

## АВТОМОДЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ТРЕЩИН КАСАТЕЛЬНОГО РАЗРЫВА

Б. В. Костров

(Москва)

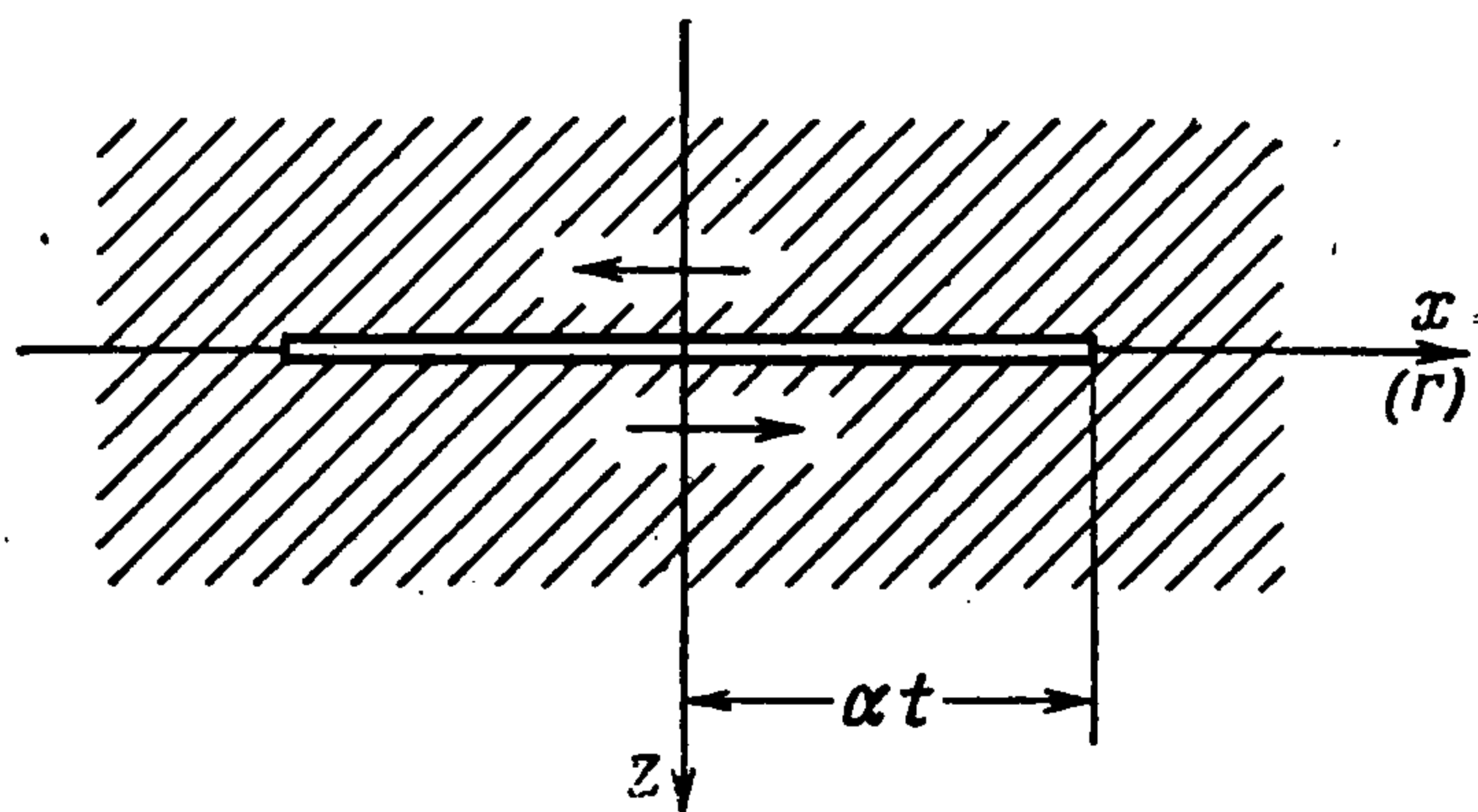
Рассматриваются плоская и пространственная задачи о неустановившемся распространении трещины в среде, подвергнутой однородному сдвигу. Плоская задача вполне аналогична задаче Броберга [1] о трещине нормального разрыва, но решается значительно более простым методом. Совместное исследование плоского и пространственного случаев имеет также то преимущество, что ряд промежуточных результатов плоской задачи представляют основу решения в пространственном случае.

Осесимметричная задача о распространении трещины нормального разрыва (пространственный аналог задачи Броберга) решена автором в работе [2]. В отличие от этой задачи, задача, решаемая в настоящей работе, не будет осесимметричной, но некоторое обобщение метода, примененного в работе [2], позволяет построить точное решение рассматриваемой задачи. При этом предполагается, что поверхность трещины имеет форму круглого диска, т.е. скорость распространения трещины не зависит от направления. Показано, что последнее предположение, вообще говоря, не осуществляется, но можно указать такую величину начального напряжения, при которой оно будет справедливо. При всех других значениях начального напряжения полученное решение может рассматриваться как приближенное.

1. Постановка задач. а) *Плоский случай.* Однородная и изотропная упругая среда с модулем сдвига  $\mu$  и скоростями распространения продольных и поперечных волн  $a$  и  $b$  заполняет безграничное пространство и при  $t < 0$  находится в состоянии однородного сдвига, так что отлична от нуля только одна компонента тензора напряжения  $\tau_{xz}^0 = \tau^0$ . В момент времени  $t = 0$  вдоль оси  $y$  образуется трещина, которая затем распространяется в плоскости  $z = 0$ , так что возникающие при этом упругие возмущения не зависят от координаты  $y$  и поляризованы в плоскости  $xz$ . Скорость распространения трещины предполагается постоянной и обозначается  $\alpha$ . Расположение трещины показано на фиг. 1. На поверхности трещины должны исчезать касательные напряжения, т.е. возмущения, порождаемые развитием трещины, должны удовлетворять условию

$$\tau_{xz} = -\tau^0 \quad \text{при } z = 0, \quad |x| \leq \alpha t$$

Можно показать, что вектор смещения в возмущении должен быть антисимметричен относительно плоскости  $z = 0$ . При этом касательное



Фиг. 1

смещение и нормальное напряжение оказываются нечетными функциями  $z$ , отсюда следуют граничные условия при  $z = 0$

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= -\tau^0 && \text{при } z = 0, |x| < \alpha t \\ \sigma_z &= 0 && \text{при } z = 0, -\infty < x < \infty \\ u_x &= 0 && \text{при } z = 0, |x| > \alpha t \end{aligned} \quad (1.1)$$

Так как трещина и связанные с ней упругие возмущения отсутствуют при  $t \leq 0$ , то начальные условия имеют вид ( $\mathbf{u} = \{u_x, u_z\}$  — вектор смещения)

$$\mathbf{u} = 0, \quad \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{v} = 0 \quad \text{при } t = 0$$

Здесь точкой обозначена производная по времени.

Кроме граничных и начальных условий, нужно еще наложить условие на поведение решения в окрестности края трещины. Как и в случае трещины нормального разрыва, предположим, что край трещины окружен областью, в которой происходит пластическая деформация среды и размеры которой растут с постоянной скоростью, пропорциональной скорости распространения трещины  $\alpha$ , но всегда остаются много меньше размера самой трещины, так что эту пластическую область можно считать бесконечно малой. Предположим также, что работа, затрачиваемая на образование трещины, пропорциональна объему пластической области, так что соответствующую мощность можно записать в виде

$$w = 2\alpha^2 t C \quad (1.2)$$

где  $C$  — постоянная, не зависящая от  $\alpha$ . Эта мощность должна быть равна потоку энергии через поверхность, окружающую края трещины и находящуюся от них на бесконечно малом расстоянии. Отсюда получаем требуемое условие в виде

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{l_\delta} \mathbf{t}_n \mathbf{v} \, dl = \alpha^2 t C \quad (1.3)$$

Здесь контур  $l_\delta$  охватывает один из краев трещины и отстоит от него на расстояние  $\delta$ .

Из (1.3) следует, в частности, что компоненты напряжения и скорости должны расти с приближением к краю трещины как  $\delta^{-1/2}$ . Нетрудно заметить, что компоненты напряжения и скорости суть однородные функции координат и времени нулевого измерения. Следовательно, вблизи края трещины они пропорциональны  $\sqrt{t/\delta}$ .

Физически ясно, что упомянутая пластическая область должна со временем достигнуть некоторого стационарного размера. Тогда в (1.3) правая часть станет постоянной (а не пропорциональной времени), так что напряжения в окрестности края трещины должны со временем стать пропорциональными  $\sqrt{1/\delta}$ , а не  $\sqrt{t/\delta}$ , т. е. должна нарушиться автомодельность задачи или, иначе говоря, — предположение о постоянстве скорости распространения трещины. Таким образом, описанная постановка задачи пригодна лишь для начального периода развития трещины.]

б) *Пространственный случай.* Начальное напряженное состояние среды такое же, как и в плоском случае, но распространение трещины теперь начинается из начала координат. Предполагается, что скорость распространения трещины постоянна и не зависит от направления, так что поверхность трещины при  $t > 0$  определяется соотношениями

$$z = 0, \quad 0 \leq r < \alpha t$$

в цилиндрических координатах  $r, \varphi, z$ . Совершенно так же, как в плоском случае, сводим рассматриваемую задачу к граничной задаче для полупространства  $z \geq 0$  с граничными условиями

$$\begin{aligned} \tau_{rz} &= -\tau^0 \cos \varphi, & \tau_{\varphi z} &= \tau^0 \sin \varphi & \text{при } z=0, r < \alpha t \\ \sigma_z &= 0 & \text{при } z=0, 0 \leq r < \infty; & u_r = u_\varphi = 0; & \text{при } z=0, r > \alpha t \end{aligned} \quad (1.4)$$

и начальными условиями

$$\mathbf{u} = 0 \quad \mathbf{u}' \equiv \mathbf{v} = 0, \quad \text{при } t = 0 \quad (1.5)$$

Дополнительное условие запишем в виде

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{S_\delta} t_n \mathbf{v} dS = 2\pi \alpha^3 t^2 C \quad (1.6)$$

где  $S_\delta$  — тороидальная поверхность, окружающая край трещины и отстоящая от него на расстояние  $\delta$ .

Все замечания, сделанные для плоской задачи, сохраняют силу и для пространственного случая, но теперь появляется еще одно обстоятельство. Строго говоря, условие (1.6) должно быть сформулировано для окрестности каждой точки края трещины, но тогда оказывается, что в общем случае скорость  $\alpha$ , определяемая из такого условия, зависит от направления, т. е. форма трещины должна отличаться от круговой. К сожалению, в настоящее время неизвестен метод решения задачи для случая, когда край трещины представляет собой произвольную кривую. Таким образом, из условия (1.6) получается некоторое эффективное значение скорости распространения трещины. Следует подчеркнуть, что хотя для выяснения формы края трещины задача в такой постановке непригодна, ее решение должно давать правильное описание поля упругих волн на больших расстояниях от трещины, что имеет основное значение для применения этого решения в сейсмологии. В конце п. 4 будет указано значение начального напряжения, при котором форма трещины будет круговой, если даже потребовать локального выполнения дополнительного условия (при этом значении начального напряжения подынтегральное выражение в (1.6) не зависит от угла  $\varphi$ ).

**2. Функционально-инвариантные решения.** В обеих поставленных задачах компоненты тензора напряжения и вектора скорости являются однородными функциями координат и времени нулевого измерения. Это позволяет использовать метод функционально-инвариантных решений Смирнова — Соболева<sup>1</sup>. Пользуясь этим методом, легко построить решение плоской задачи для полупространства  $z \geq 0$  с вектором смещения, поляризованным в плоскости  $xz$ , удовлетворяющее на границе условию

$$\sigma_z = 0 \quad \text{при } z = 0, -\infty < x < \infty \quad (2.1)$$

Опуская подробности, выпишем это решение

$$\begin{aligned} u_x' \equiv v_x &= v_x^{(1)} + v_x^{(2)}, & v_x^{(1,2)} &= \operatorname{Re} V_x^{(1,2)}(\vartheta^{(1,2)}) \\ u_z' \equiv v_z &= v_z^{(1)} + v_z^{(2)}, & v_z^{(1,2)} &= \operatorname{Re} V_z^{(1,2)}(\vartheta^{(1,2)}) \\ \sigma_z &= \sigma_z^{(1)} + \sigma_z^{(2)}, & \sigma_z^{(1,2)} &= \operatorname{Re} \Sigma_z^{(1,2)}(\vartheta^{(1,2)}) \\ \tau_{xz} &= \tau_{xz}^{(1)} + \tau_{xz}^{(2)}, & \tau_{xz}^{(1,2)} &= \operatorname{Re} T_{xz}^{(1,2)}(\vartheta^{(1,2)}) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь  $\vartheta^{(1)}$  и  $\vartheta^{(2)}$  определяются из уравнений

$$\delta^{(1)} \equiv t - \vartheta^{(1)}x - z\sqrt{a^{-2} - \vartheta^{(1)2}} = 0, \quad \delta^{(2)} \equiv t - \vartheta^{(2)}x - z\sqrt{b^{-2} - \vartheta^{(2)2}} = 0 \quad (2.3)$$

<sup>1</sup> См. гл. XII в русском переводе книги [3].

а функции, стоящие в (2.2) под знаком действительной части, выражаются через единственную неизвестную функцию  $V(\vartheta)$  соотношениями

$$V_x^{(1)'}(\vartheta) = 2b^2\vartheta^2 V'(\vartheta), \quad V_x^{(2)'}(\vartheta) = (1 - 2b^2\vartheta^2) V'(\vartheta) \quad (2.4)$$

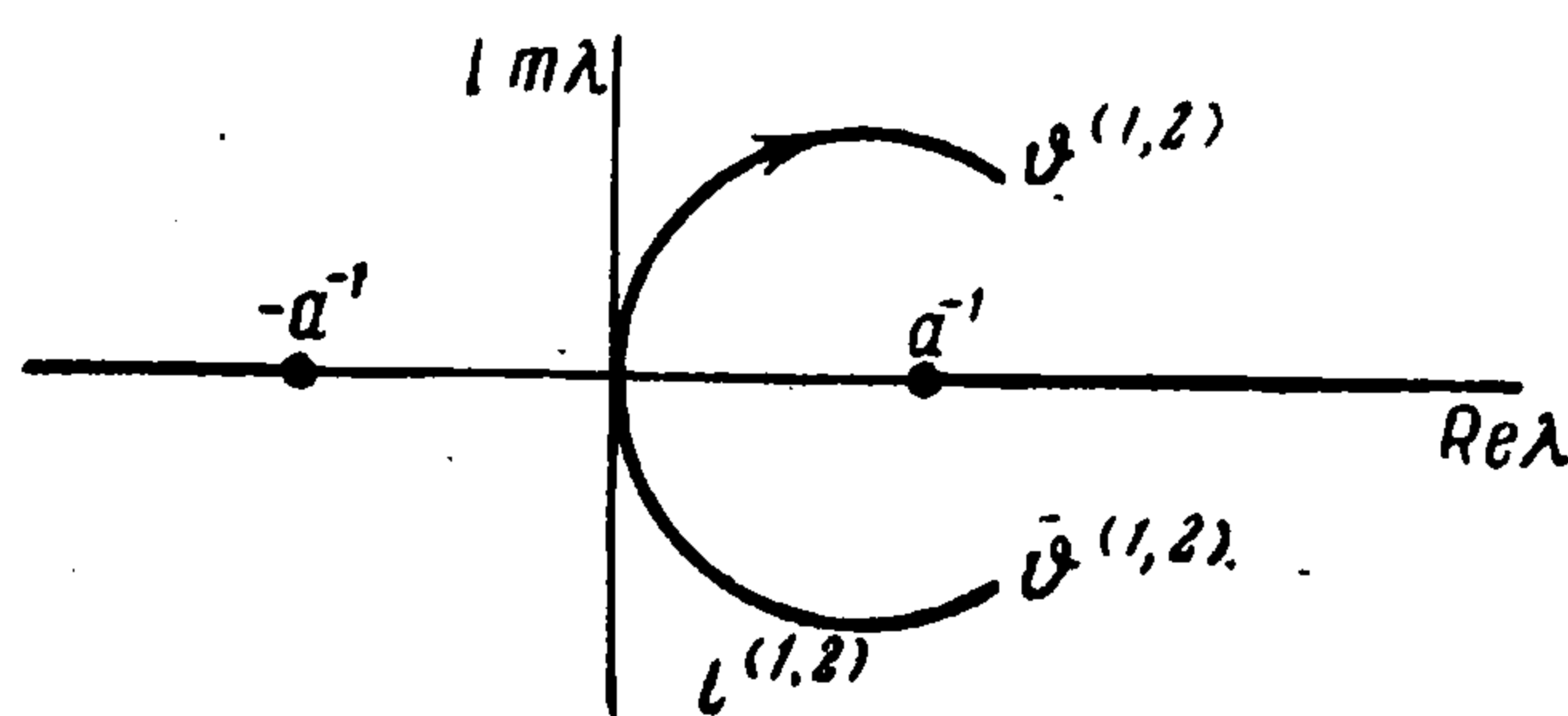
$$V_z^{(1)'}(\vartheta) = 2b^2\vartheta \sqrt{a^{-2} - \vartheta^2} V'(\vartheta)$$

$$V_z^{(2)'}(\vartheta) = -\vartheta (1 - 2b^2\vartheta^2) (b^{-2} - \vartheta^2)^{-1/2} V'(\vartheta)$$

$$T_{xz}^{(1)'}(\vartheta) = -4\mu b^2\vartheta^2 \sqrt{a^{-2} - \vartheta^2} V'(\vartheta), \quad T_{xz}^{(2)'}(\vartheta) = \frac{-4\mu b^2(\vartheta^2 - 1/2 b^{-2})^2}{\sqrt{b^{-2} - \vartheta^2}} V'(\vartheta)$$

$$\Sigma_z^{(1)'}(\vartheta) = -\Sigma_z^{(2)'}(\vartheta) = -2\mu\vartheta (1 - 2b^2\vartheta^2) V'(\vartheta)$$

При построении решения пространственной задачи потребуется еще одно решение плоской задачи, в котором вектор смещения параллелен оси  $y$ . Это решение определяется соотношениями



Фиг. 2

$$u_y \equiv v_y = v_y^{(2)}, \quad v_y^{(2)} = \operatorname{Re} V_1(\vartheta^{(2)})$$

$$\tau_{yz} = \tau_{yz}^{(2)}, \quad \tau_{yz}^{(2)} = \operatorname{Re} T_{yz}^{(2)}(\vartheta^{(2)}) \quad (2.5)$$

$$T_{yz}^{(2)'}(\vartheta) = -\mu_1 \sqrt{b^{-2} - \vartheta^2} V_1'(\vartheta)$$

В формулах (2.2) и (2.5) вместо действительных можно брать мнимые части соответствующих функций.

**3. Решение плоской задачи.** Соотношения предыдущего пункта выражают производные искомых функций через производную функции  $V(\vartheta)$ . Их первообразные должны определяться так, чтобы были выполнены начальные условия. Легко видеть, что для этого интегрирование должно проводиться по контурам, показанным на фиг. 2, так что

$$v_x^{(1)} = \frac{1}{2i} \int_{l^{(1)}} V_x^{(1)'}(\lambda) d\lambda = -ib^2 \int_{l^{(1)}} \lambda^2 V'(\lambda) d\lambda \quad (3.1)$$

$$v_x^{(2)} = \frac{1}{2i} \int_{l^{(2)}} V_x^{(2)'}(\lambda) d\lambda = \frac{1}{2i} \int_{l^{(2)}} (1 - 2b^2\lambda^2) V'(\lambda) d\lambda \quad \text{и т. д.}$$

Начальные условия будут выполнены, если потребовать, чтобы  $V'(\lambda)$  была регулярна при  $-a^{-1} < \operatorname{Re} \lambda < a^{-1}$ , и униформизовать радикалы  $\sqrt{a^{-2} - \lambda^2}$  и  $\sqrt{b^{-2} - \lambda^2}$ , чтобы они были положительны при  $\lambda = 0$ , проведя разрезы от  $-a^{-1}$  до  $-\infty$  и от  $a^{-1}$  до  $\infty$  вдоль действительной оси.

При  $z = 0$  функции  $\vartheta^{(1)}$  и  $\vartheta^{(2)}$  принимают одинаковые значения  $\vartheta^{(1)} = \vartheta^{(2)} = \vartheta \equiv t/x$ , и в результате получим

$$v_x = \frac{1}{2i} \int_l V'(\lambda) d\lambda, \quad \tau_{xz} = 2i\mu b^2 \int_l \frac{R(\lambda^2)}{\sqrt{b^{-2} - \lambda^2}} V'(\lambda) d\lambda \quad \text{при } z = 0 \quad (3.2)$$

где  $l$  — контур, показанный на фиг. 3, а

$$R(\lambda^2) = (\lambda^2 - 1/2 b^{-2})^2 + \lambda^2 \sqrt{a^{-2} - \lambda^2} \sqrt{b^{-2} - \lambda^2}$$

Выражения (3.2) должны удовлетворять условиям (1.1). Анализируя (3.2), из этих условий и требуемого поведения решения в окрестности края трещины получим

$$V'(\lambda) = \frac{A}{(\alpha^{-2} - \lambda^2)^{3/2}} \quad \text{при } 0 < \alpha < c \quad (3.3)$$

$$V'(\lambda) = \frac{A}{(\alpha^{-2} - \lambda^2)^{3/2}} + \frac{B}{(c^{-2} - \lambda^2)(\alpha^{-2} - \lambda^2)^{1/2}} \quad \text{при } c < \alpha < b \quad (3.4)$$

Здесь  $c$  — скорость волн Релея ( $R(c^{-2}) = 0$ ). В случае  $b < \alpha < a$  можно убедиться, что решения, имеющего необходимый порядок роста вблизи края трещины, не существует. Можно показать, что интеграл в правой части (1.3) в случае  $c < \alpha < b$  оказывается отрицательным, т. е. дополнительное условие в этом случае не может быть выполнено. В дальнейшем будем считать  $\alpha < c$ . При помощи (3.3) из первого выражения (3.2) получаем смещение берегов трещины

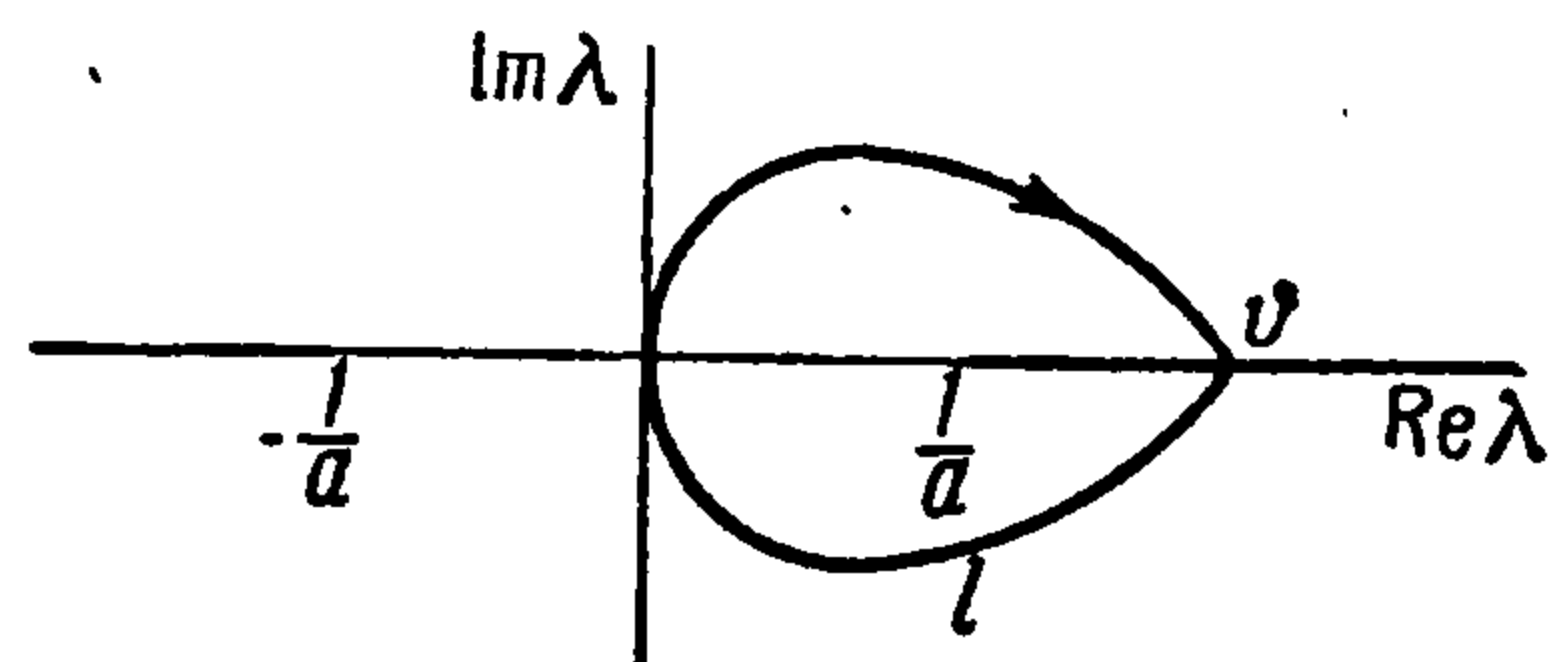
$$u_x = \alpha A \sqrt{\alpha^2 t^2 - x^2} \quad \text{при } z = 0, |x| < \alpha t \quad (3.5)$$

Второе из соотношений (3.2) дает уравнение для определения  $A$ . Для этого при  $|\vartheta| < \alpha^{-1}$  деформируем контур  $l$  так, чтобы он совпал с мнимой осью, что можно сделать, так как подынтегральное выражение регулярно вне разрезов от  $\pm a^{-1}$  до  $\pm a^{-1}$  и убывает достаточно быстро на бесконечности. Тогда из (1.1) и (3.2) следует

$$\tau^\circ = 4\mu b^2 A \int_0^\infty \frac{(\lambda^2 + 1/2 b^{-2})^2 - \lambda^2 \sqrt{a^{-2} + \lambda^2} \sqrt{b^{-2} + \lambda^2}}{\sqrt{b^{-2} + \lambda^2} (\alpha^{-2} + \lambda^2)^{3/2}} d\lambda$$

Обозначим интеграл в этой формуле через  $I(\alpha)$ . Тогда

$$A = \frac{\tau^\circ}{4\mu b^2 I(\alpha)} \quad (3.6)$$



Фиг. 3

Остается исследовать поведение решения вблизи края трещины и выполнить дополнительное условие (1.3). Когда точка  $(x, z)$  стремится к краю трещины, концы контуров  $l^{(1)}$  и  $l^{(2)}$  приближаются к точке  $\lambda = \alpha^{-1}$  (при стремлении к правому краю трещины). При этом методом Лапласа легко получить первые члены асимптотических разложений компонент скорости и напряжения в виде

$$\begin{aligned} v_x^{(1)} &\approx 2b^2 A (\alpha t / 2\delta)^{1/2} \operatorname{Im} f^{(1)}(\psi), & v_x^{(2)} &\approx (\alpha^2 - 2b^2) (\alpha t / 2\delta)^{1/2} \operatorname{Im} f^{(2)}(\psi) \\ v_z^{(1)} &\approx 2b^2 \sqrt{1 - \alpha^2 a^{-2}} A (\alpha t / 2\delta)^{1/2} \operatorname{Re} f^{(1)}(\psi) \\ v_z^{(2)} &\approx \frac{\alpha^2 - 2b^2}{\sqrt{1 - \alpha^2 b^{-2}}} A \left(\frac{\alpha t}{2\delta}\right)^{1/2} \operatorname{Re} f^{(2)}(\psi) \\ \sigma_z^{(1)} &\approx 2\mu \alpha^{-1} (2b^2 - \alpha^2) A (\alpha t / 2\delta)^{1/2} \operatorname{Im} f^{(1)}(\psi) \\ \sigma_z^{(2)} &\approx 2\mu \alpha^{-1} (\alpha^2 - 2b^2) A (\alpha t / 2\delta)^{1/2} \operatorname{Im} f^{(2)}(\psi) \\ \tau_{xz}^{(1)} &\approx 4\mu b^2 \alpha^{-1} \sqrt{1 - \alpha^2 a^{-2}} A (\alpha t / 2\delta) \operatorname{Re} f^{(1)}(\psi) \\ \tau_{xz}^{(2)} &\approx 4\mu b^2 \frac{(1 - \alpha^2 / 2b^2)^2}{\alpha \sqrt{1 - \alpha^2 b^{-2}}} A \left(\frac{\alpha t}{2\delta}\right)^{1/2} \operatorname{Re} f^{(2)}(\psi) \end{aligned} \quad (3.7)$$

где

$$|x| = at + \delta \cos \psi, \quad z = \delta \sin \psi, \quad f^{(1)}(\psi) = (\cos \psi - i \sin \psi \sqrt{1 - \alpha^2 a^{-2}})^{-1/2}$$

$$f^{(2)}(\psi) = (\cos \psi - i \sin \psi \sqrt{1 - \alpha^2 b^{-2}})^{-1/2}$$

Теперь легко вычислить предел интеграла, стоящего в левой части (1.3). В результате, пользуясь (3.6), получаем

$$\frac{\pi \tau^{\circ 2}}{16 \mu b^2 [F(\alpha)]^2 \sqrt{1 - \alpha^2 b^{-2}}} \left[ \left(1 - \frac{\alpha^2}{a^2}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{\alpha^2}{b^2}\right)^{1/2} - \left(1 - \frac{\alpha^2}{2b^2}\right) \right] = C \quad (3.8)$$

Это уравнение определяет скорость распространения трещины  $\alpha$  в зависимости от нагрузки  $\tau^\circ$ .

**4. Решение пространственной задачи.** Решение пространственной задачи сводится к плоской тем же способом, каким это было сделано в работе [2] для осесимметричной задачи о трещине нормального разрыва. Рассматриваемый случай отличается тем, что задача уже не является осесимметричной.

Введем зависящую от параметра  $\omega$  декартову систему координат  $x, y, z$ , связанную с основной полярной системой  $r, \varphi, z$  соотношениями

$$x = r \cos(\varphi - \omega), \quad y = r \sin(\varphi - \omega), \quad z = z$$

и образуем суперпозицию плоских решений вида

$$\mathbf{u} = \int_{-\pi}^{\pi} [\mathbf{u}_1(x, z, t) \cos \omega + \mathbf{u}_2(x, z, t) \sin \omega] d\omega$$

где  $\mathbf{u}_1(x, z, t)$  определяется из (2.2), а  $\mathbf{u}_2(x, z, t)$  — из (2.5). Легко видеть, что полученный вектор удовлетворяет уравнениям движения, условию

$$\sigma_z = 0 \quad \text{при } z = 0, \quad 0 \leq r < \infty$$

и имеет нужную зависимость от  $\varphi$ . Производя замену переменной  $\Omega = \varphi - \omega$  и пользуясь уравнениями (2.2) — (2.5), получим

$$u_r \equiv v_r = v_r^{(1)} + v_r^{(2)}, \quad v_r^{(1)} = \cos \varphi \int_{-\pi}^{\pi} V_x^{(1)}(\vartheta^{(1)}) \cos^2 \Omega d\Omega$$

$$v_r^{(2)} = \cos \varphi \int_{-\pi}^{\pi} [V_x^{(2)}(\vartheta^{(2)}) \cos^2 \Omega - V_1(\vartheta^{(2)}) \sin^2 \Omega] d\Omega$$

$$u_\varphi \equiv v_\varphi = v_\varphi^{(1)} + v_\varphi^{(2)}, \quad v_\varphi^{(1)} = -\sin \varphi \int_{-\pi}^{\pi} V_x^{(1)}(\vartheta^{(1)}) \sin^2 \Omega d\Omega$$

$$v_\varphi^{(2)} = -\sin \varphi \int_{-\pi}^{\pi} [V_x^{(2)}(\vartheta^{(2)}) \sin^2 \Omega - V_1(\vartheta^{(2)}) \cos^2 \Omega] d\Omega$$

$$u_z \equiv v_z = v_z^{(1)} + v_z^{(2)}, \quad v_z^{(1,2)} = \cos \varphi \int_{-\pi}^{\pi} V_z^{(1,2)}(\vartheta^{(1,2)}) \cos \Omega d\Omega$$

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \sigma_z^{(1)} + \sigma_z^{(2)}, & \sigma_z^{(1,2)} &= \cos \varphi \int_{-\pi}^{\pi} \Sigma_z^{(1,2)} (\vartheta^{(1,2)}) \cos \Omega \, d\Omega \\ \tau_{rz} &= \tau_{rz}^{(1)} + \tau_{rz}^{(2)}, & \tau_{rz}^{(1)} &= \cos \varphi \int_{-\pi}^{\pi} T_{xz}^{(1)} (\vartheta^{(1)}) \cos^2 \Omega \, d\Omega \\ \tau_{rz}^{(2)} &= \cos \varphi \int_{-\pi}^{\pi} [T_{xz}^{(2)} (\vartheta^{(2)}) \cos^2 \Omega - T_{yz}^{(2)} (\vartheta^{(2)}) \sin^2 \Omega] \, d\Omega \\ \tau_{\varphi z} &= \tau_{\varphi z}^{(1)} + \tau_{\varphi z}^{(2)}, & \tau_{\varphi z}^{(1)} &= -\sin \varphi \int_{-\pi}^{\pi} T_{xz}^{(1)} (\vartheta^{(1)}) \sin^2 \Omega \, d\Omega \\ \tau_{\varphi z}^{(2)} &= -\sin \varphi \int_{-\pi}^{\pi} [T_{xz}^{(2)} (\vartheta^{(2)}) \sin^2 \Omega - T_{yz}^{(2)} (\vartheta^{(2)}) \cos^2 \Omega] \, d\Omega \end{aligned} \quad (4.1)$$

В этих выражениях функции  $\vartheta^{(1,2)}$  определяются из уравнений

$$\begin{aligned} \delta^{(1)} &\equiv t - \vartheta^{(1)} r \cos \Omega - z \sqrt{a^{-2} - \vartheta^{(1)2}} = 0 \\ \delta^{(2)} &\equiv t - \vartheta^{(2)} r \cos \Omega - z \sqrt{b^{-2} - \vartheta^{(2)2}} = 0 \end{aligned}$$

а функции, стоящие под интегралами, выражаются через две неизвестные функции  $V(\vartheta)$  и  $V_1(\vartheta)$  по (2.2) и (2.5). Легко видеть, что  $V(\vartheta)$  и  $V_1(\vartheta)$  можно считать четными функциями  $\vartheta$ , так как слагаемые в (4.1), соответствующие нечетным частям этих функций, тождественно исчезают. Введем обозначения

$$F(\vartheta^2) = V(\vartheta), \quad F_1(\vartheta^2) = V_1(\vartheta)$$

Учитывая, что  $\vartheta^{(1)} = \vartheta^{(2)} = \vartheta \equiv t / r \cos \Omega$  при  $z = 0$ , можно из (4.1) получить выражения

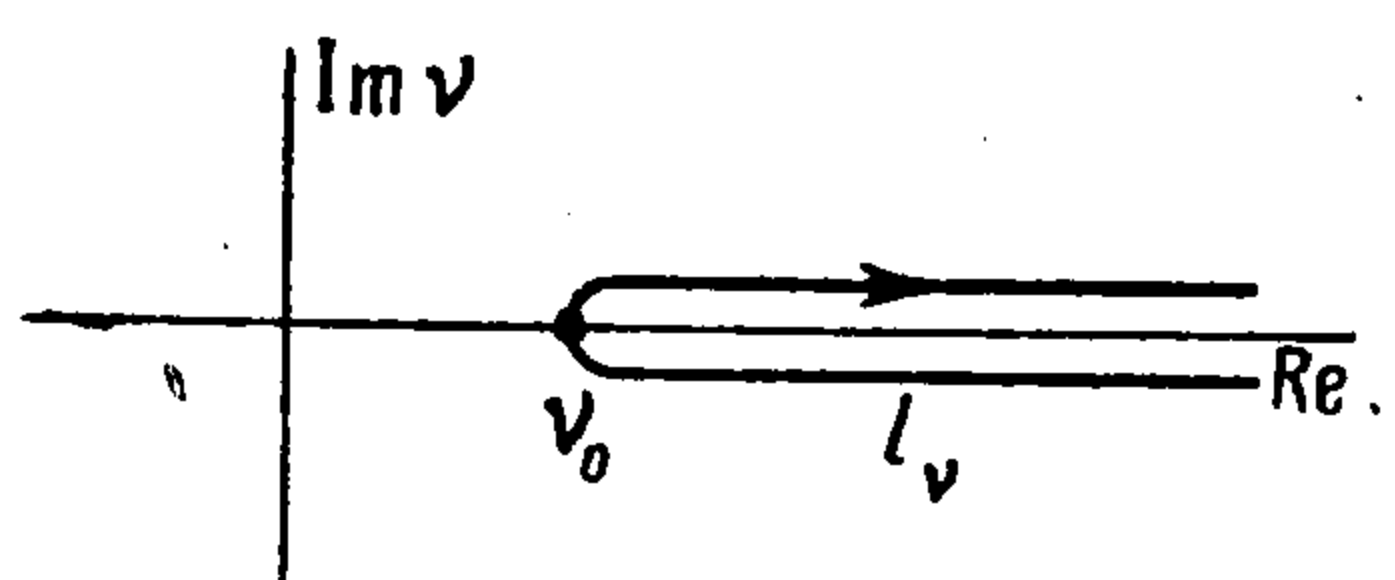
$$\begin{aligned} \frac{r}{2 \cos \varphi} v_r &= \operatorname{Re} \int_{l_v} \left[ \frac{v_0}{v} F'(v) - \left(1 - \frac{v_0}{v}\right) F_1'(v) \right] \frac{dv}{\sqrt{v - v_0}}, \quad v_0 = \frac{t^2}{r^2} \\ -\frac{r}{2 \sin \varphi} v_\varphi &= \operatorname{Re} \int_{l_v} \left[ \left(1 - \frac{v_0}{v}\right) F'(v) - \frac{v_0}{v} F_1'(v) \right] \frac{dv}{\sqrt{v - v_0}}, \quad v = \vartheta^2 \quad (4.2) \\ -\frac{r}{2\mu \cos \varphi} \tau_{rz} &= \operatorname{Re} \int_{l_v} \left[ \frac{4b^2 R(v)}{\sqrt{b^{-2} - v}} F'(v) \frac{v_0}{v} - \right. \\ &\quad \left. - \left(1 - \frac{v_0}{v}\right) \sqrt{b^{-2} - v} F_1'(v) \right] \frac{dv}{\sqrt{v - v_0}} \\ \frac{r}{2\mu \sin \varphi} \tau_{\varphi z} &= \operatorname{Re} \int_{l_v} \left[ \frac{4b^2 T(v)}{\sqrt{b^{-2} - v}} \left(1 - \frac{v_0}{v}\right) F'(v) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{v_0}{v} \sqrt{b^{-2} - v} F_1'(v) \right] \frac{dv}{\sqrt{v - v_0}} \quad \text{при } z = 0 \end{aligned}$$

Контур интегрирования  $l_v$  показан на фиг. 4. Для выполнения начальных условий выражения (4.2) должны исчезать при  $v_0 < a^{-2}$ . Это будет выполнено, если  $F'(v)$  и  $F_1'(v)$  регулярны вне разреза от  $a^{-2}$  до  $\infty$ ,

удовлетворяют условию

$$F'(0) = -F_1'(0) \quad (4.3)$$

и убывают на бесконечности быстрее, чем  $\nu^{-1}$ . В силу граничных условий первые два из выражений (4.2) должны исчезать при  $\nu_0 < \alpha^{-2}$ . Для этого  $F'(\nu)$  и  $F_1'(\nu)$  должны быть регулярны при  $\operatorname{Re} \nu < \alpha^{-2}$ . С другой стороны, последние два из выражений (4.2) должны исчезать при  $\nu_0 > \alpha^{-2}$ . Для этого подынтегральные выражения должны быть регулярны при  $\operatorname{Re} \nu > \nu_0 > \alpha^{-2}$ . Из этих условий и требуемого поведения напряжений в окрестности края трещины найдем  $F'(\nu)$  и  $F_1'(\nu)$ . Можно показать,



Фиг. 4

что, как и в плоской задаче, добавочное условие может быть выполнено только при  $\alpha < c$ . При этом требуемым условиям удовлетворяют функции  $F'(\nu)$  и  $F_1'(\nu)$  в виде

$$F'(\nu) = -F_1'(\nu) = \frac{A}{(\alpha^{-2} - \nu)^2}$$

где  $A$  — пока неопределенная постоянная.

Аналогично выражениям (4.2) можно получить при  $z = 0$

$$\begin{aligned} v_r &= \sqrt{\nu_0} \cos \varphi \operatorname{Re} \int_{l_\nu} \left[ \frac{\nu_0}{\nu} F(\nu) - \left(1 - \frac{\nu_0}{\nu}\right) F_1(\nu) \right] \frac{d\nu}{\nu \sqrt{\nu - \nu_0}} \\ v_\varphi &= -\sqrt{\nu_0} \sin \varphi \operatorname{Re} \int_{l_\nu} \left[ \left(1 - \frac{\nu_0}{\nu}\right) F(\nu) - \frac{\nu_0}{\nu} F_1(\nu) \right] \frac{d\nu}{\nu \sqrt{\nu - \nu_0}} \\ \tau_{rz} &= -\sqrt{\nu_0} \cos \varphi \operatorname{Re} \int_{l_\nu} \left[ \frac{\nu_0}{\nu} G(\nu) - \left(1 - \frac{\nu_0}{\nu}\right) G_1(\nu) \right] \frac{d\nu}{\nu \sqrt{\nu - \nu_0}} \\ \tau_{\varphi z} &= \sqrt{\nu_0} \sin \varphi \operatorname{Re} \int_{l_\nu} \left[ \left(1 - \frac{\nu_0}{\nu}\right) G(\nu) - \frac{\nu_0}{\nu} G_1(\nu) \right] \frac{d\nu}{\nu \sqrt{\nu - \nu_0}} \end{aligned} \quad (4.4)$$

где

$$\begin{aligned} F(\nu) &= \int_0^\nu F'(\lambda) d\lambda, & F_1(\nu) &= \int_0^\nu F_1'(\lambda) d\lambda, & G(\nu) &= \mu \int_0^\nu \frac{4b^2 R(\lambda)}{\sqrt{b^{-2} - \lambda}} F'(\lambda) d\lambda \\ G_1(\nu) &= \mu \int_0^\nu \sqrt{b^{-2} - \lambda} F_1'(\lambda) d\lambda \end{aligned}$$

Нижний предел здесь выбран равным нулю, чтобы подынтегральные выражения в (4.4) были регулярны при  $\nu = 0$ , что необходимо для выполнения начальных условий.

Функции  $F(\nu)$  и  $F_1(\nu)$  легко вычисляются; в результате получим

$$F(\nu) = -F_1(\nu) = \frac{\alpha^2 A \nu}{\alpha^{-2} - \nu}$$

и из (4.4) находим

$$v_r = -2\pi \cos \varphi \frac{\alpha^3 A t}{\sqrt{\alpha^2 t^2 - r^2}}, \quad v_\varphi = 2\pi \sin \varphi \frac{\alpha^3 A t}{\sqrt{\alpha^2 t^2 - r^2}} \quad \text{при } z = 0, r < \alpha t \quad (4.5)$$

Выражения для  $G(v)$  и  $G_1(v)$  преобразуем следующим образом:

$$G(v) = 4\mu b^2 \int_0^{-\infty} \frac{R(v)}{\sqrt{b^{-2}-v}} F'(v) dv + 4\mu b^2 \int_{v_0}^v \frac{R(\lambda)}{\sqrt{b^{-2}-\lambda}} F'(\lambda) d\lambda = M + G^*(v)$$

$$G_1(v) = \mu \int_0^{-\infty} \sqrt{b^{-2}-v} F_1'(v) dv + \mu \int_{v_0}^v \sqrt{b^{-2}-\lambda} F_1'(\lambda) d\lambda = M_1 + G_1^*(v)$$

Члены в (4.4), соответствующие  $G^*(v)$  и  $G_1^*(v)$ , исчезают при  $v_0 > \alpha^{-2}$ , так как подынтегральные выражения, содержащие эти функции, регулярны при  $\text{Re } v > v_0 > \alpha^{-2}$ . Таким образом,

$$\tau_{rz} = -(M - M_1) \pi \cos \varphi, \quad \tau_{\varphi z} = (M - M_1) \pi \sin \varphi \quad \text{при } z = 0, r < \alpha t$$

Сравнивая эти значения с граничными условиями (1.4), получим

$$(M - M_1) \pi = \tau^0$$

или

$$\tau^0 = -\mu \pi A \int_0^{\infty} \left[ \frac{4b^2 (v + 1/2 b^{-1})^2 - v \sqrt{a^{-2} + v} \sqrt{b^{-2} + v}}{\sqrt{b^{-2} + v}} + \sqrt{b^{-2} + v} \right] \frac{dv}{(\alpha^{-2} + v)^2} \quad (4.6)$$

Обозначим интеграл в этом уравнении через  $I_1(\alpha)$  и положим  $A_1 = -\pi A$ .

Тогда

$$A_1 = \frac{\tau^0}{\mu I_1(\alpha)} \quad (4.7)$$

Теперь, интегрируя выражения (4.5) по времени, получим

$$u_r = 2A_1 \alpha \cos \varphi \sqrt{\alpha^2 t^2 - r^2}, \quad u_\varphi = -2A_1 \alpha \sin \varphi \sqrt{\alpha^2 t^2 - r^2} \quad \text{при } z = 0, r \leq \alpha$$

или, в декартовых координатах,

$$u_x = 2\alpha A_1 \sqrt{\alpha^2 t^2 - r^2}, \quad u_y = 0 \quad \text{при } z = 0, r \leq \alpha t \quad (4.8)$$

Здесь  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ . Таким образом, направление смещения берегов трещины совпадает с направлением начального напряжения.

Методом, описанным в работе [2], можно получить асимптотические выражения для скоростей и напряжений вблизи края трещины

$$\begin{aligned} v_r^{(1)} &\approx 2b^2 A_1 \cos \varphi (2\alpha t / \delta)^{1/2} \text{Im } f^{(1)}(\psi), \\ v_r^{(2)} &\approx (\alpha^2 - 2b^2) A_1 \cos \varphi (2\alpha t / \delta)^{1/2} \text{Im } f^{(2)}(\psi) \\ v_\varphi^{(1)} &\approx O(1), \quad v_\varphi^{(2)} \approx -\alpha^2 A_1 \sin \varphi (2\alpha t / \delta)^{1/2} \text{Im } f^{(2)}(\psi) \\ v_z^{(1)} &\approx 2b^2 \sqrt{1 - \alpha^2 a^{-2}} A_1 \cos \varphi (2\alpha t / \delta)^{1/2} \text{Re } f^{(1)}(\psi) \\ v_z^{(2)} &\approx (\alpha^2 - 2b^2) (1 - \alpha^2 b^{-2})^{-1/2} A_1 \cos \varphi (2\alpha t / \delta)^{1/2} \text{Re } f^{(2)}(\psi) \\ \sigma_z^{(1)} &\approx -2\mu \alpha^{-1} (\alpha^2 - 2b^2) A_1 \cos \varphi (2\alpha t / \delta)^{1/2} \text{Im } f^{(1)}(\psi) \\ \sigma_z^{(2)} &\approx 2\mu \alpha^{-1} (\alpha^2 - 2b^2) A_1 \cos \varphi (2\alpha t / \delta)^{1/2} \text{Im } f^{(2)}(\psi) \\ \tau_{rz}^{(1)} &\approx -4\mu b^2 \alpha^{-1} \sqrt{1 - \alpha^2 a^{-2}} A_1 \cos \varphi (2\alpha t / \delta)^{1/2} \text{Re } f^{(1)}(\psi) \\ \tau_{rz}^{(2)} &\approx \mu b^{-2} \alpha^{-1} (1 - \alpha^2 b^{-2})^{-1/2} (\alpha^2 - 2b^2)^2 A_1 \cos \varphi (2\alpha t / \delta)^{1/2} \text{Re } f^{(2)}(\psi) \\ \tau_{\varphi z}^{(1)} &\approx O(1), \quad \tau_{\varphi z}^{(2)} \approx \mu \alpha \sqrt{1 - \alpha^2 b^{-2}} A_1 \sin \varphi (2\alpha t / \delta)^{1/2} \text{Re } f^{(2)}(\psi) \end{aligned} \quad (4.10)$$

$r = at + \delta \cos \psi$ ,  $z = \delta \sin \psi$ , где функции  $f^{(1)}(\psi)$  и  $f^{(2)}(\psi)$  те же, что и в (3.7). При помощи этих выражений получим из условия (1.6) соотношение

$$\mu A_1 \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{4b^2 [\sqrt{1-\alpha^2 a^{-2}} \sqrt{1-\alpha^2 b^{-2}} - (1-\alpha^2/2b^2)^2]}{\sqrt{1-\alpha^2 b^{-2}}} \cos^2 \varphi + \right. \\ \left. + \alpha^2 \sqrt{1-\alpha^2 b^{-2}} \sin^2 \varphi \right\} d\varphi = C \quad (4.11)$$

Отсюда видно, что, как это было отмечено при постановке задачи, скорость  $\alpha$  должна быть, строго говоря, функцией от  $\varphi$ , так как в общем случае при постоянной  $\alpha$  подынтегральное выражение зависит от  $\varphi$ . Однако существует одно значение  $\alpha$ , именно,

$$\alpha = \alpha_1 = b \left( 1 - \frac{a^2}{9a^2 - 16b^2} \right)^{1/2} < c \quad (4.12)$$

при котором подынтегральное выражение в (4.11) оказывается постоянным, так как в этом случае коэффициенты при  $\cos^2 \varphi$  и при  $\sin^2 \varphi$  совпадают. При этом значении  $\alpha$  трещина будет иметь круговую форму. Соответствующая величина начального напряжения получается из (4.7), (4.11) и (4.12)

$$\tau^0(\alpha_1) = \alpha_1^{-1} I_1(\alpha_1) \left[ \frac{\mu}{2\pi} C \left( 1 - \frac{\alpha_1^2}{b^2} \right) \right]^{1/2} \quad (4.13)$$

В общем случае, выполняя в (4.11) интегрирование по  $\varphi$ , получаем уравнение

$$\frac{\pi \tau^0{}^2}{\mu [I_1(\alpha)]^2} \left\{ \frac{4b^2}{\sqrt{1-\alpha^2 b^{-2}}} \left[ \sqrt{1-\alpha^2 a^{-2}} \sqrt{1-\alpha^2 b^{-2}} - \left( 1 - \frac{\alpha^2}{2b^2} \right)^2 \right] + \alpha^2 \sqrt{1-\alpha^2 b^{-2}} \right\} = C \quad (4.14)$$

определяющее некоторое эффективное значение  $\alpha$ . Ясно, что построенное решение тем лучше описывает процесс распространения трещины, чем ближе  $\tau^0$  к значению (4.13).

Автор признателен Н. В. Зволинскому за внимание к работе.

Поступила 10 IV 1964

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В р о б е р г К. В. The propagation of a brittle crack. Arkiv Fys., 1960, Bd. 18, Hft. 2.
2. К о с т р о в Б. В. Осесимметричная задача о распространении трещины нормального разрыва. ПММ, 1964, т. 28, вып. 4.
3. Ф р а н к Ф. и М и з е с Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. ОНТИ, М.—Л., 1937.