции, подобной $\Phi(c_0)$, не конкретизируется.

Функцию $\Phi(c_0)$ назовем определяющей, так как от ее вида зависит, как это будет показано далее, устойчивость исследуемых движений.

При выводе формул (20), (22) положение начала координат, т. е. точки относительно которой вычисляется момент, никак не оговаривалось. Теперь будем считать, что начало системы осей x, y, z совпадает с центром инерции тела, а сами оси являются главными центральными осями инерции. Если по каким-либо причинам удобнее вычислять момент относительно другой точки на оси симметрии тела, то, зная выражения для проекций главного вектора и главного момента, всегда можно произвести пересчет момента к центру инерции тела. Такой пересчет не изменяет общего вида формул (24), (25). В качестве примера на фиг. 2 приведен график функции $\Phi(c_0)/(3/16\pi R^3)$ для полушара радиуса R при различных значениях коэффициента отражения ε , причем за начало координат принят центр инерции полушара. Из этого графика видно, что вид функции $\Phi(c_0)$ может оказаться весьма сложным.



Фиг. 3

Рассмотрим теперь влияние момента сил светового давления на движение искусственного спутника Солнца относительно его центра инерции. Во всех дальнейших исследованиях движение самого центра инерции предполагается известным, т.е. рассматривается задача о движении искусственного спутника в поле заданных сил.

Введем в рассмотрение следующие координатные системы осей (фиг. 3).

1. Неподвижная система осей X, Y, Z с началом в центре Солнца — фокусе эллиптической орбиты спутника. Ось Z направлена по радиус-вектору перигелия орбиты, ось X — параллельно касательной в перигелии орбиты, ось Y — перпендикулярно плоскости орбиты.

2. Орбитальная система осей x_0, y_0, z_0 с началом в центре инерции спутника. Ось z_0 направлена по гелиоцентрической вертикали центра инерции спутника, y_0 — перпендикулярно плоскости орбиты по направлению оси Y , ось x_0 образует с осями y_0 и z_0 правую систему координат.

3. Система осей x, y, z жестко связанная со спутником. Предположим, что эти оси являются главными центральными осями инерции спутника, что спутник геометрически симметричен и что ось z служит осью симметрии.

Связь между введенными системами осей задается таблицами направляющих косинусов

	X	Y	Z		x_0	y_0	z_0		X	Y	Z
x	α_1	β_1	γ_1	x	α	$\beta = \beta_1$	γ	x_0	$-\cos \sigma$	0	$\sin \sigma$
y	α_2	β_2	γ_2	y	α'	$\beta' = \beta_2$	γ'	y_0	0	1	0
z	α_3	β_3	γ_3	z	α''	$\beta'' = \beta_3$	γ''	z_0	$-\sin \sigma$	0	$-\cos \sigma$

С учетом введенных предположений уравнения движения спутника относительно центра масс запишем в виде уравнений Эйлера

$$A \frac{dp}{dt} + (C - B) qr = h_0 \gamma' \Phi(\gamma''), \quad B \frac{dq}{dt} + (A - C) pr = -h_0 \gamma \Phi(\gamma'') \quad (27)$$

$$C \frac{dr}{dt} + (B - A) pq = 0$$

Здесь A, B, C — моменты инерции спутника относительно осей x, y, z соответственно; p, q, r — проекции абсолютной угловой скорости вращения спутника на эти оси. Уравнения (27) дополняются кинематическими соотношениями

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma}{dt} &= r\gamma' - q\gamma'' + \omega\alpha, & \frac{d\alpha}{dt} &= r\alpha' - q\alpha'' - \omega\gamma, & \frac{d\beta}{dt} &= r\beta' - q\beta'' \\ \frac{d\gamma'}{dt} &= p\gamma'' - r\gamma' + \omega\alpha', & \frac{d\alpha'}{dt} &= p\alpha'' - r\alpha - \omega\gamma', & \frac{d\beta'}{dt} &= p\beta'' - r\beta_1 \\ \frac{d\gamma''}{dt} &= q\gamma - p\gamma' + \omega\alpha'', & \frac{d\alpha''}{dt} &= q\alpha - p\alpha' - \omega\gamma'', & \frac{d\beta''}{dt} &= q\beta - p\beta' \end{aligned} \quad (28)$$

где ω — угловая скорость движения спутника по орбите.

При движении спутника по круговой орбите уравнения (27), (28) имеют первый интеграл

$$\frac{1}{2} (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) + h_0 \int \Phi(\gamma'') d\gamma'' - \omega (Ap\beta_1 + Bq\beta_2 + Cr\beta_3) = \text{const} \quad (29)$$

Прежде чем исследовать устойчивость вращательного движения спутника, рассмотрим влияние светового потока на движение твердого тела относительно неподвижной точки, совпадающей с центром инерции тела. В этом случае первый интеграл уравнений движения записывается в форме

$$\frac{1}{2} (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) + h_0 \int \Phi(\gamma'') d\gamma'' = \text{const} \quad (30)$$

Выражение (30) можно рассматривать как интеграл энергии, так как первое слагаемое представляет собой кинетическую энергию движения. Пусть ϑ — угол между осью z и ортом τ . Тогда потенциальная энергия

$$\Pi = h_0 \int \Phi(\gamma'') d\gamma'' \quad \text{или} \quad \Pi = -h_0 \int \Phi(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta \quad (\gamma'' = \cos \vartheta) \quad (31)$$

Как известно [3], для устойчивости равновесия консервативной системы достаточно, чтобы потенциальная энергия системы имела минимум в положении равновесия. Отыскивая обычными методами минимум функции (3), получим

$$\frac{d\Pi}{d\vartheta} = -h_0 \Phi(\cos \vartheta) \sin \vartheta = 0 \quad \text{при} \quad \vartheta_1 = 0, \quad \vartheta_2 = \pi \quad (32)$$

$$\frac{d^2\Pi}{d\vartheta^2} = -h_0 \Phi(\cos \vartheta) \cos \vartheta + h_0 \frac{d\Phi}{d \cos \vartheta} \sin^2 \vartheta \quad (33)$$

Следовательно, положение равновесия, соответствующее $\vartheta = 0$, $\cos \vartheta = 1$, устойчиво при $\Phi(1) < 0$, а положение равновесия $\vartheta = \pi$, $\cos \vartheta = -1$ при $\Phi(-1) > 0$. Эти условия являются не только достаточными, но и необходимыми.

Таким образом, геометрически симметричное твердое тело при движении его относительно неподвижной точки, совпадающей с центром инерции, под воздействием момента сил светового давления обязательно обладает двумя положениями равновесия, соответствующими совпадению оси симметрии тела с направлением на источник света. Устойчивость или неустойчивость положений равновесия определяется знаком функции $\Phi(c_0)$ в положении равновесия.

Как следует из (32), кроме указанных двух, возможны положения равновесия, когда $\Phi(\cos \vartheta) = 0$. Положения равновесия при $\vartheta = 0$ и $\vartheta = \pi$ назовем основными, так как они всегда существуют, а при $\Phi(\cos \vartheta) = 0$ — промежуточными. Как следует из (33), промежуточное положение равновесия устойчиво, если

$$\frac{d\Phi}{d \cos \vartheta} > 0 \quad \text{при} \quad \Phi(\cos \vartheta) = 0 \quad (34)$$

Количество (четное или нечетное число), а также чередование устойчивых и неустойчивых промежуточных положений равновесия определяется знаками определяющей функции на концах интервала ее задания, т. е. в основных положениях равновесия. Таким образом, функция $\Phi(c_0)$ полностью определяет количество, распределение и характер положений равновесия вращательного движения твердого тела в параллельном световом потоке. В случаях, когда

$$\Phi(\pm 1) \equiv 0 \quad \text{или} \quad d\Phi/d \cos \vartheta \equiv 0, \quad \Phi \cos \vartheta = 0$$

о наличии минимума или максимума $\Phi(c_0)$, а следовательно, и об устойчивости положений равновесия нужно судить по высшим производным в точках экстремума.

В качестве примера обратимся к фиг. 2, на которой построена функция $\Phi(c_0)$ для полусфера. При $\varepsilon = 0$ основное положение равновесия при $\vartheta = 0$ устойчиво, затем следуют неустойчивое промежуточное, устойчивое промежуточное и неустойчивое основное положения равновесия. При $\varepsilon = 0.3$ и $\varepsilon = 0.7$ существуют только два основных положения равновесия, одно из которых (при $\vartheta = 0$) устойчиво, а другое — нет. Наконец, при $\varepsilon = 1$ основное положение равновесия $\vartheta = 0$ устойчиво, затем идет неустойчивое промежуточное и, возможно, устойчивое основное положение равновесия.

Рассмотрим условия устойчивости основных положений равновесия для тела с полностью поглощающей ($\varepsilon = 0$) или полностью отражающей ($\varepsilon = 1$) поверхностью.

В первом случае проекции момента сил и определяющая функция записываются в виде (20), откуда следует, что при $c_0 = \pm 1$ и, следовательно, $z_1 = z_2 = z^*$

$$\Phi^+(\pm 1) = \pi z^* R^{*2} \quad (35)$$

Значит, условия устойчивости основных положений равновесия имеют вид

$$z^* < 0 \quad \text{при} \quad \vartheta = 0, \quad z^* > 0 \quad \text{при} \quad \vartheta = \pi \quad (36)$$

Условия (36) противоречивы и, следовательно, одно из основных положений равновесия устойчиво, другое — нет. Можно показать, что в рассматриваемом случае z^* есть координата центра давления, т. е. такой точки, относительно которой момент действующих сил равен нулю. Следовательно, основные положения равновесия устойчивы, если центр давления расположен позади центра масс.

Найдем теперь значения определяющей функции $\Phi^-(c_0)$ при $c_0 = \pm 1$. По (22)

$$\Phi^-(1) = -\pi \int_{z^*}^{z_3} \frac{R(z) R'(z) [z + R'(z) R(z)]}{1 + [R'(z)]^2} dz \quad (37)$$

Так как $R'(z) < 0$ при $z^* < z < z_3$, то достаточным условием устойчивости рассматриваемого положения равновесия будет неравенство

$$z + R'(z) R(z) < 0 \quad \text{при } z^* < z < z_3 \quad (38)$$

Аналогичным образом достаточное условие устойчивости при $\vartheta = \pi$ имеет вид

$$z + R'(z) R(z) > 0 \quad \text{при } z_4 < z < z^* \quad (39)$$

Если функция $z + R'(z) R(z)$ меняет знак в рассматриваемом диапазоне изменения аргумента, то необходимо вычислять интегралы по (37) и рассмотреть обычные условия устойчивости. Наконец, при произвольном коэффициенте отражения условия устойчивости основных положений равновесия записываются в форме

$$\begin{aligned} (1 - \varepsilon) z^* R'^2 - 4\varepsilon \int_{z^*}^{z_3} \frac{R(z) R'(z) [z + R'(z) R(z)]}{1 + [R'(z)]^2} dz < 0 \quad \text{для } \vartheta = 0 \\ (1 - \varepsilon) z^* R'^2 + 4\varepsilon \int_{z_4}^{z^*} \frac{R(z) R'(z) [z + R'(z) R(z)]}{1 + [R'(z)]^2} dz > 0 \quad \text{для } \vartheta = \pi \end{aligned} \quad (40)$$

Изложенный метод применим и при наличии торцевых плоскостей, цилиндрических и конических участков поверхности тела. В этих случаях нужно вычислять функцию $\Phi(c_0)$ с учетом конкретной формы поверхности тела.

Обратимся снова к исследованию вращательного движения искусственного спутника Солнца. Уравнения (27), (28) допускают частные решения

$$\begin{aligned} p = r = 0; \quad q = \omega; \quad \gamma' = \gamma = 0, \quad \gamma'' = \pm 1 \\ \alpha'' = \alpha' = 0, \quad \alpha = \mp 1; \quad \beta = \beta'' = 0, \quad \beta' = 1 \end{aligned} \quad (41)$$

которые соответствуют такому движению спутника относительно его центра инерции, при котором оси x, y, z «отслеживают» орбитальную систему осей, и, в частности, ось симметрии спутника все время совпадает с направлением на Солнце. Будем исследовать устойчивость этого движения, для чего представим p, q, r в виде

$$p = p_* + \omega\beta_1, \quad q = q_* + \omega\beta_2, \quad r = r_* + \omega\beta_3 \quad (42)$$

Величины p_*, q_*, r_* представляют собой проекции на оси спутника угловой скорости спутника в возмущенном движении. Преобразуя интеграл (29), получим

$$\frac{1}{2} (Ap_*^2 + Bq_*^2 + Cr_*^2) + h_0 \int \Phi(\gamma'') d\gamma'' - \frac{1}{2} \omega^2 (A\beta_1^2 + B\beta_2^2 + C\beta_3^2) = \text{const} \quad (43)$$

Разлагая далее $\Phi(\gamma'')$ в ряд Тейлора около значений $\gamma'' = \pm 1$ и учитывая в (43) только величину $\Phi(\pm 1)$, найдем, что для координат в возмущенном движении существует интеграл ($\Delta\gamma'' > 0$)

$$\frac{1}{2} (Ap_*^2 + Bq_*^2 + Cr_*^2) \mp h_0 \Phi(\pm 1) \Delta\gamma'' + \frac{1}{2} \omega^2 [(B - A)\beta_1^2 + (B - C)\beta_3^2] = \text{const} \quad (44)$$

Следовательно, невозмущенное движение, соответствующее $\gamma'' = +1$, устойчиво при

$$\Phi(+1) < 0, \quad B > A, \quad B > C \quad (45)$$

и соответствующее $\gamma'' = -1$ при

$$\Phi(-1) > 0, \quad B > A, \quad B > C \quad (46)$$

так как при выполнении условий (45), (46) интеграл (44) есть знакоопределенная положительная функция координат в возмущенном движении.

Таким образом, при движении геометрически симметричного искусственного спутника Солнца по круговой орбите существуют два установившихся вращательных движения, соответствующие двум основным положениям равновесия в орбитальной системе координат. Устойчивость этих движений по-прежнему зависит от знака определяющей функции в исследуемой точке. Однако, помимо этого, условия устойчивости должны быть дополнены соотношениями между динамическими характеристиками — моментами инерции спутника. Эти добавочные неравенства обусловлены движением центра инерции спутника по орбите. Сделаем несколько замечаний.

1. Можно показать, что неравенства (45), (46), будут не только достаточными, но и необходимыми условиями устойчивости.

2. Можно показать, что последнее слагаемое в (44) обусловлено полем центробежных сил, возникающих при движении спутника по круговой орбите.

3. Помимо частных решений (41), которые всегда существуют независимо от вида функции $\Phi(\gamma'')$, возможно частное решение

$$p = r = 0, \quad q = \omega; \quad \Phi(\gamma_x'') = 0 \quad (47)$$

$$\alpha_x = \gamma_x'', \quad \alpha_x'' = -\gamma_x; \quad \alpha_x' = \gamma_x' = 0, \quad \beta = \beta'' = 0, \quad \beta' = 1$$

Решение (47) соответствует «отслеживанию» спутником орбитальной системы координат, при котором ось симметрии спутника повернута относительно направления на источник света на угол χ , определяемый следующим образом

$$\alpha_x = \gamma_x'' = \cos \chi, \quad \alpha_x'' = \sin \chi \quad (48)$$

Условия устойчивости такого движения также состоят из двух групп неравенств и имеют вид

$$d\Phi/d\gamma'' > 0 \quad \text{при } \Phi(\gamma'') = 0; \quad B > A, \quad B > C \quad (49)$$

4. При исследовании движения искусственного спутника Солнца в поле сил светового давления пренебрегалось влиянием момента гравитационных сил Солнца. Как известно, на круговой орбите момент гравитационных сил пропорционален ω^2 , где ω — угловая скорость движения спутника по орбите. Потенциальная энергия поля центробежных сил в (44) также пропорциональна ω^2 . Поэтому с той же точностью, с какой момент гравитационных сил мал по сравнению с моментом сил светового давления, потенциальную энергию поля центробежных сил можно считать малой по сравнению с потенциальной энергией поля сил светового давления.

5. Формулы для проекций момента сил светового давления, действующего на геометрически симметричный спутник Солнца, и получающийся в результате интегрирования уравнений движения первый интеграл похожи по своей структуре на выражения для момента сил и первого интеграла уравнений движения в случае вращения спутника относительно центра инерции в центральном поле гравитационных сил [4,5]. Хотя рассмотрение физической природы этих воздействий обнаруживает больше различия, нежели сходства, с математической точки зрения вращательное движение спутника в поле сил светового давления оказывается более общим случаем вращательного движения спутника в центральном гравитационном поле.

Поступила 25 III 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Карымов А. А. Определение сил и моментов сил светового давления, действующих на тело при движении в космическом пространстве. ПММ, 1962, т. 26, № 5.
2. Белецкий В. В. Эволюция вращения динамически симметричного спутника. Космические исследования, 1963, т. I, вып. 3.
3. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. Гостехтеоретиздат, 1952.
4. Белецкий В. В. Движение искусственного спутника Земли относительно центра масс. Искусственные спутники Земли. Вып. I.
5. Белецкий В. В. О либрации спутника. Сб. Искусственные спутники Земли, вып. 3.