Доказанную теорему можно формулировать несколько иначе. Для того чтобы все главные миноры квадратной симметрической матрицы (2) порядка $2n$ были положительными, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры квадратных матриц n-го порядка A и $C = B - k^2A$ были положительными.

Нетрудно проверить, что определитель матрицы (2) представляет собой произведение определителей матриц A и C, т. е.

$$\begin{vmatrix} A & kA \\ kA & B \end{vmatrix} = |A| \cdot |C|$$

Пример. Необходимые и достаточные условия положительной определенности квадратичной форме (функция Ляпунова) переменных ξ_i, η_i $(i = 1, 2, 3)$

$$a\xi_1^2 + b\xi_2^2 + c\xi_3^2 - 2\omega(a\xi_1\eta_1 + b\xi_2\eta_2 + c\xi_3\eta_3) + 2\mu(\alpha\beta\eta_1\eta_2 +$$
$$+ \alpha\gamma\eta_1\eta_3 + \beta\gamma\eta_2\eta_3) + (\lambda + \mu\alpha^2)\eta_1^2 + (\lambda + \mu\beta^2)\eta_2^2 + (\lambda + \mu\gamma^2)\eta_3^2$$
$$(a > 0,\ b > 0,\ c > 0)$$

будут достаточными условиями устойчивости перманентных вращений тяжелого твердого тела [2]. Форма $A(X, X) = a\xi_1^2 + b\xi_2^2 + c\xi_3^2$ в этом случае определенно-положительна. Матрица коэффициентов формы $C = B - k^2A$ $(k = -\omega)$ имеет вид

$$C = \begin{vmatrix} \lambda + \mu\alpha^2 - a\omega^2 & \mu\alpha\beta & \mu\alpha\gamma \\ \mu\alpha\beta & \lambda + \mu\beta^2 - b\omega^2 & \mu\beta\gamma \\ \mu\alpha\gamma & \mu\beta\gamma & \lambda + \mu\gamma^2 - c\omega^2 \end{vmatrix}$$

и достаточными условиями устойчивости будут условия положительности трех главных миноров матрицы C.

Поступила 27 IV 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. Гостехтеоретиздат, 1954.
2. Румянцев В. В. Устойчивость перманентных вращений тяжелого твердого тела. ПММ, 1956, т. 20, вып. 1.

ОБ ОДНОМ ЭКСТРЕМАЛЬНОМ СВОЙСТВЕ РЕАКЦИЙ СВЯЗЕЙ

Б. Ю. Коган (Москва)

Согласно принципу Гаусса фактические ускорения точек системы минимизируют некоторую функцию возможных ускорений. Ниже показывается, что аналогичное утверждение можно сделать и относительно реакций связей: фактические реакции сообщают минимальное значение некоторой функции возможных реакций.

Рассмотрим голономную систему, подчиненную идеальным связям

$$f_k(x_1, \ldots, x_n, t) = 0 \qquad (k = 1, \ldots, p) \tag{1}$$

Составим сумму

$$S = {}^1/_2 \sum m_i (\mathbf{w}_i - \mathbf{w}_i^\circ)^2 \tag{2}$$

где m_i — масса i-й точки, $\mathbf{w}_i$ — ускорение, которое ей сообщают активная сила $\mathbf{F}$ и реакция $\mathbf{N}_i$, и $\mathbf{w}_i^\circ$ — ускорение, которое имела бы эта точка в данный момент t, если бы на систему не действовали активные силы (при заданных положениях и скоростях всех точек системы). Сумма (2) зависит от ускорений $\mathbf{w}_i$, и так как последние определяются активными силами $\mathbf{F}_i$ и реакциями $\mathbf{N}_i$, то при заданных $\mathbf{F}_i$ рассматриваемая сумма будет функцией от $\mathbf{N}_i$. Исследуем ее.

Обозначим через $\mathbf{N}_i$ фактические реакции, а через $\mathbf{N}_i'$ — любые реакции, возможные при данных связях. Точнее, будем под $\mathbf{N}_i'$ понимать любые реакции, удовлетворяющие условию

$$\sum \mathbf{N}_i' \,\delta r_i = 0 \tag{3}$$

где $\delta\mathbf{r}_i$ — виртуальные перемещения, определяемые связями (1). (Реакции, не удовлетворяющие (3), очевидно, невозможны.) Перейдем теперь от фактических реакций $\mathbf{N}_i$ к любым реакциям $\mathbf{N}_i'$, удовлетворяющим условию (3). При этом ускорения $\mathbf{w}_i$ примут значения $\mathbf{w}_i' = (\mathbf{F}_i' + \mathbf{N}_i') / m_i$ (вообще говоря, несовместимые со связями), и сумма (2) получит приращение ΔS. Оно равно

$$\Delta S = \sum m_i (\mathbf{w}_i - \mathbf{w}_i^\circ) \Delta\mathbf{w}_i + {}^1/_2 \sum m_i (\Delta\mathbf{w}_i)^2 \qquad (\Delta\mathbf{w}_i = \mathbf{w}_i' - \mathbf{w}_i) \tag{4}$$

Далее, так как активные силы $\mathbf{F}_i$ заданы, то

$$m_i \Delta\mathbf{w}_i = \mathbf{N}_i' - \mathbf{N}_i = \Delta\mathbf{N}_i$$

и поэтому

$$\Delta S = \sum (\mathbf{w}_i - \mathbf{w}_i^\circ) \Delta\mathbf{N}_i + {}^1/_2 \sum m_i (\Delta\mathbf{w}_i)^2 \tag{5}$$

Вычислим первое слагаемое правой части (5). Из (1) получаем

$$\sum \frac{\partial f_k}{\partial x_j} x_j^{\boldsymbol\cdot} + \frac{\partial f_k}{\partial t} = 0 \tag{6}$$

$$\sum \frac{\partial f_k}{\partial x_j} x_j^{\boldsymbol{\cdot\cdot}} + \varphi (x_1, \ldots, x_n, x_1^{\boldsymbol\cdot}, \ldots, x_n^{\boldsymbol\cdot}, t) = 0 \qquad (k = 1, \ldots, p) \tag{7}$$

Поэтому при фиксированных $x_1, \ldots, x_n, x_1^{\boldsymbol\cdot}, \ldots, x_n^{\boldsymbol\cdot}, t$ будем иметь

$$\sum \frac{\partial f_k}{\partial x_j} (x_j^{\boldsymbol{\cdot\cdot}} - x_j^{\boldsymbol{\cdot\cdot}\circ}) = 0 \qquad (k = 1, \ldots, p) \tag{8}$$

где $x_j^{\boldsymbol{\cdot\cdot}}$ и $x_j^{\boldsymbol{\cdot\cdot}\circ}$ — составляющие ускорений $\mathbf{w}_i$ и $\mathbf{w}_i^\circ$. Сравнивая равенства (8) с равенствами

$$\sum \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \delta x_j = 0 \qquad (k = 1, \ldots, p) \tag{9}$$

определяющими виртуальные перемещения, и учитывая, что если числа δx_j удовлетворяют условиям (9), то выполняется (3), приходим к выводу, что

$$\sum \mathbf{N}_i' (\mathbf{w}_i - \mathbf{w}_i^\circ) = 0 \tag{10}$$

Наконец, так как (10) справедливо для любых реакций $\mathbf{N}_i'$, удовлетворяющих условию (3) и, в частности, для фактических реакций $\mathbf{N}_i$, то

$$\sum \mathbf{N}_i (\mathbf{w}_i - \mathbf{w}_i^\circ) = 0 \tag{11}$$

Из (10) и (11) получаем

$$\sum (\mathbf{w}_i - \mathbf{w}_i^\circ) \Delta\mathbf{N}_i = 0 \qquad (\Delta\mathbf{N}_i = \mathbf{N}_i' - \mathbf{N}_i) \tag{12}$$

Из (12) и (5) заключаем, что $\Delta S \geqslant 0$, т. е. переход от фактических реакций $\mathbf{N}_i$ к любым возможным реакциям $\mathbf{N}_i'$ приводит к увеличению суммы (2). Следовательно, если сумму (2) рассматривать как функцию возможных реакций, то в случае, когда эти реакции совпадают с фактическими, рассматриваемая сумма будет иметь наименьшее значение.

Если повторить изложенное доказательство для случая удара, придем к теореме: ударные импульсы возможных реакций таковы, что сообщают минимум сумме

$$S = {}^1/_2 \sum m_i (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_i^\circ)^2 \tag{13}$$

(энергии приобретенных скоростей). Здесь $\mathbf{v}_i^\circ$ — скорости до удара, а $\mathbf{v}_i$ — после удара, причем последние рассматриваются как функции ударных импульсов возможных реакций (при заданных ударных импульсах активных сил).

Поступила 25 VIII 1963