О ЗНАКООПРЕДЕЛЕННОСТИ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ

А. Анчев (София, Болгария)

Рассматривается знакоопределенность одного вида квадратичных форм, встречающихся при применении второго метода Ляпунова об устойчивости движения.

Пусть имеем вещественные квадратичные формы n переменных

$$A(X, X) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j, \qquad B(Y, Y) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}y_iy_j$$

$$(A = \| a_{ij} \|_1^n,\ B = \| b_{ij} \|_1^n;\ A(X, X) = X'AX,\ B(Y, Y) = Y'BY)$$

Здесь A и B — симметрические квадратные матрицы коэффициентов, X и Y — столбцевые матрицы переменных x_i и y_j $(i = 1, \ldots, n)$, а X' и Y' — транспонированные матрицы матриц X и Y [1].

Рассмотрим квадратичную форму $2n$ переменных x_i, y_i

$$A(X, X) + 2kA(X, Y) + B(Y, Y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + 2k\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}y_iy_j \tag{1}$$

где k — некоторое число, а матрица коэффициентов которой имеет вид

$$D = \begin{pmatrix} A & kA \\ kA & B \end{pmatrix} \tag{2}$$

Теорема. Для того чтобы квадратичная форма $2n$ переменных (1) была положительно (отрицательно) определенной, необходимо и достаточно, чтобы квадратичные формы n переменных $A(X, X)$ и $C(X, X)$ были положительно (отрицательно) определены, где матрица C коэффициентов формы $C(X, X)$ имеет вид $C = B - k^2A$.

Доказательство. Пусть форма (1) определенно-положительна. Тогда при любых, не равных одновременно нулю вещественных значениях переменных имеем

$$A(X, X) + 2kA(X, Y) + B(Y, Y) > 0 \tag{3}$$

Если выберем $Y = 0$; $X \neq 0$, из (3) получаем

$$A(X, X) > 0 \tag{4}$$

т. е. квадратичная форма $A(X, X)$ будет положительно-определенной. Выбирая $X = \lambda Y \neq 0$, из (3) получаем

$$\lambda^2 A(Y, Y) + 2\lambda kA(Y, Y) + B(Y, Y) > 0 \tag{5}$$

которое должно быть выполнено при значениях $\lambda \neq 0$. Последнее возможно, если

$$k^2 [A(Y, Y)]^2 - A(Y, Y)B(Y, Y) = A(Y, Y)[k^2 A(Y, Y) - B(Y, Y)] < 0 \tag{6}$$

Отсюда, учитывая (4), получаем

$$B(Y, Y) - k^2 A(Y, Y) = C(Y, Y) > 0 \tag{7}$$

т. е. квадратичная форма $C(X, X)$ положительно определена и, следовательно, условия теоремы необходимы.

Покажем достаточность этих условий. Пусть формы $A(X, X)$ и $C(X, X)$ определенно-положительны, т. е. имеем (4) и (7). На основании (7) имеем неравенство

$$A(X, X) + 2kA(X, Y) + B(Y, Y) > A(X, X) + 2kA(X, Y) + k^2A(Y, Y) \tag{8}$$

Но

$$A(X, X) + 2kA(X, Y) + k^2A(Y, Y) = A(X + kY, X + kY)$$

и на основании положительной определенности $A(X, X)$ имеем

$$A(X + kY, X + kY) \geqslant 0$$

и из (8) следует (3), т. е. условия теоремы достаточны.

Доказанную теорему можно формулировать несколько иначе. Для того чтобы все главные миноры квадратной симметрической матрицы (2) порядка $2n$ были положительными, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры квадратных матриц n-го порядка A и $C = B - k^2A$ были положительными.

Нетрудно проверить, что определитель матрицы (2) представляет собой произведение определителей матриц A и C, т. е.

$$\begin{vmatrix} A & kA \\ kA & B \end{vmatrix} = |A| \cdot |C|$$

Пример. Необходимые и достаточные условия положительной определенности квадратичной форме (функция Ляпунова) переменных ξ_i, η_i ($i = 1, 2, 3$)

$$a\xi_1^2 + b\xi_2^2 + c\xi_3^2 - 2\omega\,(a\xi_1\eta_1 + b\xi_2\eta_2 + c\xi_3\eta_3) + 2\mu\,(\alpha\beta\eta_1\eta_2 +$$
$$+ \alpha\gamma\eta_1\eta_3 + \beta\gamma\eta_2\eta_3) + (\lambda + \mu\alpha^2)\,\eta_1^2 + (\lambda + \mu\beta^2)\,\eta_2^2 + (\lambda + \mu\gamma^2)\,\eta_3^2$$
$$(a > 0,\ b > 0,\ c > 0)$$

будут достаточными условиями устойчивости перманентных вращений тяжелого твердого тела [2]. Форма $A\,(X, X) = a\xi_1^2 + b\xi_2^2 + c\xi_3^2$ в этом случае определенно-положительна. Матрица коэффициентов формы $C = B - k^2A$ ($k = -\omega$) имеет вид

$$C = \begin{Vmatrix} \lambda + \mu\alpha^2 - a\omega^2 & \mu\alpha\beta & \mu\alpha\gamma \\ \mu\alpha\beta & \lambda + \mu\beta^2 - b\omega^2 & \mu\beta\gamma \\ \mu\alpha\gamma & \mu\beta\gamma & \lambda + \mu\gamma^2 - c\omega^2 \end{Vmatrix}$$

и достаточными условиями устойчивости будут условия положительности трех главных миноров матрицы C.

Поступила 27 IV 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. Гостехтеоретиздат, 1954.
2. Румянцев В. В. Устойчивость перманентных вращений тяжелого твердого тела. ПММ, 1956, т. 20, вып. 1.

ОБ ОДНОМ ЭКСТРЕМАЛЬНОМ СВОЙСТВЕ РЕАКЦИЙ СВЯЗЕЙ

Б. Ю. Коган (Москва)

Согласно принципу Гаусса фактические ускорения точек системы минимизируют некоторую функцию возможных ускорений. Ниже показывается, что аналогичное утверждение можно сделать и относительно реакций связей: фактические реакции сообщают минимальное значение некоторой функции возможных реакций.

Рассмотрим голономную систему, подчиненную идеальным связям

$$f_k\,(x_1, \ldots, x_n, t) = 0 \qquad (k = 1, \ldots, p) \tag{1}$$

Составим сумму

$$S = {}^1\!/_2 \sum m_i\,(\mathbf{w}_i - \mathbf{w}_i^\circ)^2 \tag{2}$$

где m_i — масса i-й точки, $\mathbf{w}_i$ — ускорение, которое ей сообщают активная сила $\mathbf{F}$ и реакция $\mathbf{N}_i$, и $\mathbf{w}_i^\circ$ — ускорение, которое имела бы эта точка в данный момент t, если бы на систему не действовали активные силы (при заданных положениях и скоростях всех точек системы). Сумма (2) зависит от ускорений $\mathbf{w}_i$, и так как последние определяются активными силами $\mathbf{F}_i$ и реакциями $\mathbf{N}_i$, то при заданных $\mathbf{F}_i$ рассматриваемая сумма будет функцией от $\mathbf{N}_i$. Исследуем ее.

Обозначим через $\mathbf{N}_i$ фактические реакции, а через $\mathbf{N}_i'$ — любые реакции, возможные при данных связях. Точнее, будем под $\mathbf{N}_i'$ понимать любые реакции, удовлетворяющие условию

$$\sum \mathbf{N}_i'\,\delta \boldsymbol{r}_i = 0 \tag{3}$$