

ВОЛНЫ РЕЛЕЯ В НЕОДНОРОДНОМ УПРУГОМ СЛОЕ

А. Г. Аленицын

(Ленинград)

Рассматривается задача о собственных колебаниях упругого изотропного слоя с плоскопараллельными границами, параметры Ламе и плотность которого гладко зависят от вертикальной координаты. Получено дисперсионное уравнение для фазовой скорости, которое исследуется асимптотически при большом волновом числе. Показано, что вид семейства дисперсионных кривых существенно зависит от того, перерастает ли рэлеевская скорость наименьшее в слое значение скорости поперечной волны. Для проведения этого исследования построена асимптотика решений некоторой системы обыкновенных дифференциальных уравнений на интервале, содержащем точку поворота.

§ 1. Построение решения. Будем рассматривать слой $a \leq z \leq b$, вектор смещений $\mathbf{u}(x, y, z, t) = (u_x, u_y, u_z)$ в котором удовлетворяет системе уравнений упругости

$$L\mathbf{u} \equiv (\lambda + \mu) \nabla (\nabla, \mathbf{u}) + \mu \Delta \mathbf{u} + (\nabla, \mathbf{u}) \nabla \lambda + (\nabla \mu, \nabla \mathbf{u}) + (\nabla \mu, \nabla) \mathbf{u} - \rho \mathbf{u}_{tt} = 0 \quad (1.1)$$

Параметры Ламе λ и μ и плотность ρ будем считать гладкими функциями глубины z . Границы слоя свободны от напряжений

$$t_{zx} = t_{zy} = t_{zz} = 0, \quad z = a, \quad z = b \quad (1.2)$$

Рассмотрим, так же как и в работе [1], плоскую задачу

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, z, t) = (u_x, u_z)$$

Решение задачи (1.1), (1.2) ищем в виде

$$\mathbf{u}_\sigma(x, z, t, k) = e^{ikt\sigma} (G_x \sin kx, G_z \cos kx)$$

Решения такого вида, очевидно, при каждом $\sigma \neq 0$ представляют собой наложение двух волн, бегущих вдоль слоя во взаимно противоположных направлениях. В дальнейшем будет показано, что такие решения существуют лишь при некоторых значениях σ (зависящих от k). При этих σ функции $G_x(z, k, \sigma)$ и $G_z(z, k, \sigma)$ быстро убывают при отходе внутрь слоя от поверхности, что позволяет считать соответствующие решения \mathbf{u}_σ поверхностными волнами.

Для вектора $\mathbf{G}(z, k, \sigma)$ имеем систему

$$\mathbf{G}'' + kA\mathbf{G}' + k^2B\mathbf{G} + kC\mathbf{G} + D\mathbf{G}' = 0 \quad (1.3)$$

двух обыкновенных дифференциальных уравнений с гладкими матрицами $A(z)$, $B(z, \sigma)$, $C(z)$, $D(z)$ и граничные условия

$$\mathbf{G}' + kF\mathbf{G} = 0, \quad z = a, \quad z = b \quad (1.4)$$

Чтобы удовлетворить условиям (1.4), будем строить вектор \mathbf{G} в виде

$$\mathbf{G} = \alpha_1 \mathbf{G}^{(1)} + \alpha_2 \mathbf{G}^{(2)} + \alpha_3 \mathbf{G}^{(3)} + \alpha_4 \mathbf{G}^{(4)}$$

где $G^{(j)} = G^{(j)}(z, k, \sigma)$ — один из четырех линейно независимых решений системы (1.3). Коэффициенты α_j не все равны нулю, если

$$\det R = 0 \quad (1.5)$$

Здесь $R(k, \sigma)$ — матрица четвертого порядка с элементами

$$\begin{aligned} R_{1j} &= \left(\frac{d}{dz} G_x^{(j)} - k G_z^{(j)} \right) \Big|_{z=a}, & R_{2j} &= \left(\frac{d}{dz} G_z^{(j)} + k \frac{\lambda}{\nu} G_x^{(j)} \right) \Big|_{z=a} \\ R_{3j} &= \left(\frac{d}{dz} G_x^{(j)} - k G_z^{(j)} \right) \Big|_{z=b}, & R_{4j} &= \left(\frac{d}{dz} G_z^{(j)} + k \frac{\lambda}{\nu} G_x^{(j)} \right) \Big|_{z=b} \end{aligned}$$

$$(\nu = \lambda + 2\mu; \quad j = 1, 2, 3, 4)$$

Соотношение (1.5) представляет собой дисперсионное уравнение для фазовой скорости $\sigma(k)$. Решения этого уравнения будем исследовать при $k \gg 1$, при этом потребуется асимптотическое представление решений системы (1.3) при $k \rightarrow +\infty$.

Асимптотические формулы имеют различный характер в случаях, когда интервал $[a, b]$ не содержит или содержит точку кратности (точку поворота). В первом случае можно использовать, так же как и в работе [1], формулы Я. Д. Тамаркина [2]. Во втором случае асимптотику нетрудно построить, пользуясь методом эталонного уравнения в форме, приспособленной к системе уравнений. Вместо этого можно было бы воспользоваться результатами работ С. Ф. Фещенко [3] и А. Г. Илюхина [4] для «расщепления» исходной системы на блоки, затем свести полученные блочные системы к уравнениям первого и второго порядков и воспользоваться равномерными асимптотическими формулами Лангера [5] для решений уравнения второго порядка. Нахождение дальнейших членов асимптотического ряда при этом оказывается весьма трудоемким. Поэтому простота эталонного метода и удобство получаемых непосредственно формул представляются важными преимуществами этого метода по сравнению с методом расщепления и изучения расщепленной системы.

§ 2. Асимптотическое представление решений системы (1.3). Запишем систему (1.3) в форме системы

$$Z' = kHZ + KZ \quad (2.1)$$

четырёх обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка для вектора

$$Z = (Z_1, Z_2, Z_3, Z_4) = \left(G_x, G_z, \frac{1}{k} \frac{d}{dz} G_x, \frac{1}{k} \frac{d}{dz} G_z \right)$$

Матрицы H и K таковы:

$$H = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ p^{-1}m_p^2 & 0 & 0 & p^{-1}-1 \\ 0 & pm_s^2 & p-1 & 0 \end{vmatrix}, \quad K = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu'/\mu & -\mu'/\mu & 0 \\ -\lambda'/\nu & 0 & 0 & -\nu'/\nu \end{vmatrix}$$

Здесь

$$m_p^2 = 1 - n_p^2(z) \sigma^2, \quad m_s^2 = 1 - n_s^2(z) \sigma^2, \quad p = \frac{v_s^2(z)}{v_p^2(z)} < \frac{1}{2}$$

$$n_p^2 = \frac{\rho(z)}{\nu(s)} = \frac{1}{v_p^2(z)}, \quad n_s^2(z) = \frac{\rho(z)}{\mu(z)} = \frac{1}{v_s^2(z)}$$

Условимся называть точкой кратности (точкой поворота) то значение независимой переменной z (зависящее от параметра σ), при котором совпадают два или более корней характеристического уравнения матрицы $H(z, \sigma)$. В силу неравенства $v_s(z) < v_p(z)$ точки кратности определяются из уравнений $v_s(z) = \sigma$ и $v_p(z) = \sigma$. Если $v_s(z)$ и $v_p(z)$ таковы, что при фиксированном $\sigma > 0$ при $z \in [a, b]$ нет точек кратности, то, как известно (см., например, [6]), на промежутке $[a, b]$ существует фундаментальная матрица $\Phi(z, k, \sigma)$ системы (1.3), имеющая при $k \rightarrow \infty$ асимптотическое представление

$$\Phi(z, k, \sigma) = P \left[\sum_{j=0}^{m-1} k^{-j} B_j(z) + O(k^{-m}) \right] \exp \left[k \int_a^z \Lambda(z', \sigma) dz' \right] \quad (2.2)$$

Здесь $P(z, \sigma)$ — матрица, приводящая $H(z, \sigma)$ к диагональной форме $\Lambda = P^{-1}HP$, гладкие матрицы B_j определяются из рекуррентной системы.

Рассмотрим случай наличия точек кратности. Предположим для простоты, что $v_s(z)$ монотонно возрастает, причем $v_s'(z) > 0$ на $[a, b]$, и $v_p(z) > v_s(b)$. Тогда, очевидно, при $v_s(a) \leq \sigma \leq v_s(b)$ имеется только одна точка кратности $z_s(\sigma) \in [a, b]$. Нетрудно найти неособое преобразование $Z = TX$, приводящее H к квазидиагональной форме

$$H^* = T^{-1}HT = \left[\left\| \begin{array}{cc} -m_p & 0 \\ 0 & +m_p \end{array} \right\|, \left\| \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ m_s^2 & 0 \end{array} \right\| \right]$$

Эта матрица T такова:

$$T = \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ m_p & -m_p & -1 & 0 \\ -m_p & m_p & m_s^2 & 0 \\ -m_p^2 & -m_p^2 & 0 & -1 \end{array} \right\|$$

Для вектора X имеем систему

$$X' = kH^*X + K^*X \quad (K^* = T^{-1}KT - T^{-1}T') \quad (2.3)$$

Рассмотрим вспомогательную квазидиагональную матрицу

$$W = [Y_1, Y_2]$$

Здесь

$$Y_1 = [J_1, J_2], \quad J_{1,2} = \exp \left(\mp k \int_a^z m_p(z', \sigma) dz' \right)$$

$$Y_2 = \left\| \begin{array}{cc} y_1(z) & y_2(z) \\ k^{-1}y_1'(z) & k^{-1}y_2'(z) \end{array} \right\|, \quad \begin{array}{l} y_1(z) = 2k^{1/6} [\varphi'(z)]^{-1/2} v(k^{2/3}\varphi(z)) \\ y_2(z) = k^{1/6} [\varphi'(z)]^{-1/2} u(k^{2/3}\varphi(z)) \end{array}$$

$$\varphi(z) = \left(\frac{3}{2} \left| \int_{z_s(\sigma)}^z |m_s^2(z', \sigma)|^{1/2} dz' \right| \right)^{2/3} \operatorname{sgn} [z - z_s(\sigma)]$$

Здесь $u(t)$ и $v(t)$ — функции Эйри в определении В. А. Фока [7]. Матрица W удовлетворяет уравнению

$$W' = kH^*W + k^{-1}MW \quad (2.4)$$

Здесь

$$M(z) = [0, M_2], \quad M_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ r(z) & 0 \end{vmatrix}, \quad r = \frac{\psi''}{\psi}, \quad \psi = \frac{1}{\sqrt{\varphi'(z)}}$$

Если $\lambda(z)$, $\mu(z)$ и $\rho(z)$ бесконечно дифференцируемы, то, как нетрудно показать, можно подобрать бесконечно дифференцируемые матрицы $A_0(z)$, $A_1(z)$, ..., такие, что выражение

$$X^\vee = \sum_{j=0}^{\infty} k^{-j} A_j(z) W(z)$$

будет формальным матричным решением системы (2.3).

В самом деле, подстановка X^\vee в систему (2.3) дает для определения $A_j(z)$ рекуррентную систему

$$\begin{aligned} A_0 H^\times &= H^\times A_0, & A_0' + A_1 H^\times &= H^\times A_1 + K^\times A_0 \\ A_m' + A_{m+1} H^\times &= H^\times A_{m+1} + K^\times A_m - A_{m-1} M & (m=1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Легко проверить, что общим решением первого из уравнений (2.5) будет матрица

$$A_0 = \left[\begin{vmatrix} a_0 & 0 \\ 0 & b_0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c_0 & d_0 \\ d_0 m_s^2 & c_0 \end{vmatrix} \right]$$

с произвольными $a_0(z)$, $b_0(z)$, $c_0(z)$ и $d_0(z)$. Рассмотрим второе из уравнений (2.5). Каждую матрицу четвертого порядка разобьем на четыре квадратных блока; нумеровать эти блоки будем так:

$$H^\times = \begin{vmatrix} H_{1^*} & H_{2^*} \\ H_{3^*} & H_{4^*} \end{vmatrix}, \quad A_0 = \begin{vmatrix} A_{01} & A_{02} \\ A_{03} & A_{04} \end{vmatrix} \quad \text{и т. д.}$$

Для блоков имеем уравнения

$$\begin{aligned} A_{01}' + A_{11} H_{1^*}^\times &= H_{1^*}^\times A_{11} + K^\times A_{01}, & A_{12} H_{4^*}^\times &= H_{1^*}^\times A_{12} + K_2^\times A_{04} \\ A_{13} H_{1^*}^\times &= H_{4^*}^\times A_{13} + K_3^\times A_{01}, & A_{04}' + A_{14} H_{4^*}^\times &= H_{4^*}^\times A_{14} + K_4^\times A_{04} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Первое из этих уравнений для a_0 и b_0 дает

$$a_0 = \exp \int (K^\times)_{11} dz, \quad b_0 = \exp \int (K^\times)_{22} dz$$

Из этого же уравнения единственным образом определяются недиагональные элементы матрицы A_{11} через уже известные a_0 и b_0 . Уравнение, содержащее матрицу A_{13} , единственным образом определяет ее элементы через K_3^\times и A_{01} , так как $H_{1^*}^\times$ и $H_{4^*}^\times$ не имеют общих характеристических чисел¹.

Обратимся к уравнению, содержащему A_{14} . Вычисление матрицы K^\times показывает, что недиагональные элементы блока K_4^\times тождественно равны нулю; это приводит к тому, что d_0 можно положить равным нулю.

Непосредственное вычисление дает формулы

$$\begin{aligned} A_{04} &= [c_0, c_0], & A_{14} &= \begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ d_1 m_s^2 + g_1 & c_1 \end{vmatrix} \\ c_0 &= \exp \frac{1}{2} \int [(K^\times)_{33} + (K^\times)_{44}] dz, & g_1 &= -c_0' + (K^\times)_{44} c_0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

где $c_1(z)$ и $h_1(z)$ — произвольные (пока) функции.

¹ Если V_1 и V_2 — квадратные матрицы, не имеющие общих характеристических чисел, то матричное уравнение $AV_1 = V_2A$ имеет единственное решение $A = 0$ (см., например, [3]).

Из уравнения, содержащего A_{12} , однозначно определяются элементы A_{12} . Существенно отметить, что построенные так A_0 и A_1 бесконечно дифференцируемы, если H и K обладают этим же свойством. Та же процедура позволяет определять последовательно остальные бесконечно дифференцируемые $A_j(z)$. Если же λ , μ и ρ гладкие, то можно, естественно, найти лишь конечное число гладких A_j .

Займемся оправданием формального разложения. Нетрудно видеть, что матрица

$$X^\times = \sum_{j=0}^m k^{-j} A_j(z) W(z)$$

удовлетворяет уравнению

$$(X^\times)' = [kH^\times + K^\times + k^{-m} \Gamma(z, k, \sigma)] X^\times \quad (2.8)$$

где $\Gamma(z, k, \sigma) = O(1)$ при $k \rightarrow \infty$. Стандартным приемом приходим к следующему интегральному уравнению для истинной фундаментальной матрицы X системы (2.3):

$$X(z, k, \sigma) = X^\times(z, k, \sigma) - \frac{1}{k^m} \int_a^z X^\times(z, k, \sigma) [X^\times(z', k, \sigma)]^{-1} \Gamma(z', k, \sigma) \times \\ \times X(z', k, \sigma) dz' \quad (2.9)$$

Домножим это уравнение слева на неособую матрицу

$$P^{-1} = \left[\sum_{j=0}^m k^{-j} A_j(z) \right]^{-1}$$

и введем обозначение $P^{-1}X = U$. Выбор путей интегрирования в уравнении (2.9) можно сделать таким образом:

$$U(z) = W(z) + \frac{1}{k^m} \int_b^z W_1(z) W^{-1}(z') \Gamma^\times(z') U(z') dz' + \\ + \frac{1}{k^m} \int_a^z W_2(z) W^{-1}(z') \Gamma^\times(z') U(z') dz' \quad (2.10)$$

$$(\Gamma^\times = -P^{-1}\Gamma P, W = W_1 + W_2)$$

Разбиение матрицы W должно быть различным для различных векторов $U^{(j)}(z)$:

$$W_1 = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & J_2 \end{array} \right], Y_2 \text{ для } U^{(1)} \text{ и } U^{(3)}, \quad W_1 = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & J_2 \end{array} \right], 0 \text{ для } U^{(2)} \text{ и } U^{(4)}$$

При таком разбиении, как легко видеть, интегральное уравнение для вектора $U^{(1)} J_1^{-1}$ имеет ограниченное ядро. В самом деле,

$$Y_1(z) Y_2^{-1}(z) = O(|y_1(z) y_2(z')| + |y_2(z) y_1(z')|)$$

но из свойств функций Эйри (см., например, [7]), следует, что

$$|y_1(z) y_2(z')| \leq C_1 \exp k \int_z^{z'} m_s(\zeta, \sigma) d\zeta \quad \text{при } z', z \geq z_s(\sigma) \\ |y_1(z) y_2(z')| \leq C_2 \quad \text{при } z', z \leq z_s(\sigma)$$

Вследствие неравенства $m_p(z, \sigma) > m_s(z, \sigma)$, справедливого при $z \geq z_s(\sigma)$, матрица $Y_2(z) Y_2^{-1}(z') J_1(z') J_1^{-1}(z)$ ограничена при $k \rightarrow +\infty$ на всем квадрате $z, z' \in [a, b]$. Ограниченность первого блока матриц $W_\nu(z) W_\nu^{-1}(z') J_1(z') J_1^{-1}(z)$ ($\nu = 1, 2$) очевидна.

Аналогично доказывается ограниченность ядра уравнения для вектора $U^{(2)} J_2^{-1}$. Таким образом, получаем асимптотическую формулу

$$Z_{(z)}^{(j)} = T_{(z)} X_{(z)}^{(j)} = T \left[\sum_{\nu=0}^{m-1} k^{-\nu} A_\nu(z) + O(k^{-m}) \right] W_{(z)}^{(j)} \quad (j = 1, 2) \quad (2.11)$$

справедливую при $a \leq z \leq b$.

Несколько иначе приходится рассматривать уравнения для третьего и четвертого векторов матрицы U , так как функции $y_1(z)$ и $y_2(z)$ имеют нули при $z < z_s(\sigma)$.

Если $z \geq z_s(\sigma)$, при помощи рассмотрения уравнений для $U^{(3)} y_1^{-1}(z)$ и $U^{(4)} y_2^{-1}(z)$ получаем аналогичную (2.11) формулу

$$Z_{(z)}^{(j)} = T \left[\sum_{\nu=0}^{m-1} k^{-\nu} A_\nu(z) + O(k^{-m}) \right] W_{(z)}^{(j)} \quad (j = 3, 4) \quad (2.12)$$

справедливую при $z_s(\sigma) \leq z \leq b$.

При $z \leq z_s(\sigma)$ матрица $Y_2(z)$ ограничена; это приводит к формуле

$$Z_{(z)}^{(j)} = T \left[\sum_{\nu=0}^{m-1} k^{-\nu} A_\nu(z) W^{(j)}(z) + O(k^{-m}) \right] \quad (j = 3, 4) \quad (2.13)$$

справедливой при $a \leq z \leq z_s(\sigma)$.

Примененный метод, представляющий собой комбинацию классического метода и метода Черри [8], допускает обобщение на случай комплексной области и комплексного параметра, однако выбор путей интегрирования сильно усложняется при этом по сравнению с выбором путей в [8] из-за наличия «классической» части $Y_1(z)$ матрицы $W(z)$. Представляется более удобным пользоваться методом расщепления, развитым для комплексной области Сибуйа [9] и Вазовым [10], хотя этот метод является существенно локальным.

§ 3. Дисперсионные кривые (первый случай). Дисперсионные кривые $\sigma = \sigma(k)$ будем строить при $k \geq 1$. Пусть $v_R(z)$ означает скорость рэлеевской волны на глубине z ; предположим, что

$$v_R(a), v_R(b) < \min_{[a, b]} v_s(z) \equiv v_{sm}$$

Применение при $0 < \sigma \leq v_{sm} - \varepsilon$ асимптотического представления (2.2) с $m = 1$ приводит к следующему представлению дисперсионного уравнения:

$$\Delta^a(k, \sigma) \Delta^b(k, \sigma) = S^a(k, \sigma) S^b(k, \sigma) e^{-2kf(\sigma)} [1 + O(e^{-kc})] \quad (3.1)$$

где

$$\Delta^z(k, \sigma) = \Delta_0^z(\sigma) + O(k^{-1}), \quad S^z(k, \sigma) = S_0^z(\sigma) + O(k^{-1}), \quad f(\sigma) = \int_a^b m_s(z, \sigma) dz > 0, \quad c > 0$$

$$\Delta_0^z(\sigma) = [1 + m_s^2(z, \sigma)]^2 - 4m_p(z, \sigma) m_s(z, \sigma)$$

$$S_0^z(\sigma) = [1 + m_s^2(z, \sigma)]^2 + 4m_p(z, \sigma) m_s(z, \sigma) > 0$$

Очевидно, если $v_R(a) \neq v_R(b)$ и, следовательно, $\Delta^a \neq \Delta^b$ при $k \gg 1$, уравнение (3.1) имеет два решения

$$\sigma_R^a(k) = \sigma_{R0}^a(k) + N^a(k) [1 + O(e^{-kc})] \exp[-2kf(\sigma_{R0}^a)] \quad (3.2)$$

$$\sigma_R^b(k) = \sigma_{R0}^b(k) + N^b(k) [1 + O(e^{-kc})] \exp[-2kf(\sigma_{R0}^b)] \quad (3.3)$$

Здесь $\sigma_{R0}^z(k)$ удовлетворяет уравнению $\Delta^z(k, \sigma) = 0$ и имеет при $k \gg 1$ представление $\sigma_{R0}^z(k) = v_R(z) + O(k^{-1})$ (см. работу [1]);

$$N_{(k)}^a = \frac{S^a S^b}{\Delta^b \partial \Delta^a / \partial \sigma} \Big|_{\sigma=\sigma_{R0}^a}, \quad N_{(k)}^b = \frac{S^a S^b}{\Delta^a \partial \Delta^b / \partial \sigma} \Big|_{\sigma=\sigma_{R0}^b}$$

Весьма существенно, что в силу вещественности уравнения (2.10) формулы (2.11) — (2.13) содержат только вещественные члены; поэтому (3.2) и (3.3) вещественны.

Если $\Delta^a(k, \sigma) \equiv \Delta^b(k, \sigma)$, то имеется два таких решения:

$$\sigma_R^\pm(k) = \sigma_{R0}^a(k) \pm \tau(k) [1 + O(e^{-kc})] \exp[-kf(\sigma_{R0}^a)] \quad (3.4)$$

$$\left(\tau^2(k) = \frac{S^a S^b}{(\partial \Delta^a / \partial \sigma)^2} \Big|_{\sigma=\sigma_{R0}^a} > 0 \right)$$

При $v_{sm} \leq \sigma \leq \max_{[a,b]} v_s(z)$ имеется, по крайней мере, одна точка поворота $z_s(\sigma)$. Предположим, что $v_s'(z) > 0$. Применяя при

$$v_{sm} + \varepsilon \leq \sigma \leq v_M - \varepsilon \quad (v_M \equiv \min\{v_s(b), v_{pm}\}, v_{pm} \equiv \min_{[a,b]} v_p(z))$$

формулы (2.11) — (2.13) и асимптотику Дебая функций Эйри

$$\begin{aligned} u(t) &= t^{-1/4} [1 + O(t^{-3/2})] \exp^{2/3} t^{3/2} && \text{при } t \rightarrow +\infty \\ v(t) &= t^{-1/4} [1/2 + O(t^{-3/2})] \exp(-2/3 t^{3/2}) \\ u(t) &= \tau^{-1/4} [\cos(2/3 \tau^{3/2} + 1/4 \pi) + O(\tau^{-3/2})] && \text{при } t = -\tau \rightarrow -\infty \\ v(t) &= \tau^{-1/4} [\sin(2/3 \tau^{3/2} + 1/4 \pi) + O(\tau^{-3/2})] \end{aligned}$$

приходим к представлению дисперсионного уравнения

$$\Delta_{(k,\sigma)}^b \Delta^{*a}(k, \sigma) = 1/2 S_{(k,\sigma)}^b S_{(k,\sigma)}^{*a} e^{-2kf(\sigma)} [1 + O(e^{-kc})] \quad (3.5)$$

Здесь

$$\Delta^{*a}(k, \sigma) = \sin \Psi(k, \sigma) + O(k^{-1}), \quad S^{*a}(k, \sigma) = \cos \Psi(k, \sigma) + O(k^{-1})$$

$$\Psi(k, \sigma) = k\zeta(\sigma) + \theta(\sigma)$$

$$\theta(\sigma) = \frac{\pi}{4} - \arccos \frac{\sqrt{\alpha(\sigma)}}{\sqrt{\alpha^2(\sigma) + \beta^2(\sigma)}}, \quad \zeta(\sigma) = \int_a^{z_s(\sigma)} \sqrt{\sigma^2 n_s^2(z) - 1} dz > 0$$

$$\alpha(\sigma) = [1 + m_s^2(a, \sigma)]^2, \quad \beta(\sigma) = 4 |m_s^-(a, \sigma)| m_p(a, \sigma) > 0$$

Величины Δ^b и S^b имеют асимптотические представления (3.1).

Так как $\sigma > v_s(a) > v_R(b)$, $\Delta^b(k, \sigma) \neq 0$; как легко видеть, уравнение (3.5) определяет на плоскости $k\sigma$ семейство кривых $k = k_l(\sigma)$
 $k_l(\sigma) = [l\pi - \theta(\sigma) + O(l^{-1})] \zeta^{-1}(\sigma) \quad (l = l_0, l_0 + 1, \dots; l_0 \gg 1) \quad (3.6)$

В силу $\zeta'(\sigma) > 0$, с ростом l модуль наклона этого семейства неограниченно растет. Соответствующая картина в плоскости $k\sigma$ схематически изображена на фиг 1.

Если $v_{pm} > \max v_s(z)$, то на интервале $\max v_s(z) < \sigma < v_{pm}$ нет точек поворота. При этом формула (2.2) приводит к асимптотическому представлению Δ^b и S^b такого же типа, что и представление Δ^{*a} , S^{*a} в формуле (3.5).

§ 4. Дисперсионные кривые (второй случай). Сложнее картина на плоскости $k\sigma$ в случае, когда $v_R(b) > v_{sm}$. Пусть, опять-таки, $v_s'(z) > 0$, и пусть $v_R(b) = v_s(z_0) < v_{pm}$, $a < z_0 < b$. Применение формул (2.11) — (2.13) приводит (снова рассматривается область $v_{sm} < \sigma < v_M$) к уравнению (3.5), но при этом $\Delta^b(k, \sigma)$ имеет (простой) нуль $\sigma = \sigma_{R_0}^b(k)$. Нетрудно установить, исходя из интегральных уравнений § 2 и асимптотики Дебая функций Эйри, оценки типа

$$k^{-1} \frac{\partial}{\partial \sigma} \Delta^{*a}(k, \sigma) - \zeta'(\sigma) \cos \Psi(k, \sigma) = O(k^{-1})$$

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} [\Delta^b(k, \sigma) - \Delta_0^b(\sigma)] = O(k^{-1}) \quad \text{и т. д.} \quad (4.1)$$

Введем обозначение $\eta = \sigma - \sigma_{R_0}^b(k)$. Если

$$|\eta| \geq A_1 k^{-1-\delta}, \quad \delta > 0, \quad A_1 > 0,$$

то при этом, очевидно,

$$|\Delta^b(k, \sigma)| \geq A_2 k^{-1-\delta},$$

и снова получится формула (3.6).

Пусть теперь $\eta = O(k^{-1-\gamma})$, $\gamma > 0$. Уравнение (3.5) можно тогда записать в форме

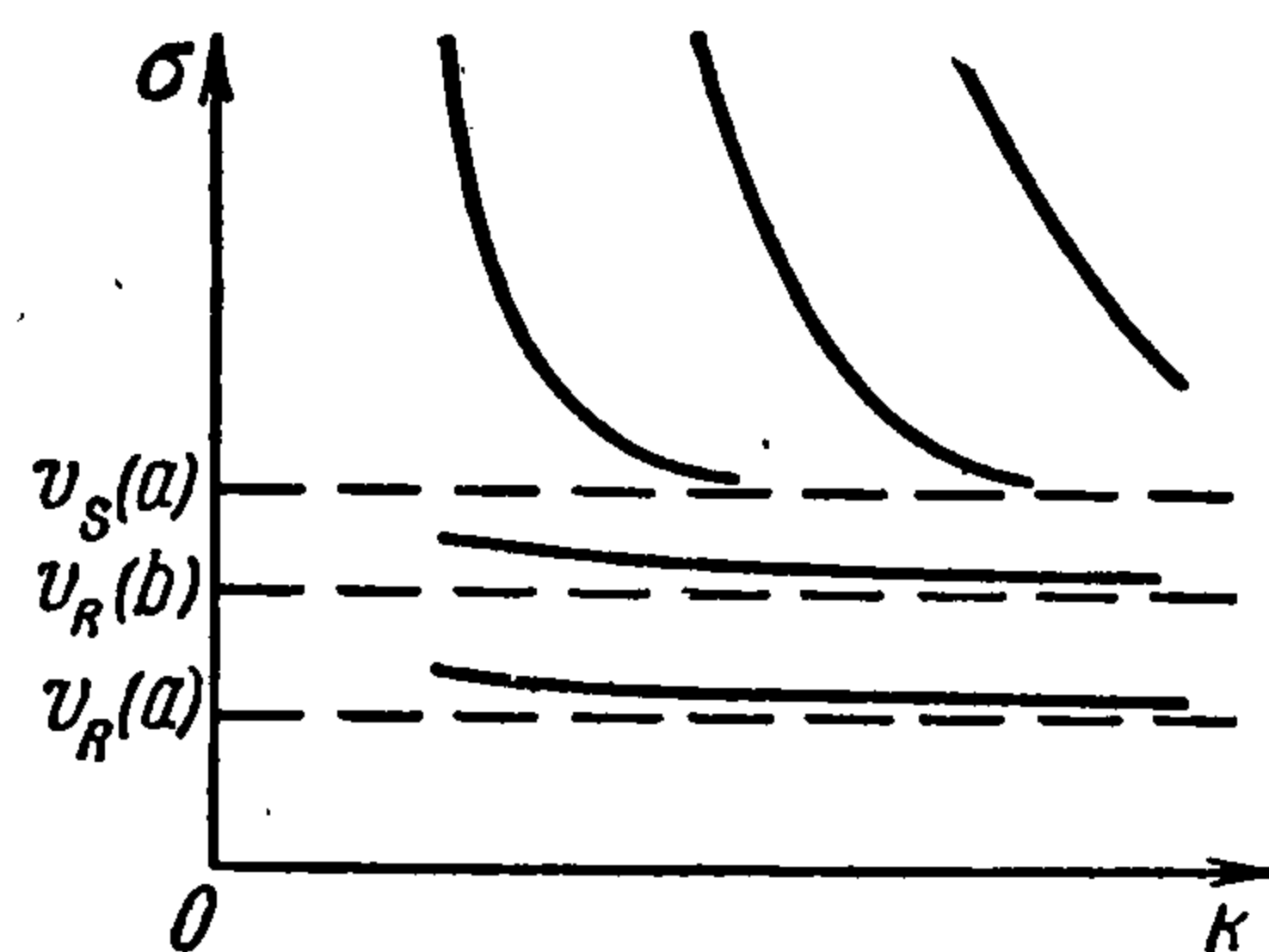
$$\eta a(k, \eta) [b(k) + k\eta c(k, \eta)] = Q(k, \eta), \quad b(k) = \Delta^{*a}(k, \sigma_{R_0}^b(k)) \quad (4.2)$$

Здесь $Q(k, \eta)$ — правая часть уравнения (3.5), функции $a(k, \eta)$ и $c(k, \eta)$ имеют следующие асимптотические представления:

$$a(k, \eta) = \frac{d}{d\sigma} \Delta_0^b|_{\sigma=v_R(b)} + O(k^{-1}) > 0$$

$$c(k, \eta) = k^{-1} \frac{\partial}{\partial \sigma} \Delta^{*a}(k, \sigma)|_{\sigma=\sigma_{R_0}^b} + O(k^{-1}) \quad (4.3)$$

Несложное рассмотрение уравнения (4.2) показывает, что наличие правой части $Q = O(e^{-2k\eta})$ существенно влияет на поведение кривых $\sigma = \sigma_l(k)$ в окрестности кривой $\sigma = \sigma_{R_0}^b(k)$. Именно, если бы было $Q \equiv 0$, мы имели бы в качестве решений уравнения (4.2) семейство (3.6) и пересекающую это семейство кривую $\sigma = \sigma_{R_0}^b(k)$. Присутствие Q приводит, как и следовало ожидать, к пропаданию точек пересечения



Фиг. 1

дисперсионных кривых. Наибольшее сближение, как легко подсчитать, соседние кривые имеют в точках

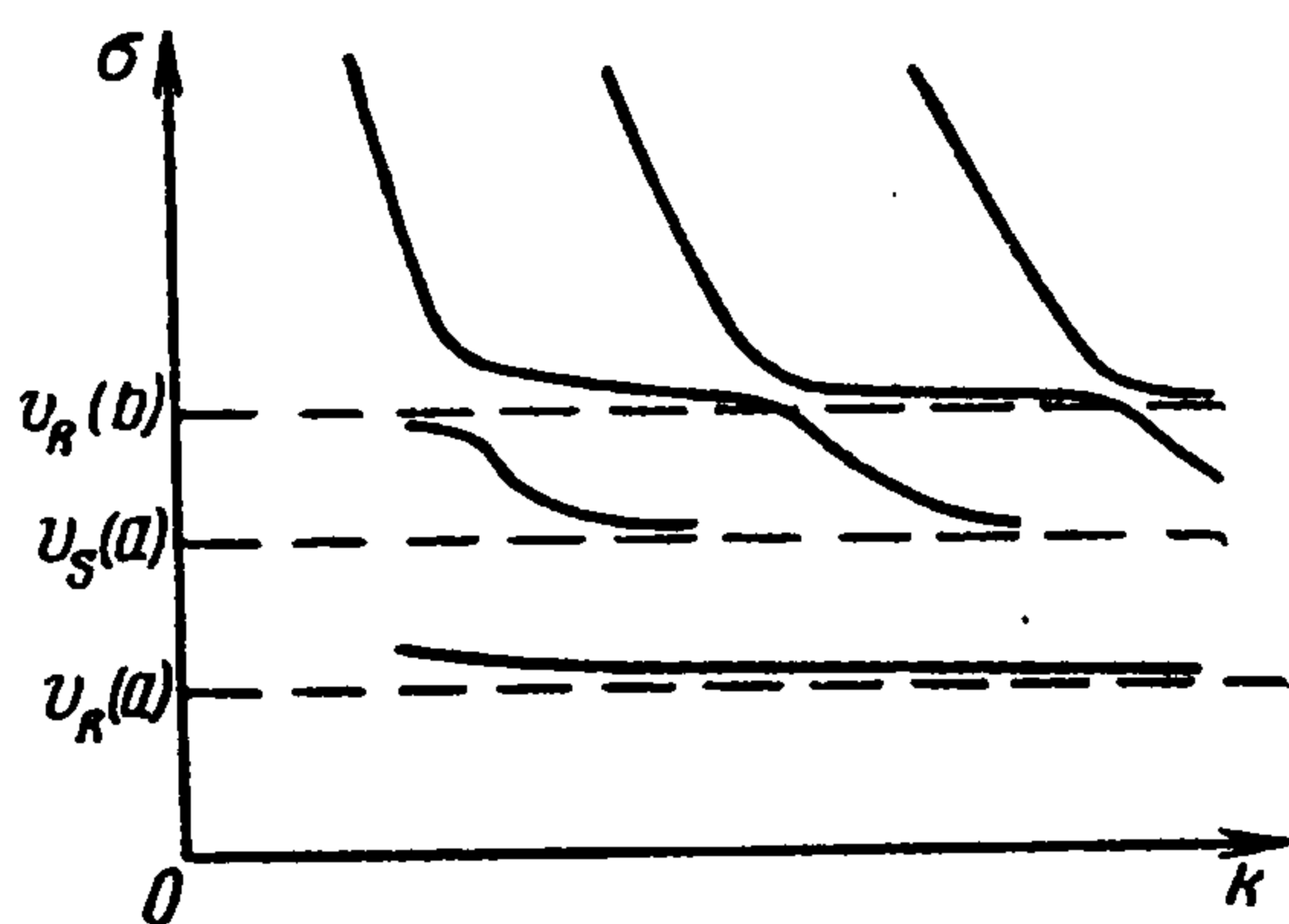
$$k_m = [m\pi - (\theta + v_1 \zeta')|_{\sigma=v_R(b)} + O(m^{-1})] \zeta^{-1}(v_R(b)) \quad (4.4)$$

$$v_1 = \lim [\sigma_{R0}^b - v_R(b)] k \quad \text{при } k \rightarrow \infty \quad (m = m_0, m_0 + 1, \dots; m_0 \geq 1)$$

Расстояние по вертикали между соседними кривыми при этом оказывается равным

$$Bk^{-1/2} [1 + O(k^{-1})] \exp[-kf(v_R(b))] \quad (4.5)$$

$$\left(B^2 = \frac{S_0^b e^{-v_1 f'}}{2\zeta' d\Delta_0^b / d\sigma} \Big|_{\sigma=v_R(b)} > 0 \right)$$



Фиг. 2

Поведение дисперсионных кривых при $\sigma \approx v_{sm}$ может быть исследовано путем применения тех же формул (2.11) — (2.13). Схематическая картина расположения кривых в плоскости $k\sigma$ дана на фиг. 2.

Область $\sigma > v_{pm}$ может быть исследована вполне аналогично изложенному; при этом, очевидно, формулы типа (2.11) — (2.13) будут содержать точку $z_p(\sigma)$ в качестве точки поворота.

В заключение отметим, что, сшивая формулы типа (2.11) — (2.13), пригодные на промежутках монотонности скоростей, возможно изучать волны Рэлея в среде с немонотонными скоростями распространения.

Поступила 18 IV 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. А л е н и ц ы н А. Г. Волны Рэлея в неоднородном упругом полупространстве. ПММ, 1963, т. 27, вып. 3.
2. Т а м а р к и н J. D. Some general problems of the theory of ordinary linear differential equations. Math. Z., 1928, v. 27.
3. Ф е щ е н к о С. Ф. Об асимптотическом расщеплении системы линейных дифференциальных уравнений. Укр. матем. ж., 1955, т. 7, № 2.
4. І л ю х і н А. Г. Про зведення системи звичайних лінійних дифференціальних рівнянь, що містять параметр. Доповіді АН УРСР, 1961, No. 8.
5. L a n g e r R. E. The asymptotic solutions of ordinary linear differential equations of the second order. Trans. Amer. Math. Soc., 1949, v. 67.
6. К о д д и н г т о н Э. А., Л е в и н с о н Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. Изд. иностр. лит., М., 1958.
7. Ф о к В. А. Дифракция радиоволн вокруг земной поверхности. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1946.
8. С h e r r y T. M. Uniform asymptotic formulae for functions with transition points. Trans. Amer. Math. Soc., 1950, v. 68, No. 2.
9. S i b u y a Y. Sur réduction analytique d'un système d'équations différentielles ordinaires linéaires contenant un paramètre. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 1958, No. 7.
10. W a s o w W. Turning point problem for systems of linear differential equations. Comm. Pure Appl. Math., 1962, v. 15, No. 2.