РЕШЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ПРИ ПОМОЩИ КОНТУРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

А. Я. Александров, Ю. И. Соловьев

(Новосибирск)

В работах [1-2] было дано решение осесимметричной задачи теории упругости при помощи определенных интегралов от аналитических функций. Ниже напряжения и деформации упругого тела представляются интегралами от некоторых комплексных функций, определенных на контуре тела и не являющихся граничными значениями аналитических функций. При таком представлении действительная и мнимая части функции не связаны одна с другой, что значительно облегчает нахождение решения. Полученные выражения используются для составления интегральных уравнений первой и второй основных задач теории упругости. Рассмотрены случаи конечного и бесконечного тела, а также полупространства. Для полупространства решение найдено в замкнутой форме. Дается пример численного решения смешанной задачи.

1. Пусть имеется сплошное упругое тело, образованное вращением симметричной плоской фигуры. Будем считать, что фигура ограничена простым гладким замкнутым контуром L (фиг. 1).В статье [2] показано, что в случае осесимметричной деформации этого тела перемещения можно представить следующим образом

$$2Gw(z,r) = -\frac{1}{\pi i}\int_{\bar t}^{t} [-\varkappa\varphi(\zeta) + (2z-\zeta)\varphi'(\zeta) + \psi(\zeta)]\frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta-t)(\zeta-\bar t)}} \qquad (1.1)$$

$$2Gu(z,r) = -\frac{1}{\pi i r}\int_{\bar t}^{t} [\varkappa\varphi(\zeta) + (2z-\zeta)\varphi'(\zeta) + \psi(\zeta)]\frac{(\zeta - z)\,d\zeta}{\sqrt{(\zeta-t)(\zeta-\bar t)}} \qquad (r>0)$$

$$(t = z + ir, \qquad \varkappa = 3 - 4\nu)$$

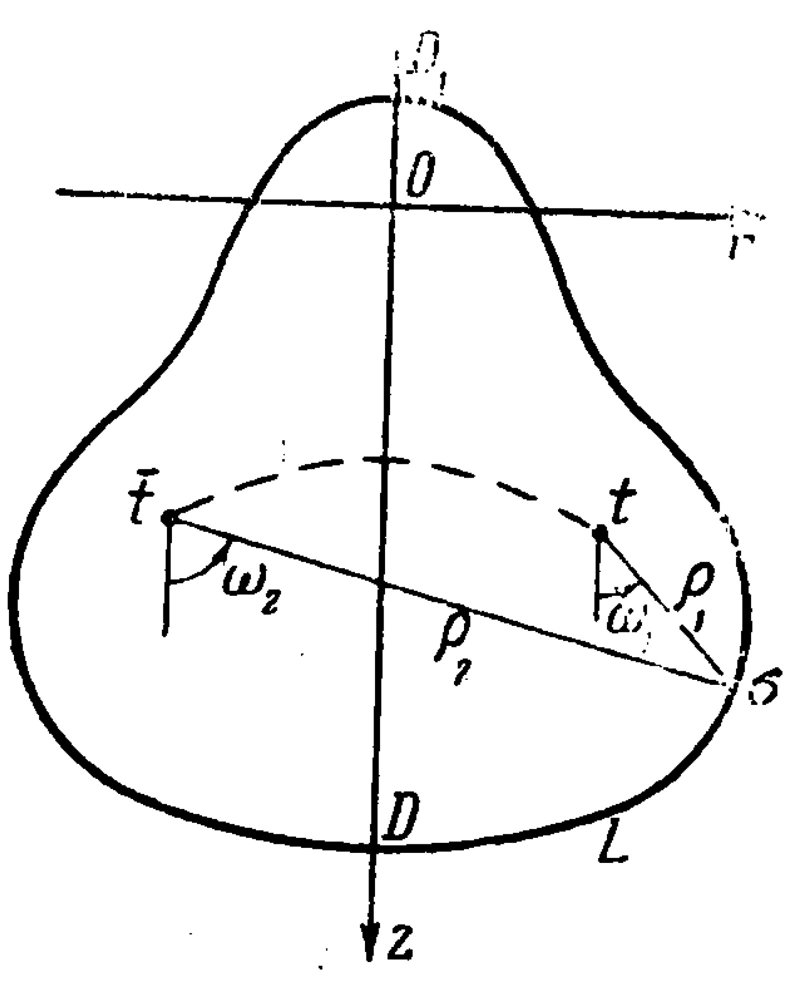
Здесь G — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона, ζ — аффикс произвольной точки области, $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ — функции, голоморфные внутри области, причем

$$\operatorname{Re}\varphi(\zeta) = \operatorname{Re}\varphi(\bar\zeta), \qquad \operatorname{Im}\varphi(\zeta) = -\operatorname{Im}\varphi(\bar\zeta),$$

$$\operatorname{Re}\psi(\zeta) = \operatorname{Re}\psi(\bar\zeta), \qquad \operatorname{Im}\psi(\zeta) = -\operatorname{Im}\psi(\bar\zeta) \qquad (1.2)$$

Представим эти функции интегралами типа Коши

$$\varphi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\sigma)\,d\sigma}{\sigma-\zeta}, \qquad \psi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{F(\sigma)\,d\sigma}{\sigma-\zeta} \qquad (1.3)$$



Фиг. 1

Здесь σ — аффикс контурной точки. При обходе контура область остается слева. Под $f(\sigma)$ и $F(\sigma)$ будем в дальнейшем понимать некоторые функции точек контура, удовлетворяющие условиям (1.2).

Подставим (1.3) в (1.1) и изменим порядок интегрирования. Учитывая, что

$$\frac{1}{\pi i}\int_{\bar t}^{t}\frac{1}{\sigma-\zeta}\,\frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta-t)(\zeta-\bar t)}} = \frac{1}{\sqrt{(\sigma-t)(\sigma-\bar t)}}$$

получим следующие выражения для перемещений.

$$2Gw(z,r) = -\frac{1}{2\pi i}\int_L [-\varkappa f(\sigma) + (2z-\sigma)f'(\sigma) + F(\sigma)]\frac{d\sigma}{\sqrt{(\sigma-t)(\sigma-\bar t)}} \qquad (1.4)$$

$$2Gu(z,r) = -\frac{1}{2\pi i r}\int_L [\varkappa f(\sigma) + (2z-\sigma)f'(\sigma) + F(\sigma)]\frac{(\sigma-z)\,d\sigma}{\sqrt{(\sigma-t)(\sigma-\bar t)}} + \frac{C}{r}$$

где

$$C = \frac{1}{2\pi i}\int_L [(\varkappa + 1) f(\sigma) + F(\sigma)]\, d\sigma \tag{1.5}$$

Здесь используется та ветвь радикала $\sqrt{(\sigma - t)(\sigma - \bar{t})}$, которая обращается в действительную положительную величину, когда точка σ совпадает с D. Линия разветвления показана на фиг. 1 пунктиром.

Для точек, лежащих на оси симметрии ($r = 0$), следует принять

$$2Gw(z, 0) = -\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{-\varkappa f(\sigma) + \sigma f'(\sigma) + F(\sigma)}{\sigma - z}\, d\sigma, \quad 2Gu(z, 0) = 0 \tag{1.6}$$

где в правой части стоит интеграл типа Коши.

Используя выражения статьи [2] для напряжений, аналогичным путем найдем

$$\begin{aligned}
\sigma_z(z, r) &= -\frac{1}{2\pi i}\int_L [-2f'(\sigma) + (2z - \sigma) f''(\sigma) + F'(\sigma)] \frac{d\sigma}{\sqrt{(\sigma - t)(\sigma - \bar{t})}} \\
\sigma_\theta(z, r) &= \frac{4\nu}{2\pi i}\int_L f'(\sigma) \frac{d\sigma}{\sqrt{(\sigma - t)(\sigma - \bar{t})}} + \frac{C}{r^2} - \\
&\quad - \frac{1}{2\pi i r}\int_L [\varkappa f(\sigma) + (2z - \sigma) f'(\sigma) + F(\sigma)] \frac{(\sigma - z)\, d\sigma}{\sqrt{(\sigma - t)(\sigma - \bar{t})}} \\
\sigma_r(z, r) &= \frac{4(1 + \nu)}{2\pi i}\int_L f'(\sigma) \frac{d\sigma}{\sqrt{(\sigma - t)(\sigma - \bar{t})}} - \sigma_z - \sigma_\theta \\
\tau_{rz}(z, r) &= -\frac{1}{2\pi i r}\int_L [(2z - \sigma) f''(\sigma) + F'(\sigma)] \frac{(\sigma - z)\, d\sigma}{\sqrt{(\sigma - t)(\sigma - \bar{t})}} \\
&\qquad (r > 0)
\end{aligned} \tag{1.7}$$

При $r = 0$ будем иметь

$$\begin{aligned}
\sigma_z(z, 0) &= -\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{-2f'(\sigma) + \sigma f''(\sigma) + F'(\sigma)}{\sigma - z}\, d\sigma \\
\sigma_r(z, 0) = \sigma_\theta(z, 0) &= \frac{1}{4\pi i}\int_L \frac{2(1 + 2\nu) f'(\sigma) + \sigma f''(\sigma) + F'(\sigma)}{\sigma - z}\, d\sigma \\
\tau_{rz}(z, 0) &= 0
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Если внутри области провести некоторую симметричную гладкую дугу, то интенсивность усилий, действующих на нее со стороны внешней нормали, можно представить следующим образом [2]:

$$\begin{aligned}
p_z(z, r) &= \frac{1}{2\pi i r}\frac{d}{ds}\int_L [-f(\sigma) + (2z - \sigma) f'(\sigma) + F(\sigma)] \frac{(\sigma - z)\, d\sigma}{\sqrt{(\sigma - t)(\sigma - \bar{t})}} \\
p_r(z, r) &= \frac{1}{2\pi i r^2}\frac{d}{ds}\int_L [f(\sigma) + (2z - \sigma) f'(\sigma) + F(\sigma)] \Bigg[\sqrt{(\sigma - t)(\sigma - \bar{t})} + \\
&\quad + \frac{(\sigma - z)^2}{\sqrt{(\sigma - t)(\sigma - \bar{t})}}\Bigg] d\sigma - \frac{\sin\alpha}{2\pi i r^2}\int_L [(3 + 4\nu) f(\sigma) + (2z - \sigma) f'(\sigma) + \\
&\quad + F(\sigma)] \frac{(\sigma - z)\, d\sigma}{\sqrt{(\sigma - t)(\sigma - \bar{t})}} - \frac{C}{r^2}\sin\alpha
\end{aligned} \tag{1.9}$$

На оси симметрии

$$\begin{aligned}
p_z(z, 0) = \sigma_z(z, 0) &= -\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{-2f'(\sigma) + \sigma f''(\sigma) + F'(\sigma)}{\sigma - z}\, d\sigma \\
p_r(z, 0) &= 0
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Здесь ds — дифференциал дуги, α — угол наклона нормали к оси z.

Введем обозначения

$$Z = \int_0^s p_z r\, ds, \qquad R = \int_0^s p_r r^2 ds + \int_0^s Z \sin\alpha\, ds \tag{1.11}$$

где интегрирование производится по дуге от точки, лежащей на оси симметрии.

Тогда равенства (1.9) можно преобразовать к виду

$$Z = \frac{1}{2\pi i}\int_L [-f(\sigma) + (2z-\sigma) f'(\sigma) + F(\sigma)] \left[\frac{\sigma - z}{\sqrt{(\sigma-t)(\sigma-\bar t)}} - 1\right] d\sigma \tag{1.12}$$

$$R = \frac{1}{2\pi i}\int_L [f(\sigma) + (2z-\sigma) f'(\sigma) + F(\sigma)] \Big[\sqrt{(\sigma-t)(\sigma-\bar t)} - 2(\sigma - z) +$$

$$+ \frac{(\sigma-z)^2}{\sqrt{(\sigma-t)(\sigma-\bar t)}}\Big] d\sigma - \frac{4(1+\nu)}{2\pi i}\int_L f(\sigma)\left\{\int_0^s \left[\frac{\sigma - z_1}{\sqrt{(\sigma-t_1)(\sigma-\bar t_1)}} - 1\right]\sin\alpha_1 ds_1\right\} d\sigma$$

Величина $2\pi Z$ имеет физический смысл равнодействующей усилий, приложенных к поверхности, которая образована вращением дуги вокруг оси z.

2. Если в равенствах (1.4) и (1.12) полагать, что точки t и $\bar t$ принадлежат контуру, то эти равенства можно рассматривать как интегральные уравнения для определения функций $f(\sigma)$ и $F(\sigma)$. Разделяя действительную и мнимую части этих равенств, получим четыре независимые действительные функции для определения двух перемещений или усилий. Поэтому двумя из этих функций можно распорядиться в достаточной мере свободно.

Заметим, что аналитические функции $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ будут функциями Колосова — Мусхелишвили соответствующей плоской задачи. Поэтому можно вслед за Д. И. Шерманом [3, 4], положить

$$F(\sigma) = k\overline{f(\sigma)} - \bar\sigma f'(\sigma) \tag{2.1}$$

где $k = 1$ в случае первой основной задачи и $k = -\varkappa$ — в случае второй.

Условие (1.5) дает

$$C = \frac{1}{2\pi i}\int_L [(\varkappa + 1) f(\sigma) + k\overline{f(\sigma)} - \bar\sigma f'(\sigma)]\, d\sigma$$

Произведем преобразования

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \bar\sigma f'(\sigma)\, d\sigma = -\frac{1}{2\pi i}\int_L f(\sigma)\, d\bar\sigma = \frac{1}{2\pi i}\int_L \overline{f(\sigma)}\, d\sigma$$

В результате получим

$$C = \frac{1}{2\pi i}\int_L [(\varkappa + 1) f(\sigma) + (k-1)\overline{f(\sigma)}]\, d\sigma \tag{2.2}$$

На основании (1.4) будем иметь

$$2Gw = \frac{1}{2\pi i}\int_L [\varkappa f(\sigma) - k\overline{f(\sigma)} + (\sigma + \bar\sigma - 2z) f'(\sigma)] \frac{d\sigma}{\sqrt{(\sigma-t)(\sigma-\bar t)}}$$

$$2Gu = \frac{1}{2\pi i r}\int_L [-\varkappa f(\sigma) - k\overline{f(\sigma)} + (\sigma + \bar\sigma - 2z) f'(\sigma)] \frac{(\sigma - z)\, d\sigma}{\sqrt{(\sigma-t)(\sigma-\bar t)}} + \frac{C}{r}$$

После интегрирования по частям получим

$$2Gw = \frac{1}{2\pi i}\int_L [\varkappa f(\sigma) - k\overline{f(\sigma)}]\, d\ln\left[\sqrt{(\sigma-t)(\sigma-\bar t)} + (\sigma - z)\right] -$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_L f(\sigma)\, d\left[\frac{\sigma + \bar\sigma - 2z}{\sqrt{(\sigma-t)(\sigma-\bar t)}}\right] \tag{2.3}$$

$$2Gu = -\frac{1}{2\pi ir}\int_L [\varkappa f(\sigma) + k\overline{f(\sigma)}]\, d\,[\sqrt{(\sigma - t)(\sigma - \bar{t})} - (\sigma - z)] -$$

$$-\frac{1}{2\pi ir}\int_L f(\sigma)\, d\left[\frac{(\sigma + \bar{\sigma} - 2z)(\sigma - z)}{\sqrt{(\sigma - t)(\sigma - \bar{t})}} - (\sigma + \bar{\sigma} - 2z)\right] (r > 0)$$

Для $r = 0$ можно записать, применяя формулы Сохоцкого — Племеля к (1.6),

$$2Gw(z_0, 0) = \frac{\varkappa - k}{2} f(z_0) + \frac{1}{2\pi i}\int_L [\varkappa f(\sigma) - k\overline{f(\sigma)}]\, d\ln(\sigma - z_0) - \frac{1}{2\pi i}\int_L f(\sigma)\, d\,\frac{\bar{\sigma} - z_0}{\sigma - z_0}$$

$$2Gu(z_0, 0) = 0 \tag{2.4}$$

Здесь z_0 — абсцисса точек D или D_1; интегралы в правой части понимаются в смысле главного значения по Коши. Заметим, что при $k = -\varkappa$ равенства (2.4) легко преобразуются в известное уравнение Шермана — Лауричелла.

Выражения для усилий запишем на основании формул (1.12)

$$Z = -\frac{1}{2\pi i}\int_L [f(\sigma) - k\overline{f(\sigma)}]\, d'\,[\sqrt{(\sigma - t)(\sigma - \bar{t})} - (\sigma - z)] + \tag{2.5}$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_L f(\sigma)\, d\left[\frac{(\sigma + \bar{\sigma} - 2z)(\sigma - z)}{\sqrt{(\sigma - t)(\sigma - \bar{t})}} - (\sigma + \bar{\sigma} - 2z)\right]$$

$$R = \frac{1}{2\pi i}\int_L [f(\sigma) + k\overline{f(\sigma)}]\, d\,[(\sigma - z)\sqrt{(\sigma - t)(\sigma - \bar{t})} - (\sigma - z)^2] + \frac{1}{2\pi i}\int_L f(\sigma)\, dK(\sigma, t)$$

где

$$K(\sigma, t) = (\sigma + \bar{\sigma} - 2z)\left[\sqrt{(\sigma - t)(\sigma - \bar{t})} - 2(\sigma - z) + \frac{(\sigma - z)^2}{\sqrt{(\sigma - t)(\sigma - \bar{t})}}\right] -$$

$$-4(1 + \nu)\int_0^s [\sqrt{(\sigma - t_1)(\sigma - \bar{t}_1)} - (\sigma - z_1)] \sin\alpha_1 ds_1$$

Равенства (2.5) и (2.3) можно рассматривать как систему интегральных уравнений для решения первой и второй основных задач теории упругости.

3. Все предыдущие формулы справедливы и для упругого пространства, имеющего осесимметричную полость. В этом случае точки t и $\bar{t}$ находятся вне контура L. Линию разветвления будем проводить так, чтобы она пересекала ось z ниже полости. Для точек, лежащих на оси симметрии ниже и выше полости, будем иметь соответственно

$$\sqrt{(\sigma - t)(\sigma - \bar{t})} = \sigma - z, \qquad \sqrt{(\sigma - t)(\sigma - \bar{t})} = -(\sigma - z)$$

Поэтому формулы (1.6) сохраняют свой вид для точек, лежащих ниже полости. Для точек выше полости знак перед интегралом в первом равенстве из (1.6) следует изменить на противоположный. Для того чтобы удовлетворялось второе равенство, необходимо положить

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L [(\varkappa + 1) f(\sigma) + F(\sigma)]\, d\sigma = C = 0 \tag{3.1}$$

При вычислении интегралов за положительное принимается такое направление обхода контура, когда бесконечная область остается слева.

Если первую из формул (1.12) записать для любой точки, лежащей выше полости, то с учетом (3.1) получим

$$Z_0 = -\frac{2}{2\pi i}\int_L F(\sigma)\, d\sigma = \frac{2(\varkappa + 1)}{2\pi i}\int_L f(\sigma)\, d\sigma \tag{3.2}$$

Здесь $2\pi Z_0$ — взятая с обратным знаком равнодействующая сил, приложенных к полости.

При решении граничных задач можно использовать интегральные уравнения (2.3) — (2.5). Условие (3.2) с учетом (3.1) и (2.2) преобразуется к виду

$$Z_0 = \frac{2\,(\varkappa+1)}{2\pi i}\int_L f(\sigma)\,d\sigma = -\frac{2\,(k-1)}{2\pi i}\int_L \overline{f(\sigma)}\,d\bar\sigma \tag{3.3}$$

Отсюда видно, что случай $k=1$ соответствует действию уравновешенных сил.

4. Рассмотрим полупространство $z<z_0$. В этом случае в формулах (2.3) и (2.5)

$$z=z_0,\qquad t=z_0+ir,\qquad \bar t=z_0-ir,\qquad \sigma=z_0+ix,\qquad d\sigma=idx,\qquad \sin\alpha=0$$

$$\sqrt{(\sigma-t)(\sigma-\bar t)}=\begin{cases}-i\sqrt{x^2-r^2} & \text{при } -\infty<x<-r\\ \sqrt{r^2-x^2} & \text{при } -r<x<r\\ i\sqrt{x^2-r^2} & \text{при } r<x<\infty\end{cases}$$

Будем считать, что $f(\sigma)$ при $|x|\to\infty$ стремится к конечному пределу A, одному и тому же для $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$, и при достаточно больших $|x|$

$$f(\sigma)=A+O(|x|^{-\mu})\qquad(\mu>0) \tag{4.1}$$

Интегралы в (2.3) и (2.5) могут быть расходящимися, и тогда их следует понимать в смысле главного значения. Искомую функцию представим в форме

$$f(\sigma)=p(x)+iq(x) \tag{4.2}$$

где в правой части стоят действительные функции; причем, в силу (1.2) и (4.1)

$$p(x)=p(-x),\qquad q(x)=-q(-x),\qquad p(\infty)=A,\qquad q(\infty)=0 \tag{4.3}$$

При решении второй основной задачи, т. е. при заданных на границе перемещениях, положим $k=-\varkappa$. Формулы (2.3) и (2.4) преобразуются к виду

$$2Gw(z_0,r)=\frac{2\varkappa}{\pi}\int_0^r p(x)\frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2}},\qquad 2Gw(z_0,0)=\varkappa p(0)$$

$$2Gu(z_0,r)=\frac{2\varkappa}{\pi r}\int_0^r q(x)\frac{xdx}{\sqrt{r^2-x^2}},\qquad u(z,0)=0 \tag{4.4}$$

Полученные уравнения легко приводятся к интегральным уравнениям типа Абеля, решая которые, получим

$$p(x)=\frac{1}{\varkappa}\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{2Gw(z_0,r)\,rdr}{\sqrt{x^2-r^2}},\qquad q(x)=\frac{1}{\varkappa}\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{2Gu(z_0,r)\,xdr}{\sqrt{x^2-r^2}} \tag{4.5}$$

$$p(0)=\frac{2G}{\varkappa}w(z_0,0),\qquad q(0)=0$$

В справедливости последнего равенства легко убедиться, предполагая $u(z_0,r)$ удовлетворяющим условию Гёльдера в окрестности точки $(z_0,0)$.

При решении первой основной задачи на границе полупространства заданы напряжения $\sigma_z(z_0,r)$ и $\tau_{rz}(z_0,r)$. Формулы (1.11) дают

$$Z=\int_0^r\sigma_z(z_0,r)\,rdr,\qquad R=\int_0^r\tau_{rz}(z_0,r)\,r^2dr \tag{4.6}$$

Полагая $k=1$, получим из (2.5)

$$Z=\frac{2}{\pi}\int_0^r q(x)\frac{xdx}{\sqrt{r^2-x^2}},\qquad R=\frac{2}{\pi}\int_0^r p(x)\frac{r^2-2x^2}{\sqrt{r^2-x^2}}dx \tag{4.7}$$

Решая эти уравнения, будем иметь

$$q(x)=\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{Zx\,dr}{r\sqrt{x^2-r^2}},\qquad p(x)=p(0)+\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{R\,(r^2-2x^2)}{r^3\sqrt{x^2-r^2}}dr \tag{4.8}$$

где $p(0)$ — неопределенная постоянная.

5. Каждое из интегральных уравнений (2.3) — (2.5) можно привести к виду

$$\int_{L'} [p(\sigma)\, dU(\sigma, t) + q(\sigma)\, dV(\sigma,t)] = W(t) \tag{5.1}$$

$$p(\sigma) = \operatorname{Re} f(\sigma), \qquad q(\sigma) = \operatorname{Im} f(\sigma)$$

Здесь L' — правая половина контура L, а $W(t)$ — заданная действительная функция.

Хотя при выводе (2.3) — (2.5) для простоты предполагалось, что функции $f(\sigma)$ и $F(\sigma)$ являются дифференцируемыми, однако эти равенства остаются справедливыми и в случае, когда $f(\sigma)$ кусочно непрерывна и ограничена на L.

Разделив контур L' точками $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{l+1}$ на некоторое число $(l+1)$ достаточно малых участков и положив в пределах каждого участка $f(\sigma) = \text{const}$, получим

$$\sum_{n=0}^{l} \{p_n [U(\sigma_{n+1}, t) - U(\sigma_n, t)] + q_n [V(\sigma_{n+1}, t) - V(\sigma_n, t)]\} = W(t) \tag{5.2}$$

$$(q_0 = q_l = 0)$$

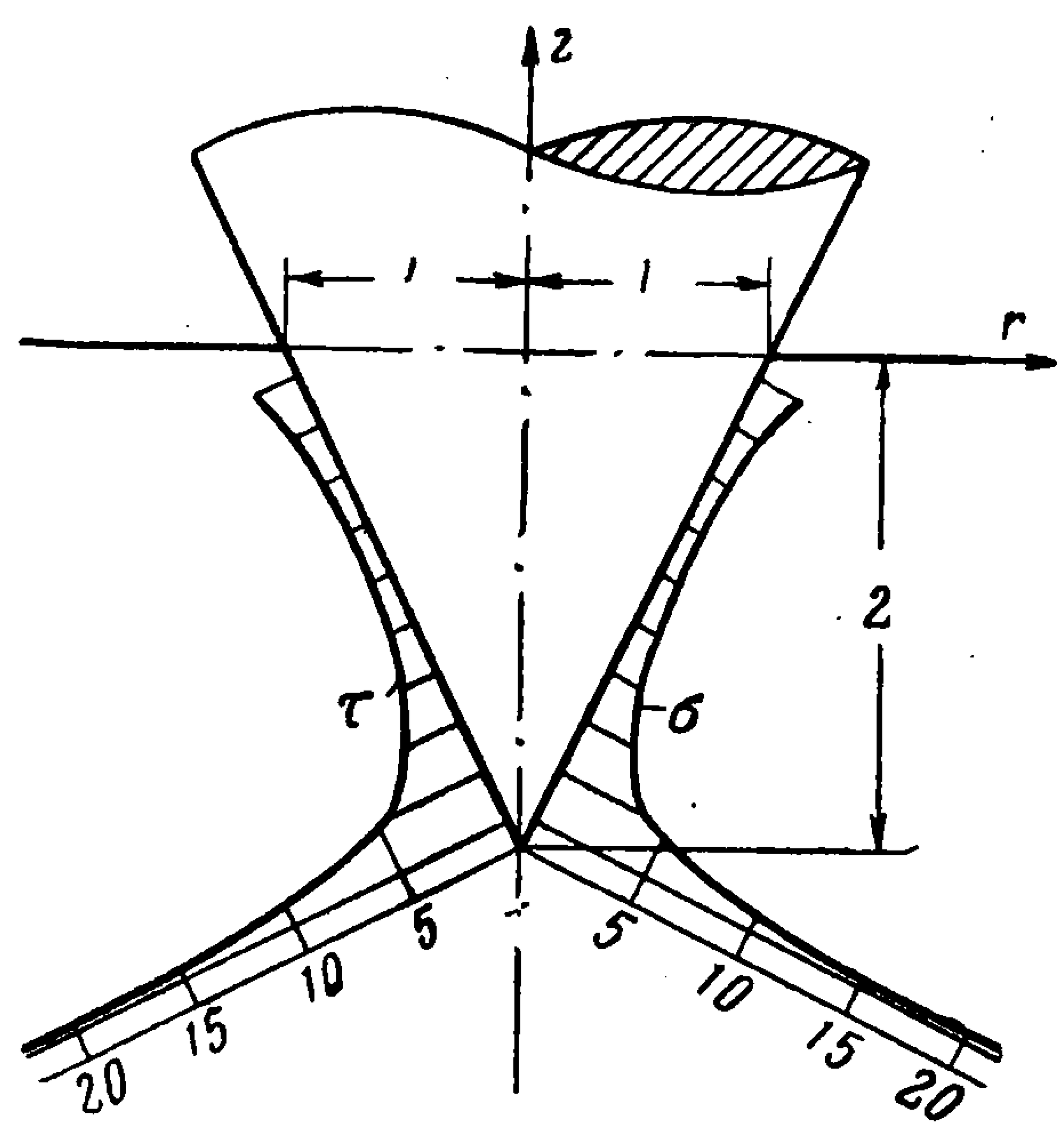
Полагая последовательно $t = t_m$, где $m = 1, 2, \ldots, l-1$, а точка t_m расположена внутри участка σ_m, σ_{m+1}, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно p_n и q_n.

При решении второй основной задачи к этой системе необходимо добавить два уравнения для точек оси симметрии D и D_1. Эти уравнения могут быть получены из (2.4).

При решении первой основной задачи одну из величин p_n можно зафиксировать произвольно.

После того как неизвестные p_n и q_n найдены, напряжения и перемещения внутренних точек тела можно находить по формулам (1.7) и (1.5), в которых необходимо избавиться от производных путем интегрирования по частям.

В качестве примера была решена задача о вдавливании заглубленного конического штампа в упругое полупространство (фиг. 2).



Фиг. 2

Поверхность контакта была разбита на 10 равных участков, для середины каждого участка были записаны условия $2Gw = 1$, $u = 0$. Горизонтальная граница разбивалась на 11 неравных участков; для середин этих участков принималось $Z = \text{const}$, $R = \text{const}$. Точка, лежащая на оси симметрии, не рассматривалась, взамен чего было положено $p_\infty = 0$. На фиг. 2 приведены графики нормальных и касательных напряжений по поверхности контакта, построенные по средним значениям на участках. Равнодействующая этих напряжений получилась равной $1.295\,\pi$.

Поступила 5 VIII 63

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров А. Я. Решение осесимметричных задач теории упругости при помощи зависимостей между осесимметричными и плоскими состояниями. ПММ, 1961, т. 25, вып. 5.
2. Александров А. Я., Соловьев Ю. И. Одна форма решения пространственных осесимметричных задач теории упругости при помощи функций комплексного переменного и решение этих задач для сферы. ПММ, 1962, т. 26, вып. 1.
3. Шерман Д. И. К решению плоской статической задачи теории упругости при заданных на границе смещениях. Докл. АН СССР, 1940, т. 37, № 9.
4. Шерман Д. И. К решению плоской статической задачи теории упругости при заданных внешних силах. Докл. АН СССР, 1940, т. 28, № 1.