ЗАДАЧИ ТИПА БУССИНЕСКА ДЛЯ АНИЗОТРОПНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

В. А. Свекло (Калининград)

§ 1. Исходные соотношения. Рассмотрим уравнения равновесия анизотропной среды при отсутствии массовых сил, выделении переменной z и опускании знака суммирования

$$a_{\tau k}^{pq} \frac{\partial^2 u_\tau}{\partial x^p \partial x^q} + a_{\tau k}^{p3} \frac{\partial^2 u_\tau}{\partial x^p \partial z} + a_{\tau k}^{33} \frac{\partial^2 u_\tau}{\partial z^2} = 0 \qquad \begin{pmatrix} k, \tau = 1, 2, 3 \\ pq = 1, 2 \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

Здесь $a_{\tau k}^{er}$ — упругие постоянные, u_τ — упругие перемещения.

Решение системы уравнений (1.1) построим в форме

$$u_\tau (x^1, x^2, z) = \int_0^{2\pi} u_\tau^* (\xi, z, \lambda)\, d\lambda, \qquad \xi = x^1 \cos \lambda + x^2 \sin \lambda \tag{1.2}$$

По существу здесь используется принцип наложения, сформулированный для волнового уравнения С. Л. Соболевым [1]. Назовем u_τ^* изображением u_τ. Употребляя обычный знак соответствия, получим

$$\frac{\partial^2 u_\tau}{\partial x^p \partial x^q} \doteqdot \alpha_p \alpha_q \frac{\partial^2 u_\tau^*}{\partial \xi^2}, \quad \frac{\partial^2 u_\tau}{\partial x^p \partial z} \doteqdot \alpha_p \frac{\partial^2 u_\tau^*}{\partial \xi \partial z}, \quad \frac{\partial^2 u_\tau}{\partial z^2} \doteqdot \frac{\partial^2 u_\tau^*}{\partial z^2} \qquad \begin{pmatrix} \alpha_1 = \cos \lambda \\ \alpha_2 = \sin \lambda \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

Уравнения (1.1) удовлетворяются, если

$$a_{\tau k}^{pq} \alpha_p \alpha_q \frac{\partial^2 u_\tau^*}{\partial \xi^2} + a_{\tau k}^{p3} \alpha_p \frac{\partial^2 u_\tau^*}{\partial \xi \partial z} + a_{\tau k}^{33} \frac{\partial^2 u_\tau^*}{\partial z^2} = 0 \tag{1.4}$$

Решение этой системы уравнений построим в виде

$$u_\tau^* (\xi, z, \lambda) = f_\tau (\Omega, \lambda), \qquad \Omega = \xi + \nu z \tag{1.5}$$

Получим

$$(a_{\tau k}^{pq} \alpha_p \alpha_q + a_{\tau k}^{p3} \alpha_p \nu + a_{\tau k}^{33} \nu^2) f_\tau'' = 0, \qquad f_\tau'' = \frac{\partial^2 f_\tau}{\partial \Omega^2} \tag{1.6}$$

Отсюда

$$\Delta (\nu) = \| a_{\tau k}^{33} \nu^2 + a_{\tau k}^{p3} \alpha_p \nu + a_{\tau k}^{pq} \alpha_p \alpha_q \| = 0 \tag{1.7}$$

Например, для ортотропного тела

$$\Delta (\nu) = \begin{vmatrix} A\alpha_1^2 + N\alpha_2^2 + M\nu^2 & (N + H)\, \alpha_1 \alpha_2 & (M + G)\, \alpha_1 \nu \\ (N + H)\, \alpha_1 \alpha_2 & N\alpha_1^2 + B\alpha_2^2 + L\nu^2 & (L + F)\, \alpha_2 \nu \\ (M + G)\, \alpha_1 \nu & (L + F)\, \alpha_2 \nu & M\alpha_1^2 + L\alpha_2^2 + C\nu^2 \end{vmatrix} \tag{1.8}$$

Здесь $A, B, C, L, M, N, F, G, H$ — упругие постоянные [2].

Попарно комплексно сопряженные корни уравнения (1.7) предполагаем различными с не обращающимися в нуль мнимыми частями при всех α_p, что требует некоторых ограничений для упругих констант. На выяснении этого вопроса здесь не останавливаемся. При этом вещественное решение уравнений (1.4) запишется в виде

$$u_\tau^* (\xi, z, \lambda) = \operatorname{Re} \Delta_\tau^\rho (\alpha_p)\, \omega_\rho (\xi + \nu_\rho z, \lambda) \tag{1.9}$$

Здесь Δ_τ^ρ — миноры определителя (1.7), соответствующие элементам какой-либо строки, а $\omega_\rho (\Omega_\rho, \lambda)$ — произвольные аналитические в верхней полуплоскости функции, если анизотропная среда заполняет полупространство $z \geqslant 0$.

§ 2. Основные задачи. В первом основной задаче на границе полупространства $z = 0$ задаются напряжения

$$\sigma_z = \Phi_3 (x^1, x^2), \qquad \tau_{zx^k} = \Phi_k (x^1, x^2) \qquad (k = 1, 2) \tag{2.1}$$

где Φ_l — известные функции. При помощи закона Гука легко устанавливается связь между изображениями компонент тензора напряжений и u_τ^*.

Например, для ортотропного тела на границе $z = 0$ получим

$$G\frac{\partial u_1^*}{\partial \xi} + F\alpha_2\frac{\partial u_2^*}{\partial \xi} + C\frac{\partial u_3^*}{\partial z} = \Phi_3^*, \qquad \frac{\partial u_k^*}{\partial z} + \alpha_k\frac{\partial u_3^*}{\partial \xi} = \Phi_k^* \quad (k = 1, 2) \quad (2.2)$$

Здесь Φ_l^* — изображения функций Φ_l. Приходим к следующей задаче: в верхней полуплоскости ξz найти исчезающие на бесконечности аналитические функции ω_ρ по заданным на ее границе $z = 0$ комбинациям (2.2). Она решается весьма просто, если известны Φ_l^*. Подставляя u_τ^* в (2.2), получим

$$\operatorname{Re} D_j^\rho(\alpha_p)\,\omega_\rho'(\xi, \lambda) = \Phi_j^*(\xi, \lambda), \qquad \omega_\rho' = \partial\omega_\rho / \partial\xi \quad (2.3)$$

Здесь D_j^ρ — известные количества. Введем функции

$$\Psi_j(\Omega, \lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Phi_j(t, \lambda)}{t - \Omega}\,dt \qquad (j = 1, 2, 3) \quad (2.4)$$

Равенство (2.3) перепишем в виде

$$D_j^\rho(\alpha_p)\,\omega_\rho'(\xi, \lambda) = \Psi_j^+(\xi, \lambda) \quad (2.5)$$

где Ψ_j^+ — предельные значения функций Ψ_j на границе полуплоскости. Разрешая (2.5) и пользуясь аналитическим продолжением, найдем

$$\omega_\rho'(\Omega_\rho, \lambda) = Q_\rho^j(\alpha_p)\,\Psi_j(\Omega_\rho, \lambda), \qquad \Omega_\rho = \xi + \nu_\rho z \quad (2.6)$$

Определив u_τ^*, при помощи формул перехода (1.2) и в силу теоремы единственности получим решение задачи. Аналогично решается вторая основная задача.

§ 3. **Действие осесимметричной нормальной нагрузки.** Изложенный метод приводит к решению задачи, если известен способ определения изображений от заданных на границе функций. Он легко указывается в рассматриваемом случае. Имеем

$$\sigma_z = \Phi_3(r), \qquad \tau_{zx^k} = 0, \qquad r^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 \qquad (k = 1, 2) \quad (3.1)$$

Поэтому $\Phi_k^* = 0$. Для отыскания Φ_3^* заметим, что если изображение какой-либо функции зависит только от ξ, то функция зависит только от r. Действительно, имеем

$$\int_0^{2\pi}\Phi^*(\xi)\,d\lambda = \int_{-\varphi}^{2\pi-\varphi}\Phi^*(r\cos\lambda)\,d\lambda \qquad \begin{pmatrix} x^1 = r\cos\varphi \\ x^2 = r\sin\varphi \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

Но

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\int_{-\varphi}^{2\pi-\varphi}\Phi^*(r\cos\lambda)\,d\lambda = 0 \quad (3.3)$$

Полагая $\varphi = \pi$, получим

$$\int_0^{2\pi}\Phi^*(\xi)\,d\lambda = 2\int_0^{\pi}\Phi^*(r\cos\lambda)\,d\lambda = \Phi(r) \quad (3.4)$$

Таким образом,

$$\Phi(r) \doteqdot \Phi^*(\xi) \quad (3.5)$$

Полагая $r\cos\lambda = \eta$, запишем

$$\Phi(r) = 2\int_{-r}^{r}\frac{\Phi^*(\eta)\,d\eta}{\sqrt{r^2 - \eta^2}} \quad (3.6)$$

Предположим дополнительно, что $\Phi^*(-\eta) = \Phi^*(\eta)$. Тогда приходим к интегральному уравнению относительно $\Phi^*(\eta)$, которое при помощи подстановки легко сводится к известному уравнению Абеля. Его решение имеет вид

$$\Phi^*(\eta) = \frac{1}{2\pi}\frac{d}{d\eta}\int^{\eta}\frac{\Phi(r)\,r\,dr}{\sqrt{\eta^2 - r^2}} \quad (3.7)$$

Возвращаясь к поставленной задаче, получим

$$\Phi_3^*(\xi) = \frac{1}{2\pi}\frac{d}{d\xi}\int_0^{\xi}\frac{\sigma_z(r)\, r\, dr}{\sqrt{\xi^2 - r^2}}, \qquad \Phi_k^* = 0 \quad (k = 1, 2) \tag{3.8}$$

Соответственно запишем

$$\omega_\rho'(\Omega_\rho, \lambda) = Q_\rho^3(\alpha_p)\,\Psi_3(\Omega_\rho) \tag{3.9}$$

Функция Ψ_3 часто находится совершенно элементарно, как это видно из приведенных ниже примеров.

1. *Нормальная нагрузка, равномерно распределенная по площади круга радиуса R.* Имеем

$$\sigma_z = \begin{cases} P / \pi R^2 & (0 \leqslant r \leqslant R) \\ 0 & (r > R) \end{cases} \tag{3.10}$$

где P — сила давления. Согласно (3.8), получим

$$\Phi_3^*(\xi) = \begin{cases} -\,{}^1\!/_2\, P\pi^{-2}R^{-2}, & |\,\xi\,| < R \\ -\,{}^1\!/_2\, P\pi^{-2}R^{-2}\,[1 - \xi\,(\xi^2 - R^2)^{-1/2}], & |\,\xi\,| > R \end{cases} \tag{3.11}$$

Функция Ψ_3 должна исчезать на бесконечности, и на границе полуплоскости $z = 0$ ее вещественная часть должна совпадать с $\Phi_3^*(\xi)$.

Всем этим требованиям удовлетворяет функция

$$\Psi_3(\Omega) = -\frac{1}{2}\frac{P}{\pi^2}\frac{d}{d\Omega}\frac{1}{\Omega + \sqrt{\Omega^2 - R^2}} \tag{3.12}$$

где под радикалом понимается ветвь, принимающая значение Ω при больших Ω. Устремляя R к нулю, получим $\Psi_3(\Omega)$, которая соответствует действию на анизотропное полупространство нормальной сосредоточенной силы интенсивности P. Запишем решение полностью для случая, когда сила приложена в точке $(x_0^1, x_0^2, 0)$

$$u_\tau = -\frac{P}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\operatorname{Re}\,\Delta_\tau^{\rho} Q_\rho \frac{d\lambda}{\xi - \xi_0 + \nu_p z}, \qquad \xi - \xi_0 = (x^p - x_0^p)\,\alpha_p \tag{3.13}$$

2. *Нормальная нагрузка, равномерно распределенная по площади кольца.* Если R_1 и R_2 — радиусы кольца, то

$$\Psi_3(\Omega) = -\frac{1}{2}\frac{P}{\pi^2}\frac{d}{d\Omega}\frac{1}{\sqrt{\Omega^2 - R_1^2} + \sqrt{\Omega^2 - R_2^2}} \qquad (R_2 > R_1) \tag{3.14}$$

Отсюда, полагая $R_1 = R_2 = R$, выводим функцию Ψ_3 для случая, когда на полупространство действует сосредоточенная нагрузка, равномерно распределенная вдоль окружности радиуса R.

3. *Нормальная нагрузка заданной интенсивности, распределенная по заданной области на плоскости $z = 0$.* Решение строится методом наложения при помощи (3.13).

4. *Нормальная нагрузка вида*

$$\sigma_z = \Phi_3\left(\sqrt{(b / a)(x^1)^2 + (a / b)(x^2)^2}\right), \qquad \tau_{zx^k} = 0 \qquad (k = 1, 2) \tag{3.15}$$

распределенная по площади эллипса с полуосями a и b. В данном случае связь между оригиналом и его изображением установим в форме

$$u_\tau = \int_0^{2\pi} u_\tau^*(\xi, z, \lambda)\, d\lambda, \qquad \xi = l_p \alpha_p x^p, \qquad l_1 = \frac{b}{a}, \qquad l_2 = \frac{a}{b} \tag{3.16}$$

Решение запишется в виде (1.9) и (3.9), где всюду следует произвести замену α_p на $l_p\alpha_p$. Чтобы воспользоваться результатами (3.8), необходимо ввести новые переменные $x_1^p = l_p x^p$ $(p = 1, 2)$. При этом сразу находим функцию Ψ_3 для следующих трех случаев: а) нормальная нагрузка равномерно распределена по площади эллипса, b) по площади эллиптического кольца, ограниченного подобными и подобно расположенными эллипсами, c) нормальная сосредоточенная нагрузка равномерно распределена вдоль эллипса. В случаях (a) и (c) достаточно в соответствующих формулах пунктов 1 и 2 заменить R на $\sqrt{ab}$. В случае (b) необходимо положить $R_2 = \sqrt{ab}$, $R_1 = \tau_0 \sqrt{ab}$, где τ_0 — коэффициент подобия.

§ 4. Трансверсально-изотропное тело. Остановимся на этом более простом случае анизотропии подробнее. Имеем

$$B = A, \qquad G = F, \qquad M = L, \qquad H = A - 2N \tag{4.1}$$

Относящиеся сюда результаты могут быть получены из предыдущего. Однако проще их вывести непосредственно. Положим

$$u^* = \alpha u_0^* + \beta u_3^*, \quad v^* = \beta u_0^* - \alpha u_3^*, \quad u^* = u_1^*, \quad v^* = u_2^*, \quad \alpha = \alpha_1, \quad \beta = \alpha_2 \tag{4.2}$$

Здесь u_0^*, u_3^* — новые неизвестные. Система (1.4) эквивалентна следующей:

$$\begin{aligned} &A \frac{\partial^2 u_0^*}{\partial \xi^2} + L \frac{\partial^2 u_0^*}{\partial z^2} + (L + F) \frac{\partial^2 w^*}{\partial \xi\, \partial z} = 0, \\ &(L + F) \frac{\partial^2 u_0^*}{\partial \xi\, \partial z} + L \frac{\partial^2 w^*}{\partial \xi^2} + C \frac{\partial^2 w^*}{\partial z^2} = 0, \end{aligned} \qquad N \frac{\partial^2 u_3^*}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u_3^*}{\partial z^2} = 0, \tag{4.3}$$

Условия (2.2) принимают вид

$$\begin{aligned} &\alpha L \left(\frac{(\partial u_0^*}{\partial z} + \frac{\partial w^*}{\partial \xi} \right) + \beta L \frac{\partial u_3^*}{\partial z} = \Phi_1 (\xi, \lambda), \\ &\beta L \left(\frac{\partial u_0^*}{\partial z} + \frac{\partial w^*}{\partial \xi} \right) - \alpha L \frac{\partial u_3^*}{\partial z} = \Phi_2 (\xi, \lambda), \end{aligned} \qquad F \frac{\partial u_0^*}{\partial \xi} + C \frac{\partial w^*}{\partial z} = \Phi_3 (\xi, \lambda) \tag{4.4}$$

Если на границе полупространства действует осесимметричная и только нормальная нагрузка, то, как нетрудно показать, $u_3^* \equiv 0$, и задача сводится к определению u_0^*, w^* из первых двух уравнений (4.3). Условия (4.4) запишутся в форме

$$F \frac{\partial u_0^*}{\partial \xi} + C \frac{\partial w^*}{\partial z} = \Phi_3 (\xi), \qquad \frac{\partial u_0^*}{\partial z} + \frac{\partial w^*}{\partial \xi} = 0 \tag{4.5}$$

Указанный выше метод приводит в данном случае к следующему решению задачи:

$$\begin{aligned} u_0^* &= -\operatorname{Re} \frac{L + F}{\Delta} \begin{vmatrix} A - \nu_1^2 F & A - \nu_2^2 F \\ \nu_1 \Psi_3 (\xi + \nu_1 z) & \nu_2 \Psi_3 (\xi + \nu_2 z) \end{vmatrix} \\ w^* &= \operatorname{Re} \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} A - \nu_1^2 F & A - \nu_2^2 F \\ (A + \nu_1^2 L)\, \Psi_3 (\xi + \nu_1 z) & (A + \nu_2^2 L)\, \Psi_3 (\xi + \nu_2 z) \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{4.6}$$

Здесь

$$\Delta = \begin{vmatrix} A - \nu_1^2 F & A - \nu_2^2 F \\ u + CL \nu_1^2 & m + CL \nu_2^2, \end{vmatrix}, \qquad m = CA - F(L + F) \tag{4.7}$$

Корни ν_k находятся из уравнений

$$\begin{vmatrix} A + \nu^2 L & (L + F) \nu \\ (L + F) \nu & L + \nu^2 C \end{vmatrix} = 0 \tag{4.8}$$

При действии сосредоточенной силы в точке $(x_0, y_0, 0)$ получим, предполагая для простоты $\nu_k = i\gamma_k$, $\gamma_k > 0$ $(k = 1, 2)$

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= -\frac{P}{4\pi^2} \frac{L + F}{\Delta_0} \begin{vmatrix} A + \gamma_1^2 F & A + \gamma_2^2 F \\ \gamma_1 J (\xi'; \alpha; \gamma_1) & \gamma_2 J (\xi', \alpha; \gamma_2) \end{vmatrix} \\ v (x, y, z) &= -\frac{P}{4\pi^2} \frac{L + F}{\Delta_0} \begin{vmatrix} A + \gamma_1^2 F & A + \gamma_2^2 F \\ \gamma_1 J (\xi'; \beta; \gamma_1) & \gamma_2 J (\xi'; \beta; \gamma_2) \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{4.9}$$

$$w (x, y, z) = \frac{P}{4\pi^2 \Delta_0} \begin{vmatrix} A + \gamma_1^2 F & A + \gamma_2^2 F \\ (A - \gamma_1^2 L)\, J (\varepsilon'; i; \gamma_1) & (A - \gamma_2^2 L)\, J (\xi'; i; \gamma_2) \end{vmatrix} \tag{4.10}$$

Здесь

$$\Delta_0 = i\Delta, \qquad J (\xi'; \delta; \gamma_k) = \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} \frac{\delta\, d\lambda}{\xi' + i\gamma_k z}, \qquad \xi' = (x - x_0)\, \alpha + (y - y_0)\, \beta \tag{4.11}$$

Имеем

$$J(\xi';\alpha;\gamma_k)=-(2\pi/\rho')T_k(\rho',z)\cos\varphi,\qquad \cos\varphi=(x-x_0)/\rho'$$
$$J(\xi';\beta;\gamma_k)=-(2\pi/\rho')T_k(\rho',z)\sin\varphi,\qquad \sin\varphi=(y-y_0)/\rho' \tag{4.12}$$
$$J(\xi';i,\gamma_k)=(2\pi/\gamma_k)z[1-T_k(\rho',z)],\qquad T_k(\rho',z)=(\rho'^2+\gamma_k^2z^2)^{-1/2}$$

Подставляя (4.12) в (4.9) и (4.10), получаем решение задачи в перемещениях. Подсчитывая напряжения, приходим к известным результатам, найденным иным путем [3]. Переход к изотропному телу осуществим, полагая $C=A=\lambda_0+2\mu_0$, $L+F=\lambda_0+\mu_0$, $L=\mu_0$, где λ_0, μ_0 — постоянные Ламэ. При этом $\gamma_1=\gamma_2=1$. Формулы (4.9), (4.10) приводят к неопределенности, которая легко раскрывается. Получим известное решение Буссинеска [4]

Из формулы (4.10) при $z=0$ находим

$$w(x,y,0)=\frac{P\Delta_1}{2\pi\Delta_0}\frac{1}{\rho}\left(\Delta_1=\begin{vmatrix}A+F\mu_1^2 & A+F\mu_2^2\\ A-L\mu_1^2 & A-L\mu_2^2\end{vmatrix}\right) \tag{4.13}$$

Результат (4.13) позволяет распространить теорию Герца контактной проблемы на случай трансверсально изотропного тела при условии, что тела сжимаются в направлении их общей оси монотропии.

§ 5. Сведение к плоской задаче. Пользуясь (4.2), выводим соотношения для изображений компонент тензора деформаций

$$\varepsilon_x^*=\alpha^2\varepsilon_\xi^*,\qquad \varepsilon_y^*=\beta^2\varepsilon_\xi^*,\qquad \gamma_{xy}^*=2\alpha\beta\varepsilon_\xi^*,\qquad \varepsilon_\xi^*=\frac{\partial u_0^*}{\partial\xi}$$
$$\gamma_{zx}^*=\alpha\gamma_{z\xi}^*,\qquad \gamma_{zy}^*=\beta\gamma_{z\xi}^*,\qquad \gamma_{z\xi}^*=\frac{\partial w^*}{\partial\xi}+\frac{\partial u_0^*}{\partial z},\qquad \varepsilon_z^*=\frac{\partial w^*}{\partial z}$$
$$\varepsilon_\xi^*=\varepsilon_x^*+\varepsilon_y^*=\alpha^2\varepsilon_x^*+\beta^2\varepsilon_y^*+\alpha\beta\gamma_{xy}^* \tag{5.1}$$

Для них же легко выписать в пространстве изображений условия совместности деформаций и показать, что все они будут удовлетворены, если

$$\frac{\partial^2\varepsilon_\xi^*}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_z^*}{\partial\xi^2}=\frac{\partial^2\gamma_{z\xi}^*}{\partial\xi\partial z} \tag{5.2}$$

В том же пространстве можно записать уравнения равновесия для изображений компонент тензора напряжений, а также закон Гука, который получает вид

$$\sigma_x^*=(A-2N\beta^2)\,\xi_\xi^*+F\varepsilon_z^*,\qquad \sigma_z^*=F\varepsilon_\xi^*+C\varepsilon_z^*$$
$$\tau_{zx}^*=L\alpha\gamma_{z\xi}^*,\qquad \sigma_y^*=(A-2N\alpha^2)\,\varepsilon_\xi^*+F\varepsilon_z^* \tag{5.3}$$
$$\tau_{xy}^*=2N\alpha\beta\varepsilon_\xi^*,\qquad \tau_{zy}^*=L\beta\gamma_{z\xi}$$

Легко проверить, что уравнения равновесия удовлетворяются, если

$$\frac{\partial\sigma_\xi}{\partial\xi}+\frac{\partial\tau_{z\xi}}{\partial z}=0,\qquad \frac{\partial\tau_{z\xi}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}=0,\qquad \sigma_\xi=\alpha^2\sigma_x^*+\beta\sigma_y^*+2\alpha\beta\tau_{xy}^* \tag{5.4}$$

При этом

$$\sigma_\xi^*=A\varepsilon_\xi^*+F\varepsilon_z^*,\qquad \sigma_z^*=F\varepsilon_\xi^*+C\varepsilon_z^* \tag{5.5}$$

Таким образом, проблема о действии на трансверсально изотропное полупространство осесимметричной нормальной нагрузки сведена к плоской задаче (5.2), (5.4), (5.5) с известными граничными данными.

Полагая

$$\sigma_\xi^*=\partial^2S^*/\partial z^2,\qquad \sigma_z^*=\partial S^*/\partial\xi^2,\qquad \tau_{z\xi}^*=-\partial^2S^*/\partial\xi\partial z \tag{5.6}$$

при помощи (5.2) и (5.5) выводим

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\nu_1^2\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\right)\left(\frac{\partial^2S^*}{\partial z^2}-\nu_2^2\frac{\partial^2S^*}{\partial\xi^2}\right)=0 \tag{5.7}$$

Здесь ν_k — корни уравнения (4.8). Для изотропной среды получим бигармоническое уравнение. Нетрудно вывести соответствующие зависимости для оригиналов.

Имеем на основании (1.3)

$$\sigma_z = \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2}, \qquad \tau_{zx} = -\frac{\partial^2 S}{\partial z \partial x}, \qquad \tau_{zy} = -\frac{\partial^2 S}{\partial z \partial y} \tag{5.8}$$

где $S(x, y, z)$ соответствует изображению $S^*(\xi, z, \lambda)$. Вместо (5.7) будем иметь

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \nu_1^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\right]\left[\frac{\partial^2 S}{\partial z^2} - \nu_2^2\left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2}\right)\right] = 0 \tag{5.9}$$

Соответственно получим

$$\sigma_x = (1 - 2CD_0)\frac{\partial^2 S}{\partial z^2} + 2FD_0\frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + 2CD_0\frac{\partial^2}{\partial z^2}\int_0^{2\pi} \alpha^2 S^*\, d\lambda$$

$$\sigma_y = (1 - 2CD_0)\frac{\partial^2 S}{\partial z^2} + 2FD_0\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + 2CD_0\frac{\partial^2}{\partial z^2}\int_0^{2\pi} \beta^2 S^*\, d\lambda \tag{5.10}$$

$$\tau_{xy} = -2FD_0\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} + 2CD_0\frac{\partial^2}{\partial z^2}\int_0^{2\pi} \alpha\beta S^* d\lambda, \quad D_0 = \frac{N}{AC - F^2}$$

Если

$$S^* = \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial \xi^2} \tag{5.11}$$

что равносильно замене

$$S(x, y, z) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \tag{5.12}$$

то

$$\int_0^{2\pi} \alpha^2 S^*\, d\lambda = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \qquad \int_0^{2\pi} \beta^2 S^*\, d\lambda = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \qquad \int_0^{2\pi} \alpha\beta S^* d\lambda = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \tag{5.13}$$

и напряжения выразятся через одну функцию Φ, удовлетворяющую уравнению (5.9).

Заметим, что результаты (5.1) — (5.6), а также (5.8), (5.10) — (5.13) остаются в силе и в том случае, когда коэффициенты упругости зависят от z.

В общем случае трансверсально изотропного тела зависимостям (4.2) соответствует представление для оригиналов

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}, \qquad w = \frac{\partial \chi}{\partial z} \tag{5.14}$$

где функция χ введена для удобства. Уравнения равновесия будут удовлетворены, если

$$A\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right) + L\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + (L + F)\frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} = 0$$

$$(L + F)\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right) + L\left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2}\right) + C\frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} = 0 \tag{5.15}$$

$$N\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right) + L\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0$$

Легко показать, что функции φ и χ удовлетворяют уравнению (5.9).

Поступила 11 IV 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Франк Ф., Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. ч. II, гл. XII. ОНТИ, М.— Л., 1937.
2. Ляв А. Математическая теория упругости. ОНТИ, М.— Л., 1937.
3. Лехницкий Л. С. Теория упругости анизотропного тела. Гостехиздат, 1950.
4. Лейбензон Л. С. Курс теории упругости. Гостехиздат, 1947.