Прикладная математика и механика. Том 28, 1964

ОБОБЩЕНИЕ МЕТОДА ФУНКЦИОНАЛЬНО-ИНВАРИАНТНЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛОВ ГАРМОНИЧЕСКОГО И ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЙ, ИМЕЮЩИХ ПРИЛОЖЕНИЕ В МЕХАНИКЕ И ФИЗИКЕ

Ф. С. Чуриков

(Орджоникидзе)

Общие решения уравнений равновесия теории упругости в перемещениях, как известно (см. например [1-6]), выражаются через гармонические функции. Это означает, что интегрирование этих уравнений приводится в конечном счете к интегрированию трехмерного гармонического уравнения. Отсюда следует, что эффективное построение общих форм решений уравнений равновесия Ляме возможно лишь в том случае, если известны общие или, во всяком случае, достаточно широкие классы гармонических функций.

Известно также, что интегрирование динамических уравнений теории упругости [7] и уравнений электродинамики [8] приводится к интегрированию трехмерного волнового уравнения, и поэтому, аналогично предыдущему, для нахождения общих решений этих уравнений необходимы эффективно построенные классы волновых функций.

Метод функционально-инвариантных решений [1], разработанный в работах [9-14], позволяет найти широкие классы гармонических и волновых функций, имеющих разнообразные приложения в теории упругости, электродинамике и других областях.

Ф-метод, развитый первоначально применительно к волновому уравнению, может быть обобщен в различных направлениях. Во-первых, его можно применить к уравнениям другого типа, в частности, к гармоническому уравнению, а во-вторых, этот метод позволяет находить решения, зависящие не только от одного, а от нескольких промежуточных аргументов, каждый из которых является Ф-решением рассматриваемого уравнения.

В данной работе дается обобщение этого метода в виде, пригодном для нахождения интегралов гармонического (§ 1, 2) и волнового (§ 3) уравнений, зависящих не от одного, а от нескольких промежуточных аргументов, каждый из которых является Ф-решением исходного уравнения.

Не нарушая общности, ограничимся рассмотрением лишь тех случаев, когда Ф-решение будет произведением конечного числа функций, каждая из которых зависит либо от одного, либо от двух промежуточных аргументов. Это означает, что для n-мерного гармонического уравнения

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 \Phi\,(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_k{}^2} = 0 \tag{0.1}$$

будем искать Ф-решение в виде

$$\Phi = f_1\,(u_1) \ldots f_m\,(u_m) \tag{0.2}$$

или в виде

$$\Phi = \varphi_1\,(u_1, v_1) \ldots \varphi_m\,(u_m, v_m) \tag{0.3}$$

где $u_k = u_k\,(x_1, \ldots, x_n)$, $v_k = v_k\,(x_1, \ldots, x_n)$, причем некоторые из функций φ_k могут зависеть лишь от одного аргумента.

[1] Метод функционально-инвариантных решений для краткости в дальнейшем будем называть Ф-методом, а решения, полученные этим методом,— Ф-решениями.

Функции f_k, φ_k и u_k, v_k будем считать удовлетворяющими требуемым условиям дифференцируемости соответственно по переменным u_k, v_k и x_k. Простейший случай (0.2), при котором $\Phi = f_1(u_1)$, рассматривался в работах [9-12, 14]. Ниже будут рассмотрены случаи, когда $\Phi = f_1(u_1) f_2(u_2)$ и когда $\Phi = \varphi_1(u_1, v_1)$. Случаи более сложных зависимостей могут быть рассмотрены аналогичным образом.

§ 1. Будем искать решение n-мерного уравнения Лапласа в виде произведения двух функций

$$\Phi = f_1(u) f_2(v) \tag{1.1}$$

каждая из которых зависит от одного промежуточного аргумента, являющегося Φ-решением уравнения (0.1). Подставив (1.1) в (0.1), получим [1]

$$f_2(v) \frac{df_1(u)}{du} \sum \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + f_1(u) \frac{df_2(v)}{dv} \sum \frac{\partial^2 v}{\partial x_k^2} + f_2(v) \frac{d^2 f_1(u)}{du^2} \sum \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 +$$
$$+ f_1(u) \frac{d^2 f_2(v)}{dv^2} \sum \left(\frac{\partial v}{\partial x_k}\right)^2 + 2 \frac{df_1(u)}{du} \frac{df_2(v)}{dv} \sum \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_k} = 0 \tag{1.2}$$

Для того чтобы равенство (1.2) выполнялось тождественно для произвольных функций $f_1(u)$ и $f_2(v)$, следует потребовать, чтобы

$$\sum \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = 0, \qquad \sum \frac{\partial^2 v}{\partial x_k^2} = 0 \tag{1.3}$$

$$\sum \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 = 0, \qquad \sum \left(\frac{\partial v}{\partial x_k}\right)^2 = 0 \tag{1.4}$$

$$\sum \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_k} = 0 \tag{1.5}$$

Заметим, что уравнения (1.4) будут уравнениями характеристик для уравнений (1.3).

Из уравнений (1.3) — (1.5) заключаем, что для того чтобы функции $f_1(u)$ и $f_2(v)$ были Φ-решениями уравнения (0.1), необходимо и достаточно, чтобы аргументы этих функций одновременно удовлетворяли данному уравнению (0.1) и уравнению его характеристик, а также условию (1.5), выражающему ортогональность градиентов этих аргументов.

Условие (1.5), очевидно, отпадает, если ищется Φ-решение, зависящее только от одного аргумента. Поэтому определение Φ-решения, данное в работе [11], будет пригодно только для этого простейшего случая. Вследствие этого метод нахождения Φ-решений, основанный на использовании полного интеграла уравнения характеристик, неприменим в тех случаях, когда Φ-решение является функцией более чем одного промежуточного аргумента.

Рассмотрим простейший случай, когда оба промежуточных аргумента u, v в (1.1) — линейные функции от основных переменных $x_1, \ldots, x_n$. Для этого положим

$$u = \Sigma\, \alpha_k x_k, \qquad v = \Sigma \beta_k x_k \tag{1.6}$$

где α_k, β_k — величины, не зависящие от x_k, которые являются либо постоянными, либо зависят от одного или нескольких параметров.

В этом случае уравнения (1.3) удовлетворяются тождественно, а уравнения (1.4) и (1.5) соответственно будут иметь вид

$$\Sigma \alpha_k^2 = 0, \qquad \Sigma \beta_k^2 = 0, \qquad \Sigma \alpha_k \beta_k = 0 \tag{1.7}$$

[1] Суммирование в равенстве (1.2) и всюду в дальнейшем производится от 1 до n.

Отсюда заключаем, что величины α_k, β_k должны быть подчинены условиям (1.7) для того, чтобы функции u, v, определяемые формулами (1.6), являлись Ф-решениями уравнения (0.1). Из (1.7) очевидно, что все α_k и все β_k не могут иметь отличных от нуля действительных значений, а это значит, что промежуточные аргументы Ф-решений гармонического уравнения всегда являются комплексными. Полагая на этом основании $\alpha_k = a_k + ib_k$, $\beta_k = c_k + id_k$ и подставляя эти значения в (1.7), после приравнивания нулю действительной и мнимой частей в каждом из этих равенств находим

$$\begin{aligned} &\Sigma\,(a_k^2 - b_k^2) = 0, \quad \Sigma\,(c_k^2 - d_k^2) = 0, \quad \Sigma a_k b_k = 0 \\ &\Sigma c_k d_k = 0, \quad \Sigma\,(a_k c_k - b_k d_k) = 0, \quad \Sigma\,(a_k d_k + b_k c_k) = 0 \end{aligned} \tag{1.8}$$

Таким образом, $4n$ действительных величин a_k, b_k, c_k, d_k $(k = 1, \ldots$ $\ldots, n)$ должны удовлетворять системе из шести уравнений (1.8). При всяком $n \geqslant 2$ эта система является неопределенной и, следовательно, имеет бесконечное множество решений, каждому из которых будет соответствовать определенное Ф-решение уравнения (0.1).

Назовем это множество решений первым классом Ф-решений гармонического уравнения.

Укажем некоторые решения уравнения (0.1), принадлежащие к первому классу
1°. Пусть $n = 2$. Тогда при

a_1	b_1	a_2	b_2	c_1	d_1	c_2	d_2
$\cos t_1$	$-\sin t_1$	$-\sin t_1$	$-\cos t_1$	$\cos t_2$	$\sin {}_2$	$\sin t_2$	$-\cos t_2$

уравнения (1.8) удовлетворяются. Следовательно, функции

$$\begin{aligned} u &= (\cos t_1 - i \sin t_1)\, x_1 - (\sin t_1 + i \cos t_1)\, x_2 \\ v &= (\cos t_2 + i \sin t_2)\, x_1 + (\sin t_2 - i \cos t_2)\, x_2 \end{aligned} \tag{1.9}$$

являются Ф-решениями двумерного гармонического уравнения. Произведение произвольных функций от u, v также будет являться Ф-решением этого уравнения.

2°. Пусть все $\beta_k = 0$ и $n = 3$. Тогда система (1.8) удовлетворяется при

	a_1	b_1	a_2	b_2	a_3	b_3
(1)	0	$\cos t_1$	0	$\sin t_1$	1	0
(2)	$\cos t_1$	0	$\sin t_1$	0	0	1
(3)	0	1	$\cos t_1$	0	$\sin t_1$	0

Совокупности значений (1), (2), (3) приводят соответственно к Ф-решениям:

$$\begin{aligned} u_{(1)} &= ix_1 \cos t_1 + ix_2 \sin t_1 + x_3 \\ u_{(2)} &= x_1 \cos t_1 + x_2 \sin t_1 + ix_3 \\ u_{(3)} &= ix_1 + x_2 \cos t_1 + x_3 \sin t_1 \end{aligned} \tag{1.10}$$

3°. Пусть все $\beta_k = 0$, $n = 4$, тогда система (1.8) удовлетворяется при

	a_1	b_1	a_2	b_2	a_3	b_3	a_4	b_4
(1)	$\sin t_1 \cos t_2$	0	$\sin t_1 \sin t_2$	0	$\cos t_1$	0	0	1
(2)	$\cos t_1$	0	$\sin t_1$	0	0	$\cos t_2$	0	$\sin t_2$

Эти значения дают соответственно следующие Ф-решения, зависящие от двух параметров

$$\begin{aligned} u_{(1)} &= x_1 \sin t_1 \cos t_2 + x_2 \sin t_1 \sin t_2 + x_3 \cos t_1 + ix_4 \\ u_{(2)} &= x_1 \cos t_1 + x_2 \sin t_1 + ix_3 \cos t_2 + ix_4 \sin t \end{aligned} \tag{1.11}$$

Заметим, что если найдены какие-либо гармонические функции, зависящие от одного или большего числа параметров, то другие гармонические функции можно получить из них дифференцированием по этим параметрам, либо интегрированием после предварительного умножения их на произвольные функции этих параметров. Интегрированием, например, из (1.10) получаются, в частности, решения Уиттекера, найденные им другим путем и указанные в работе [15], если при этом взять интегралы по параметру t_1 в пределах от 0 до π. Аналогичным путем из (1.11) можно получить следующие решения четырехмерного гармонического уравнения

$$\begin{gathered}\Phi = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f\,(x_1 \sin t_1 \cos t_2 + x_2 \sin t_1 \sin t_2 + x_3 \cos t_1 + i x_4,\ t_1,\ t_2)\, dt_1\, dt_2 \\ \Phi = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f\,(x_1 \cos t_1 + x_2 \sin t_1 + i x_3 \cos t_2 + i x_4 \sin t_2,\ t_1,\ t_2)\, dt_1\, dt_2\end{gathered} \tag{1.12}$$

Здесь f — функция, допускающая дифференцирование под знаком интеграла.

Рассмотрим случай, когда решение n-мерного уравнения Лапласа есть функция, зависящая от двух промежуточных аргументов, каждый из которых является Φ-решением уравнения (0.1). Впервые этот случай другим методом для двумерного гармонического уравнения рассмотрен в работе [16] и для трехмерного уравнения — в работе [17]. Для n-мерного уравнения этот случай был рассмотрен в работе [13], основные результаты которой будут здесь использованы.

§ 2. Будем искать решение n-мерного уравнения Лапласа (0.1) в виде

$$\Phi = \Phi\,(u,\ v) \tag{2.1}$$

где промежуточные аргументы u, v предполагаются функциями координат $x_1, \ldots, x_n$. Вычисляя вторые частные производные от функции Φ по координатам x_k, пользуясь при этом (2.1) и подставляя затем их значения в (0.1), получим

$$A\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2} + 2B\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial u \partial v} + C\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2} + \nabla^2 u\,\frac{\partial\Phi}{\partial u} + \nabla^2 v\,\frac{\partial\Phi}{\partial v} = 0 \tag{2.2}$$

где

$$\begin{gathered}A = \sum\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2, \qquad B = \sum\frac{\partial u}{\partial x_k}\,\frac{\partial v}{\partial x_k}, \qquad C = \sum\left(\frac{\partial v}{\partial x_k}\right)^2 \\ \nabla^2 u = \sum\frac{\partial^2 u}{\partial {x_k}^2}, \qquad \nabla^2 v = \sum\frac{\partial^2 v}{\partial {x_k}^2}\end{gathered} \tag{2.3}$$

Уравнение (2.2) будет выполняться тождественно для произвольной функции $\Phi\,(u,\ v)$, если каждая из сумм, входящих в (2.3), будет равняться нулю. Таким образом, и в этом случае снова приходим к системе уравнений (1.3) — (1.5). Для того чтобы рассмотреть какой-либо интегрируемый случай этой системы, отличный от (1.6), положим, что функции u, v определяются при помощи равенств

$$u = \Sigma\alpha_k x_k + \gamma_0\,(\Sigma {x_k}^2)^{1/2}, \qquad v = \Sigma\beta_k x_k + \gamma\,(\Sigma {x_k}^2)^{1/2} \tag{2.4}$$

где γ_0, γ — произвольные постоянные величины; α_k, β_k имеют тот же смысл, что и в равенствах (1.6). Вычислим коэффициенты A, B, C, $\nabla^2 u$, $\nabla^2 v$ уравнения (2.2) при условии, что u, v определяются при помощи равенств (2.4). Дифференцируя равенства (2.4), находим

$$\sum\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 = \sum{\alpha_k}^2 + 2\gamma_0\,\frac{u}{r} - \gamma_0^2 \qquad (r = (\Sigma {x_k}^2)^{1/2},\ k = 1, 2, \ldots, n) \tag{2.5}$$

Отсюда видно, что, пользуясь произвольностью α_k, γ_0, можно получить более простое выражение для A, положив

$$\Sigma\alpha_k^2 = \gamma_0^2 \tag{2.6}$$

Выполняя аналогичные вычисления, можно показать, что для получения наиболее простых выражений для коэффициентов B и C, пользуясь произвольностью α_k, β_k, γ, следует положить

$$\Sigma\beta_k^2 = \gamma^2, \qquad \Sigma\alpha_k\beta_k = \gamma_0\gamma \tag{2.7}$$

При помощи (2.6) и (2.7) окончательно получим следующие значения для коэффициентов уравнения (2.2):

$$\begin{gathered} A = 2\gamma_0 \frac{u}{r}, \qquad B = \frac{1}{r}(\gamma u + \gamma_0 v), \qquad C = 2\gamma \frac{v}{r} \\ \nabla^2 u = \frac{n-1}{r}\gamma_0, \qquad \nabla^2 v = \frac{n-1}{r}\gamma \end{gathered} \tag{2.8}$$

Подставляя найденные коэффициенты в уравнение (2.2), получим

$$\gamma_0 u \frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2} + (\gamma u + \gamma_0 v)\frac{\partial^2\Phi}{\partial u \partial v} + \gamma v \frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2} + \frac{n-1}{2}\left(\gamma_0 \frac{\partial\Phi}{\partial u} + \gamma \frac{\partial\Phi}{\partial v}\right) = 0 \tag{2.9}$$

Рассмотрим различные случаи, которые здесь могут иметь место.

а) Уравнение (2.9) будет выполняться тождественно, если положить $\gamma_0 = \gamma = 0$. В этом случае функции u, v, как это видно из (2.8), будут удовлетворять уравнению (0.1), а равенства (2.6) и (2.7) обратятся в (1.7). Следовательно, снова приходим к уже рассмотренному первому классу Ф-решений гармонического уравнения.

б) Предположим теперь, что $\gamma_0 \neq 0$, $\gamma \neq 0$. Уравнение характеристик для уравнения (2.9) будет иметь вид

$$\gamma v\, du^2 - (\gamma u + \gamma_0 v)\, du dv + \gamma_0 u dv^2 = 0 \tag{2.10}$$

Оно распадается на два линейных уравнения

$$du / dv = u/v, \qquad du / dv = \gamma_0 / \gamma \tag{2.11}$$

которые определяют при действительных γ_0, γ два семейства действительных характеристик. Интегрируя последние уравнения и обозначая характеристические координаты через ξ, η, находим

$$\xi = \gamma u - \gamma_0 v, \qquad \eta = u / v \tag{2.12}$$

Преобразуя (2.9) к характеристическим координатам, получим

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{n-3}{2\xi}\frac{\partial\Phi}{\partial\eta} = 0 \tag{2.13}$$

Интегрируя последнее уравнение сначала по η, затем по ξ, находим

$$\Phi = \varphi(\xi) + \xi^{(3-n)/2}\psi(\eta) \tag{2.14}$$

где $\varphi(\xi)$, $\psi(\eta)$ — произвольные функции своих аргументов.

Возвращаясь к первоначальным переменным, получим

$$\Phi = \varphi(\gamma u - \gamma_0 v) + (\gamma u - \gamma_0 v)^{(3-n)/2}\psi(u / v) \tag{2.15}$$

Из равенства (2.15) заключаем, что функция $\varphi(\gamma u - \gamma_0 v)$ является Ф-решением уравнения (0.1). Что же касается функции $\psi(u / v)$, то при любом n она не будет Ф-решением гармонического уравнения.

При $n \neq 3$, как видно из уравнения (2.15), произвольная функция $\psi(u/v)$ становится решением уравнения (0.1) лишь после умножения ее на фиксированную функцию

$$(\gamma u - \gamma_0 v)^{(3-n)/2} \tag{2.16}$$

Такое решение, следуя работе [12], будем называть обобщенным Ф-решением уравнения (0.1).

Множество всех Ф-решений и обобщенных Ф-решений, определяемых формулой (2.15), назовем вторым классом Ф-решений гармонического уравнения в n-мерном пространстве.

При $n = 3$ из (2.15) находим интеграл [17]

$$\Phi = \varphi(\gamma u - \gamma_0 v) + \psi(u/v) \tag{2.17}$$

На основании (2.17) заключаем, что только трехмерное уравнение Лапласа имеет два Ф-решения, принадлежащие второму классу.

Положим $\Phi = \Phi(u)$, где u по-прежнему определяется равенством (2.4). Из (2.9) для этого случая находим

$$\frac{d^2\Phi}{du^2} + \frac{n-1}{2u}\frac{d\Phi}{du} = 0 \tag{2.18}$$

Интегрируя последнее уравнение, получим

$$\Phi(u) = C_1 + C_2 u^{(3-n)/2} \tag{2.19}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Решения, определяемые формулой (2.19), не будут Ф-решениями, так как $\Phi(u)$ является фиксированной функцией от u. Рассмотрим более подробно этот случай для трехмерного уравнения. При $n = 3$ интеграл $\Phi(u)$ не определяется из формулы (2.19). Для его определения нужно проинтегрировать (2.18) при $n = 3$; в результате находим

$$\Phi(u) = C_1^{(1)} + C_2^{(1)} \ln u \tag{2.20}$$

где $C_1^{(1)}, C_2^{(1)}$ — произвольные постоянные. Этот интеграл также не будет Ф-решением трехмерного гармонического уравнения.

Интегралы (2.19) и (2.20), которые в дальнейшем будем рассматривать с точностью до произвольных постоянных, будут иметь наиболее простой вид, если положить $\gamma_0 = 1$ и, кроме того, считать, что $\alpha_k = 0$ при $k \neq i$, $\alpha_k = \pm 1$ при $k = i$, где i — любое из фиксированных значений k. В этом случае $u = r \pm x_k$ и интеграл (2.19) будет иметь вид

$$\Phi(u) = (r \pm x_k)^{(3-n)/2} \qquad (n \neq 3) \tag{2.21}$$

где за x_k может быть принята любая из координат. Что же касается интеграла (2.20), то он при этих условиях сводится к известным функциям трехмерного логарифмического потенциала

$$\Phi = \ln(r \pm x_k) \tag{2.22}$$

Отметим, что интеграл (2.19) будет иррациональной функцией u для n четного и рациональной — для n нечетного. Выясним, принадлежат ли к установленным выше классам гармонических функций известные интегралы уравнения (0.1), зависящие только от r, которые с точностью до постоянных имеют вид [18]

$$\Phi(r) = r^{2-n} \quad \text{при } n > 2, \qquad \Phi(r) = \ln\frac{1}{r} \quad \text{при } n = 2 \tag{2.23}$$

Непосредственной проверкой можно показать, что интегралы (2.23), с точностью до постоянных для n нечетного, будут частными производными порядка $(n-1)/2$ по координате x_k от интегралов (2.21) и (2.22). В самом деле [1],

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi}{\partial x_k} &= \frac{\partial}{\partial x_k}\ln(r+x_k) = \frac{1}{r} && \text{при } n=3 \\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_k^2} &= \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\left(\frac{1}{r+x_k}\right) = \frac{1}{r^3} && \text{при } n=5 \\ \frac{\partial^m\Phi}{\partial x_k^m} &= \frac{\partial^m}{\partial x_k^m}\left(\frac{1}{(r+x_k)^{m-1}}\right) = \frac{1}{r^{2m-1}} && \text{при } n=2m+1 \end{aligned} \tag{2.24}$$

Для пространств четного числа измерений интегралы, зависящие от r, не получаются таким путем, и, следовательно, если они содержатся в установленных выше классах гармонических функций, то должны принадлежать первому классу. Для некоторых четных n это действительно имеет место. Так, например, при $n = 2$ имеем

$$\Phi(r) = \ln\frac{1}{r} = \ln\frac{1}{[(x_1+ix_2)(x_1-ix_2)]^{1/2}} = -\frac{1}{2}[\ln(x_1+ix_2)+\ln(x_1-ix_2)] \tag{2.25}$$

Из этого равенства заключаем, что функция $\ln(1/r)$ принадлежит первому классу Ф-решений.

При $n = 4$ из (2.23) имеем

$$\Phi(r) = \frac{1}{r^2} = \frac{1}{u\bar{u}+v\bar{v}} \tag{2.26}$$

где

$$u = x_1\cos t_1 + x_2\sin t_1 + i(x_3\cos t_2 + x_4\sin t_2)$$
$$v = x_1\sin t_1 - x_2\cos t_1 + i(x_3\sin t_2 - x_4\cos t_2)$$

а переменные $\bar{u}, \bar{v}$ отличаются соответственно от переменных u, v знаком при мнимой части. Так как $u, \bar{u}, v, \bar{v}$ являются Ф-решениями четырехмерного гармонического уравнения, принадлежащими первому классу, то из (2.26) вытекает, что $1/r^2$ также принадлежит этому классу.

Отметим, что если бы искать решения не в виде (1.1) и (2.1), а соответственно, например, в виде

$$\Phi = f_1(u)\, f_2(v)\, f_3(w), \qquad \Phi = f(u, v, w) \tag{2.27}$$

то в этих случаях каждый из аргументов u, v, w будет удовлетворять, кроме исходного уравнения и уравнения характеристики, еще трем уравнениям, выражающим условия попарной ортогональности их градиентов. Можно непосредственным вычислением показать, что увеличение числа промежуточных аргументов, а следовательно, и числа функций в правых частях равенств (2.27) не приведет к появлению новых условий, необходимых и достаточных для того, чтобы эти аргументы и функции являлись Ф-решениями уравнения (0.1). На основании (1.3) — (1.5) заключаем, что

---

[1] При вычислении производных от интегралов (2.21) и (2.22) опущен минус перед x_k, что несущественно, так как соответствующие производные от $\Phi(u)$ равны интегралам (2.23) при n нечетном лишь с точностью до аддитивной и мультипликативной постоянных.

определение Ф-решения как решения, удовлетворяющего данному уравнению и уравнению его характеристик, которое использовалось в работах [11, 14], не может быть обобщено для тех случаев, когда эти решения являются функциями более чем одного промежуточного аргумента. В этих последних случаях, кроме указанных двух условий, градиенты промежуточных аргументов должны удовлетворять также условиям попарной ортогональности.

§ 3. Волновое уравнение в n — 1-мерном пространстве

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial^2 \Phi\,(x_1, \ldots, x_{n-1})}{\partial x_k^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \tag{3.1}$$

при помощи подстановки $x_n = ict$ преобразуется в n-мерное уравнение Лапласа, имеющее вид (0.1). Используя результаты предыдущего параграфа, приведем примеры Ф-решений уравнения (3.1).Отметим,что для волнового уравнения система уравнений (1.7) может иметь действительные решения.

При помощи первой из формул (1.12) путем замены $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $x_4 = ict$ находим решение трехмерного волнового уравнения, полученное другим методом Уиттекером [15]

$$\Phi = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\,(x \sin t_1 \cos t_2 + y \sin t_1 \sin t_2 + z \cos t_1 - ct, t_1, t_2)\, dt_1\, dt_2 \tag{3.2}$$

Умножая первое из решений (1.11) на $\sin t_1$ и интегрируя по параметрам в пределах от 0 до 2π и от 0 до π, получим интеграл

$$\Phi = \int_0^{\pi}\int_0^{\pi} f\,(x \sin t_1 \cos t_2 + y \sin t_1 \sin t_2 + z \cos t - ct, t_1, t_2) \sin t_1\, dt_1\, dt_2 \tag{3.3}$$

который также был найден Уиттекером [15] и использован Дебаем для изучения световых волн вблизи фокуса [8 .

Отметим, что интегралы (3.2) и (3.3) будут оставаться волновыми функциями и при других пределах интегрирования, как постоянных, так и зависящих от одного из параметров. Свойства Ф-решений позволяют, например, в качестве пределов интегрирования одного из повторных интегралов взять 0 и θ, где θ определяется из уравнени

$$x \sin \theta \cos t_2 + y \sin \theta \sin t_2 + z \cos \theta - ct = F\,(\theta) \tag{3.4}$$

где $F\,(\theta)$ — произвольная функция.

При помощи (1.11) можно получить также следующий интеграл трехмерного волнового уравнения

$$\Phi = \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{2\pi} \exp\,[ik\,(x \sin t_1 \cos t_2 + y \sin t_1 \sin t_2 + z \cos t_1 - ct)]\, f\,(t_1, t_2)\, dt_1\, dt_2 \tag{3.5}$$

Аналогично можно показать, что решения, используемые в теории распространения волн Рэлея [7], а также решения, полученные в работе [11], также находятся из первого класса гармонических функций при помощи подстановки $x_n = i\,ct$.

Найденные классы Ф-решений гармонического и волнового уравнений не будут, разумеется, их общими решениями. Так, например, известная волновая функция Эйлера [8]

$$\Phi = r^{-1} \sin\,(r - ct) \qquad (r^2 = x^2 + y^2 + z^2) \tag{3.6}$$

а также обобщенные эйлеровские волновые функции

$$\Phi = r^{-1} f\,(r \pm ct) \tag{3.7}$$

(где f — произвольная функция) не принадлежат ни первому, ни второму классу полученных Ф-решений. Не будут, очевидно, принадлежать к этому классу и все волновые функции, которые получаются из эйлеровских путем допустимых преобразований.

Укажем, что к числу допустимых преобразований над волновыми (гармоническими) функциями, в результате выполнения которых снова получаются волновые (гармонические) функции, относятся: суммирование, дифференцирование по координатам $x_1, \ldots, x_{n-1}, t$, а также произвольное ортогональное преобразование прямоугольных осей координат, относительно которого волновое (гармоническое) уравнение ковариантно. К числу допустимых преобразований, относится также интегрирование по параметрам, от которых зависит волновая функция с предварительным умножением ее на произвольные функции этих параметров.

В заключение отметим, что обобщенный метод Ф-решений, так же как и другие методы, позволяет эффективно построить лишь некоторые частные классы гармонических и волновых функций. Поэтому (имея в виду, что общие решения уравнений равновесия и движения теории упругости выражаются через эти функции) можно утверждать, что эффективное построение общих решений уравнений теории упругости пока не представляется возможным. Однако найденные классы гармонических и волновых функций будут достаточно широкими в том смысле, что среди этих классов оказывается возможным находить решения задач, имеющих прикладное значение.

Поступила 16 IV 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Папкович П. Ф. Выражение общего интеграла основных уравнений теории упругости через гармонические функции. Изв. АН СССР. Сер. физ.-мет., 1932, № 10.
2. Гродский Г. Д. Интегрирование общих уравнений теории упругости с помощью потенциалов и гармонических функций. Изв. матем., естеств. н., 1935, № 4.
3. Чуриков Ф. С. Об одной форме общего решения уравнений равновесия теории упругости в перемещениях. ПММ, 1953, т. 17, вып. 6.
4. Слободянский М. Г. Общие формы решений уравнений теории упругости для односвязных и многосвязных областей, выражаемые через гармонические функции. ПММ, 1954, т. 18, вып. 1.
5. Блох В. И. О представлении общего решения основных уравнений статистической теории упругости изотопного тела при помощи гармонических функций, ПММ, 1958, т. 22, вып. 4.
6. Деев В. М. О формах общего решения пространственной задачи теории упругости, выраженных при помощи гармонических функций. ПММ, 1959, т. 23, вып. 6.
7. Соболев С. Л. Некоторые вопросы теории распространения колебаний. В кн. Франк Ф., Мисес Р. «Дифференциальные уравнения математической физики». ОНТИ. М.— Л., 1937.
8. Bateman H. The mathematical analysis of elektrical and optical wave — motion on the basis Maxwell equations. Dover Publ. Inc., 1955 (русск. перев. Физматгиз. М., 1958).
9. Смирнов В. И., Соболев С. Л. Новый метод решения плоской задачи упругих колебаний. Тр. сейсмич. ин-та АН СССР, 1932, № 20.
10. Соболев С. Л. Функционально-инвариантные решения волнового уравнения. Тр. физ. мат. ин-та им. Стеклова АН СССР, 1934, т. 5.
11. Еругин Н. П. О функционально-инвариантных решениях. Уч. зап. ЛГУ, сер. мат., 1948, вып. 15.
12. Еругин Н. П. Функционально-инвариантные решения уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными. Уч. зап. ЛГУ, сер. мат., 1949, вып. 16.
13. Чуриков Ф. С. О функциональных решениях уравнения Лапласа в n-мерном пространстве. Уч. зап. Северо-Осетинского педагогического ин-та, 1957, 21, вып. 1.
14. Галонен Л. М. О функционально-инвариантных решениях волнового уравнения в n-мерной области. Изв. АН СССР, Сер. физ.-мат., 1957, т. 21, № 1.
15. Уиттекер Е. Т., Ватсон Г. Н. Курс современного анализа, ч. 2, Гостехтеоретиздат. М., 1934.
16. Савин С. А. Об одном интеграле двумерного уравнения Лапласа. ПММ, 1951, 15, вып. 3.
17. Савин С. А. Образование интегралов трехмерного уравнения Лапласа при помощи функции от четырехчленных аргументов. ПММ, 1951, т. 15, вып. 5.
18. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики, т. 2. Гостехтеоретиздат. М., 1951.