Прикладная математика и механика. Том 28, 1964

УДАР ТЕЛА О ТОНКУЮ ПЛАСТИНУ, ЛЕЖАЩУЮ НА ПОВЕРХНОСТИ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Е. Ф. Афанасьев

(Москва)

Задача об ударе тела о поверхность сжимаемой жидкости решена в 1947 г. Л. А. Галиным [1]. Позднее сходная задача о вдавливании штампа в упругое полупространство рассмотрена Л. М. Флитманом [2].

В настоящей работе рассмотрена плоская задача об ударе тела конечной ширины о тонкую пластину, лежащую на поверхности сжимаемой жидкости. В § 1 дана постановка задачи. В § 2 задача для некоторого начального интервала времени сведена к решению интегро-дифференциального уравнения, интегральный член которого имеет разностное ядро с полубесконечным промежутком изменения переменных. Решение этого уравнения найдено в виде квадратур. В § 3 дано доказательство существования решения. В § 4 приведено решение задачи для любого момента времени. В § 5 для малых времен получены простые расчетные формулы для определения формы деформированной пластины, когда тело после удара движется с постоянной скоростью. В § 6 найден закон движения тела, когда задана его начальная скорость, а после удара оно движется с переменной скоростью. В обоих случаях определена сила, действующая на тело со стороны жидкости и пластины.

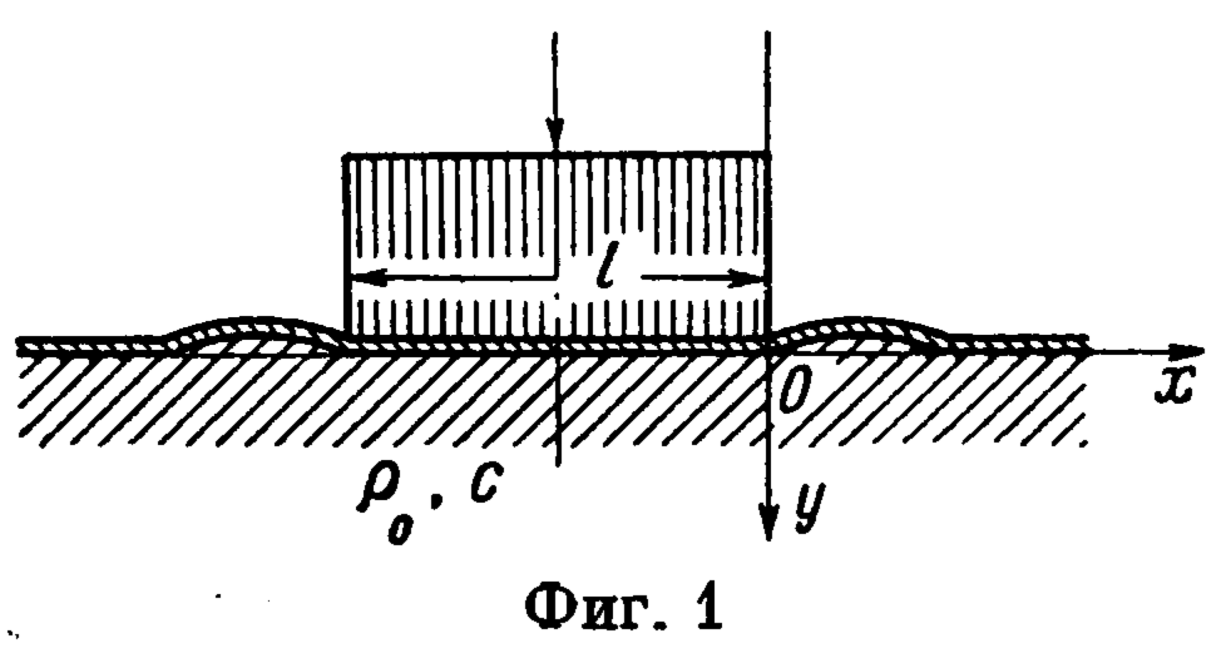
Дано сравнение полученного решения с решением задачи об ударе тела о поверхность сжимаемой жидкости без покрытия [1]. В результате исследовано влияние покрытия на удар тела о жидкость.

Обозначения: ρ_0—плотность покоящейся жидкости, c—скорость звука в покоящейся жидкости, ρ — плотность материала пластины, h — толщина пластины, l — ширина тела, $v(t)$ — скорость движения тела, $P(x, y, t)$ — избыточное давление в жидкости, $w(x, t)$ — перемещение пластины:

$$x_1 = x / l, \quad y_1 = y / l, \quad t_1 = ct / l, \quad w_1 = w / l, \quad P_1 = P / \rho_0 c^2, \quad v_1 = v / c$$

— безразмерные величины (индекс 1 условимся опускать).

1. Пусть о тонкую пластину, лежащую на поверхности сжимаемой жидкости $y = 0$, в момент времени $t = 0$ ударяется твердое симметричное тело (фиг. 1) с плоским дном шириной l и начинает двигаться с некоторой скоростью $v_y = v(t)$.



Фиг. 1

В ударных задачах наибольший интерес представляет решение для начального интервала времени $t \sim 1$. Поэтому рассматриваемую задачу ради простоты будем решать для времени $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Решение задачи для любого момента времени выглядит весьма сложно. Оно в окончательном виде без исследования будет также приведено в работе.

После удара в жидкости будет распространяться ударная волна. Под действием тела и ударной волны пластина начнет деформироваться.

Задачу будем решать в предположении, что пластина не рвется возле краев тела $x = 0$ и $x = -1$.

В качестве первого приближения к действительности относительно деформации пластины примем предположение, указанное в монографии [3]. В этом приближении допускается существование определенного предела упругости, ниже которого применим закон Гука; при повышении этого условного предела упругости пластина работает как мембрана, подвергающаяся постоянному растяжению, определяемому величиной предела текучести σ при растяжении за пределом упругости.

Итак, будем считать, что на участке действия ударной волны пластина приходит в пластическое состояние, и ее перемещение $w(x, t)$ удовлетворяет уравнению мембраны

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \alpha^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\varepsilon p(x, t) \qquad \left(\alpha = \frac{1}{c}\left[\frac{\sigma}{\rho}\right]^{1/2}, \quad \varepsilon = \frac{\rho_0 l}{\rho h}\right) \tag{1.1}$$

где $p(x, t)$ — давление на пластину со стороны жидкости; α, ε — безразмерные параметры. В реальных случаях параметр $\alpha < 1$.

Давление $P(x, y, t)$ в сжимаемой жидкости, заполняющей полупространство $y > 0$, выражается через нормальную скорость движения границы $v_y(x, t)$ при помощи волнового потенциала [4]

$$P(x, y, t) = \frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^{t-y} d\tau \int\limits_{x_-}^{x_+} \frac{v_y(\xi, \tau)\, d\xi}{\sqrt{(t-\tau)^2 - (x-\xi)^2 - y^2}}$$

$$\left(y \geqslant 0, \quad x_\pm = x \pm \sqrt{(t-\tau)^2 - y^2}\right)$$

Отсюда гидродинамическое давление на пластину равно

$$p(x, t) = P(x, 0, t) = \frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^{t} d\tau \int\limits_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} \frac{v_y(\xi, \tau)\, d\xi}{\sqrt{(t-\tau)^2 - (x-\xi)^2}} \tag{1.2}$$

при этом

$$v_y = \begin{cases} \partial w / \partial t & (x < -1,\ x > 0) \\ v(t) & (-1 \leqslant x \leqslant 0) \end{cases} \tag{1.3}$$

До удара

$$w = 0, \qquad \partial w / \partial t = 0 \qquad (t \leqslant 0) \tag{1.4}$$

В силу симметрии задачи относительно прямой $x = -0.5$ имеет место соотношение

$$w(-x, t) = w(x - 1, t) \qquad (x \geqslant 1)$$

поэтому функцию $w(x, t)$ достаточно определить при $x > 0$.

Заметим, что в течение времени $0 \leqslant t \leqslant 1$ левый край тела $x = -1$ не будет влиять на деформацию пластины при $x > 0$. Отсюда перемещение $w(x, t)$ при $x > 0$ будет то же самое, если бы о пластину ударилось тело полубесконечной ширины $-\infty < x \leqslant 0$.

На крае пластины $x = 0$ должно выполняться условие

$$w(0, t) = \int\limits_0^t v(\tau)\, d\tau$$

Учитывая это, положим

$$w(x, t) = \int_0^{t-x/\alpha} v(\tau)\, d\tau + w_1(x, t) \qquad (x>0) \tag{1.5}$$

Первое слагаемое в (1.5) соответствует решению задачи об ударе тела о пластину в пустоте, а второе слагаемое $w_1(x, t)$ учитывает влияние жидкости на деформацию пластины.

Принимая во внимание (1.1) — (1.5) и выше сделанное замечание, для определения функции $w_1(x, t)$ придем к задаче

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} - \alpha^2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \varepsilon p = 0 \qquad (x>0) \tag{1.6}$$

$$w_1 = 0, \qquad \frac{\partial w_1}{\partial t} = 0 \qquad (t=0) \tag{1.7}$$

$$w_1(0, t) \equiv 0 \tag{1.8}$$

При этом функция $p(x, t)$ определяется формулой (1.2), где нужно положить

$$v_y = \begin{cases} \partial w_1 / \partial t + v(t - x/\alpha) & (x>0) \\ v(t) & (x<0) \end{cases} \tag{1.9}$$

2. Умножим обе части уравнений (1.6) на $e^{-\lambda t}$, где $\operatorname{Re}\lambda > \gamma_0$, а γ_0 — показатель роста функции $v(t)$, и проинтегрируем по t от нуля до бесконечности. В результате, принимая во внимание (1.2), (1.7) и (1.9), получим уравнение

$$w_1^*(x, \lambda) - \frac{\alpha^2}{\lambda^2} \frac{\partial w_1^*(x, \lambda)}{\partial x^2} + \frac{\varepsilon}{\pi} \int_0^\infty K_0(\lambda |x - \xi|)\, w_1^*(\xi, \lambda)\, d\xi +$$

$$+ \varepsilon \frac{v^*(\lambda)}{\lambda \pi} \int_0^\infty \{K_0(\lambda |x - \xi|)\, e^{-\lambda\xi/\alpha} + K_0[\lambda(x+\xi)]\}\, d\xi = 0 \qquad (x>0) \tag{2.1}$$

Здесь K_0 — функция Макдональда; $w_1^*(x, \lambda)$ и $v^*(\lambda)$ — трансформанты Лапласа для функций $w_1(x, t)$ и $v(t)$ соответственно.

Интегральные уравнения с ядром, зависящим от абсолютной величины разности аргументов, и полубесконечным промежутком изменения переменных решаются методом Винера-Хопфа-Фока [2, 5].

Применяя этот метод и к интегро-дифференциальному уравнению (2.1), получим решение в виде

$$w_1^*(x, \lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \lambda W(z, \lambda)\, e^{\lambda x z}\, dz \qquad (\gamma > 0) \tag{2.2}$$

Здесь подынтегральная функция $W(z, \lambda)$ равна

$$W(z, \lambda) = -\varepsilon_1 \frac{v^*(\lambda)}{\lambda^2} \frac{\varphi(z, \varepsilon_1)}{1 + \alpha z} \frac{1}{\pi} \int_1^\infty \frac{\varphi(\xi, \varepsilon_1)\, d\xi}{(z+\xi)(1-\alpha^2\xi^2)\,\xi \sqrt{\xi^2 - 1}} \tag{2.3}$$

где интеграл следует брать в смысле главного значения, а функция $\varphi(z, \varepsilon_1)$ имеет вид

$$\varphi(z, \varepsilon_1) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \ln\left[1 + \frac{\varepsilon_1}{(1-\alpha^2\zeta^2)\sqrt{1-\zeta^2}}\right] \frac{d\zeta}{\zeta - z}\right\} \tag{2.4}$$

Функции $W(z, \lambda)$ и $\varphi(z, \varepsilon_1)$ регулярны в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$; при этом $W \to 0$, $\varphi \to 1$ при $z \to \infty$.

Зная функцию $w_1^*(x, t)$, функцию $w_1(x, \lambda)$ найдем обратным преобразованием по λ

$$w_1(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_1 - i\infty}^{\gamma_1 + i\infty} w_1^*(x, \lambda)\, e^{\lambda t} d\lambda \quad (\gamma_1 > \gamma_0) \tag{2.5}$$

Приводим путь получения функции $W(z, \lambda)$, упрощение выражений для $\varphi(z, \varepsilon_1)$ и $w^*(x, \lambda)$, а также исследование решения $w_1(x, t)$.

Умножая обе части уравнения (2.1) на e^{-kx}, где $\operatorname{Re} k > 0$, и интегрируя по x от нуля до бесконечности, получим уравнение

$$\left(1 - \alpha^2 z^2 + \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{1 - z^2}}\right) W(z, \lambda) + \frac{\varepsilon_1}{\pi} \int\limits_1^\infty \left[W(\xi, \lambda) + \frac{\alpha}{1 + \alpha\xi} v^*(\lambda)\right] \times$$

$$\times \frac{d\xi}{(z - \xi)\sqrt{\xi^2 - 1}} + \varepsilon_1 \frac{v^*(\lambda)}{\lambda^2} \left[\frac{\alpha}{(1 + \alpha z)\sqrt{1 - z^2}} + \frac{1}{\pi} \int\limits_1^\infty \frac{d\xi}{(z + \xi)\,\xi \sqrt{\xi^2 - 1}}\right] +$$

$$+ \frac{\alpha^2}{\lambda^2} v^*(\lambda) + \frac{\alpha^2}{\lambda^2} \left[\frac{\partial w^*(x, \lambda)}{\partial x}\right]_{x=0} = 0 \qquad (0 < \operatorname{Re} z < 1) \tag{2.6}$$

Здесь $z = k / \lambda$, $\varepsilon_1 = \varepsilon / \lambda$, а функция

$$W(z, \lambda) = \int\limits_0^\infty e^{-kx} w_1^*(x, \lambda)\, dx \qquad (z = k / \lambda)$$

— трансформанта Лапласа для искомой функции $w_1^*(x, \lambda)$.

Условимся для функции $\omega = \sqrt{1 - z^2}$ выбирать ту ветвь, которая определена в плоскости z без лучей $(-1, -\infty)$ и $(1, +\infty)$ и которая принимает положительные значения при $-1 < z < 1$.

Опуская рассуждения и преобразования, проводимые при использовании вышеуказанного метода, получим из уравнения (2.6) функцию $W(z, \lambda)$ в виде (2.3).

Применяя к (2.3) теорему обращения, получим $w^*(x, \lambda)$ в виде (2.2).

Функция $\varphi(z, \varepsilon_1)$, определенная согласно (2.4), может быть представлена в виде

$$\varphi(z, \varepsilon_1) = \frac{(1 + \alpha z)\sqrt{1 + z}}{\alpha (z + a_1)(z + a_2)} \psi(z, \varepsilon_1) \tag{2.7}$$

где $-a_{1,2}$ — корни уравнения $\varepsilon_1 + (1 - \alpha^2 z^2)\sqrt{1 - z^2} = 0$, лежащие в полуплоскости $\operatorname{Re} z < 0$ при условии $\operatorname{Re} \varepsilon_1 > 0$ $(\operatorname{Re} \lambda > 0)$. При этом $a_{1,2} = \sqrt{1 - \omega_{1,2}^2}$, а $\omega_{1,2}$ равны

$$\omega_{1,2} = {}^1/_2 (\Omega_1 - \Omega_2) \pm {}^1/_2\, i \sqrt{3} (\Omega_1 + \Omega_2)$$

где

$$\Omega_{1,2} = \left\{\left[\frac{\varepsilon_1^2}{4\alpha^2} + \left(\frac{1 - \alpha^2}{3\alpha^2}\right)^3 \pm \frac{\varepsilon_1}{2\alpha^2}\right]^{1/2}\right\}^{1/3} \qquad (\Omega_{1,2} > 0 \text{ при } \varepsilon_1 > 0)$$

Функция $\psi(z, \varepsilon_1)$, равная

$$\psi(z, \varepsilon_1) = \exp\left[\frac{z}{\pi} \int\limits_0^\infty \ln \frac{(\sqrt{1 + \xi^2} + \omega_1)(\sqrt{1 + \xi^2} + \omega_2)}{\sqrt{1 + \xi^2} + \omega_3}\right] \frac{d\xi}{\xi^2 + z^2}$$

$$(\omega_3 = \Omega_1 - \Omega_2, \ \operatorname{Re} \omega_3 > 0) \tag{2.8}$$

регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$, на бесконечности ведет себя как $z^{1/2}$, имеет точку ветвления $z = -1$, в конечной части плоскости не имеет полюсов, а также нулей при условии $\operatorname{Re}\varepsilon_1 > 0$, а при $\varepsilon_1 = 0$

$$\psi(z, 0) = \frac{1 + \alpha z}{\alpha\sqrt{1 + z}}$$

Если в (2.3) устремить $\alpha \to 0$ ($\sigma \to 0$) и $\varepsilon_1 \to \infty$ ($h \to 0$) и учесть, что

$$\lim \sqrt{\varepsilon_1}\,\varphi(z, \varepsilon_1) = (1 + \alpha z)\sqrt{1 + z} \qquad \text{при } \varepsilon_1 \to \infty$$

о получим функцию $W(z, \lambda)$, которая совпадает с соответствующей функцией, найденной в работе [2] при решении задачи о вдавливании полуштампа в сжимаемую жидкость, что и следовало ожидать.

Принимая во внимание (2.3), (2.4) и (2.7), можно установить, что подынтегральная функция в (2.2) в полуплоскости $\operatorname{Re} z < 0$ имеет одну точку ветвления $z = -1$ и три полюса в точках $z = -a_1$, $z = -a_2$ и $z = -\xi$. Последний полюс имеет подынтегральная функция в выражении $W(z,\lambda)$ (2.3). Поскольку $\xi \geqslant 1$, то полюс z $z = -\xi$ лежит на линии разреза $(-1, -\infty)$.

Учитывая эти особенности и деформируя контур интегрирования в (2.2), после обычных преобразований получим

$$w_1^*(x, \lambda) = -\varepsilon\frac{v^*(\lambda)}{\lambda^2}\left\{\frac{2}{\alpha}\frac{\omega_1 + \omega_2}{a_1 - a_2}\sum_{n=1}^{2}(-1)^n\frac{\sqrt{1 - a_n}\,\omega_n f(a_n, \varepsilon_1)}{(\omega_n + \omega_3)\,\psi(a_n, \xi_1)}e^{-\lambda a_n x} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left[\frac{1}{\xi} - f(\xi, \varepsilon_1)\right]\frac{(1 + \alpha\xi)\sqrt{\xi^2 - 1}}{\varepsilon_1^2 + (1 - \alpha^2\xi^2)^2(\xi^2 - 1)}e^{-\lambda x\xi}d\xi\right\} \qquad (\operatorname{Re}\lambda > \gamma_0) \qquad (2.9)$$

где

$$f(z, \varepsilon_1) = \frac{1}{\varphi(z, \varepsilon_1)}\frac{1}{\pi}\int_1^\infty\frac{\varphi(\xi, \varepsilon_1)\,d\xi}{(\xi - z)\;(1 - \alpha^2\xi^2)\,\xi\sqrt{\xi^2 - 1}} \qquad (2.10)$$

Из (2.10) видно, что функция $f(\xi, \varepsilon_1)$ в точке $\xi = 1$ имеет особенность вида $(\xi - 1)^{-1}$. Под интеграл в (2.9) эта функция входит с множителем $(\xi - 1)^{1/2}$. Отсюда особенность под интегралом в (2.9) в точке $\xi = 1$ интегрируема.

Подынтегральная функция же в (2.10) имеет полюс в точке $\xi = 1/\alpha$. Этот интеграл следует понимать в смысле главного значения, в этом смысле он сходится.

Принимая во внимание зависимость от λ всех функций, входящих в правую часть (2.9), нетрудно установить, что найденная функция $w_1^*(x, \lambda)$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda > \gamma_0$, интегрируема и дважды дифференцируема по x. При этом интегрирование и дифференцирование второго слагаемого в (2.9) можно производить под знаком интеграла, так как интеграл до и после дифференцирования равномерно сходится относительно λx при $x \geqslant 0$. При этом $w_1^*(\infty, \varepsilon_1) = 0$.

Выясним, как ведет себя функция $w_1^*(x, \lambda)$ при $\operatorname{Im}\lambda \to \pm\infty$. Согласно (2.9), при $\operatorname{Re}\lambda = \gamma_1$ функция $w_1^*(x, \lambda)$ непрерывна при $x \geqslant 0$ и ограничена по модулю. При $\lambda \to \infty$ из (2.9) получим

$$w_1^*(x, \lambda) = -\varepsilon\frac{v^*(\lambda)}{\lambda^2}\frac{1}{\pi}\int_1^\infty\frac{e^{-\lambda x\xi} - e^{-\lambda x/\alpha}}{(1 - d\xi)^2(1 + \alpha\xi)\,\xi\sqrt{\xi^2 - 1}}d\xi + O\left[\frac{v^*(\lambda)}{\lambda^3}\right] \qquad (2.11)$$

так как при $\varepsilon_1 = 0$ ($\lambda = \infty$)

$$\varphi = 1, \qquad \psi = \frac{1 + \alpha z}{\alpha\sqrt{1 + z}}, \qquad a_{1,2} = \frac{1}{\alpha}, \qquad \omega_{1,2} = \pm i\left(\frac{1 - \alpha^2}{\alpha^2}\right)^{1/2}, \qquad \omega_3 = 0$$

$$\frac{\omega_1 + \omega_2}{a_1 - a_2}\frac{1}{\psi(a_{1,2}, 0)} = \frac{\alpha}{2}\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^{1/2}$$

Из (2.11) видно, что подынтегральная функция в точке имеет особенность вида

$$\frac{e^{-\lambda x\xi} - e^{-\lambda x/\alpha}}{(1 - \alpha\xi)^2} \approx -\frac{\lambda x}{1 - \alpha\xi} \qquad (\lambda \to \infty)$$

Эта особенность интегрируема в смысле главного значения и, следовательно,

$$|w_1^* (x, \lambda)| < C\lambda^{-1} v^* (\lambda)$$

где C — постоянная.

Функция $v^* (\lambda) \to 0$ при $\lambda \to \infty$ (обычное требование), поэтому интеграл

$$\int\limits_{\gamma_1 - i\infty}^{\gamma_1 + i\infty} w_1^* (x, \lambda)\, d\lambda$$

абсолютно сходится. Отсюда функция $w_1 (x, t)$, определенная интегралом (2.5), непрерывна при $x \geqslant 0$ и $t \geqslant 0$.

Далее, если потребовать, чтобы функция $v^* (\lambda)$ на бесконечности вела себя как

$$v^* (\lambda) \sim \lambda^{-(1+\delta)} \qquad (\lambda \to \infty,\ \delta > 0) \tag{2.12}$$

то функцию $w_1 (x, t)$ можно один раз дифференцировать под знаком интеграла по x и t. Интегралы после дифференцирования равномерно сходятся относительно x и t, и, следовательно, будут существовать непрерывные первые производные.

Аналогично, при условии

$$v^* (\lambda) \sim \lambda^{-(2+\delta)} \qquad (\lambda \to \infty,\ \delta > 0) \tag{2.13}$$

функцию $w_1 (x, t)$ можно дважды дифференцировать под знаком интеграл, и, следовательно, будут существовать непрерывные вторые производные.

3. Решение (2.5) получено формально; коротко остановимся на его обосновании.

Найденная функция $W (z, \lambda)$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$ и стремится к нулю, на бесконечности как z^{-2}; поэтому ее можно представить интегралом Коши

$$W (z, \lambda) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{W (\zeta, \lambda)}{\zeta - z}\, d\zeta \qquad (\operatorname{Re} z > 0) \tag{3.1}$$

Учитывая свойства подынтегральной функции в (3.1) и деформируя контур интегрирования, как и при преобразовании интеграла (2.2), получим

$$W (z, \lambda) = -\varepsilon \frac{v^* (\lambda)}{\lambda^2} \left\{ \frac{2}{\alpha} \frac{\omega_1 + \omega_2}{a_1 - a_2} \sum_{n=1}^{2} (-1)^n \frac{\sqrt{1 - a_n}\, \omega_n f (a_n, \varepsilon_1)}{(\omega_n + \omega_3)\, \psi (a_n, \varepsilon_1)} \frac{1}{z + a_n} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\pi} \int\limits_1^{\infty} \left[\frac{1}{\xi} - f (\xi, \varepsilon_1)\right] \frac{(1 + \alpha\xi) \sqrt{\xi^2 - 1}}{\varepsilon_1^2 + (1 - \alpha^2\xi^2)^2 (\xi^2 - 1)} \frac{d\xi}{z + \xi} \right\} (\operatorname{Re} z > 0) \tag{3.2}$$

Из (2.9) и (3.2) следует, что функции $w_1^* (x, \lambda)$ и $W (z, \lambda)$ связаны преобразованием Лапласа.

Полагая в (2.2) $x = 0$, принимая во внимание, что подынтегральная функция $W (z, \lambda)$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$ и стремится к нулю на бесконечности как z^{-2}, затем деформируя контур интегрирования в полуокружность радиуса R, лежащую в правой полуплоскости, и полагая $R \to \infty$, получим

$$w_1^* (0, \lambda) = 0 \tag{3.3}$$

что и должно выполняться в силу условия (1.8).

Покажем, что функция $w_1^* (x, \lambda)$ в виде (2.9) будет точным решением интегро-дифференциального уравнения (2.1).

В уравнении (2.1) интеграл

$$I_1 (x, \lambda) = \frac{\varepsilon}{\pi} \int\limits_0^{\infty} K_0 (\lambda |x - \xi|) w_1^* (\xi, \lambda)\, d\xi$$

может быть представлен в виде

$$I_1(x, \lambda) = \frac{\varepsilon}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{W(z, \lambda) e^{\lambda x z}}{\sqrt{1 - z^2}} dz \qquad (\operatorname{Re} z > 0) \tag{3.4}$$

если использовать интегральное представление функции Макдональда [6]

$$K_0(\lambda | x - \xi |) = \int_0^\infty \frac{\cos[\lambda (x - \xi) \eta]}{\sqrt{1 + \eta^2}} d\eta \qquad (\operatorname{Re} \lambda > 0)$$

Преобразовывая интеграл (3.4) так же, как и интеграл (2.2), получим

$$I_1(x, \lambda) = -\varepsilon \frac{v^*(\lambda)}{\lambda^2} \left\{ \frac{2}{\alpha} \frac{\omega_1 + \omega_2}{a_1 - a_2} \sum_{n=1}^{2} (-1)^n \frac{\varepsilon_1 \omega_n f(a_n, \varepsilon_1)}{\sqrt{1 + a_n} (\omega_n + \omega_3) \psi(a_n, \varepsilon_1)} e^{-\lambda a_n x} + \right.$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_1^\infty \left[\frac{\varepsilon_1^2}{(1 - \alpha\xi) \xi \sqrt{\xi^2 - 1}} + (1 - \alpha^2 \xi^2)(1 + \alpha\xi) \sqrt{\xi^2 - 1} f(\xi, \varepsilon_1) \right] \times$$

$$\left. \times \frac{e^{-\lambda x \xi} d\xi}{\varepsilon_1^2 + (1 - \alpha^2 \xi^2)^2 (\xi^2 - 1)} \right\} \tag{3.5}$$

Принимая во внимание равенство (3.4) и другое интегральное представление функции Макдональда [6]

$$K_0[\lambda (x + \xi)] = \int_1^\infty \frac{e^{-\lambda (x + \xi) \eta}}{\sqrt{\eta^2 - 1}} d\eta \qquad (x + \xi > 0, \ \operatorname{Re} \lambda > 0)$$

свободный член в уравнении (2.1) преобразуем к виду

$$I_1(x, \lambda) = \varepsilon \frac{(v^*(\lambda)}{\lambda \pi} \int_0^\infty \{ K_0(\lambda | x - \xi |) e^{-\lambda \xi / \alpha} + K_0[\lambda (x + \xi)] \} d\xi =$$

$$= \varepsilon \frac{v^*(\lambda)}{\lambda^2 \pi} \int_1^\infty \frac{e^{-\lambda x \xi}}{(1 - \alpha\xi) \xi \sqrt{\xi^2 - 1}} d\xi \tag{3.6}$$

Подставляя (2.9), (3.5) и (3.6) в уравнение (2.1) и принимая во внимание, что $a_{1,2}$ удовлетворяют алгебраическому уравнению $\varepsilon_1 + (1 - \alpha^2 z^2)\sqrt{1 - z^2} = 0$, получим тождество.

Тем самым доказано, что найденная функция $w_1^*(x, \lambda)$ действительно является решением интегро-дифференциального уравнения (2.1).

Как указано выше, при условии (2.13) существуют непрерывные производные

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1 - i\infty}^{\gamma_1 + i\infty} \lambda^2 w_1^*(x, \lambda) e^{\lambda t} d\lambda, \qquad \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1 - i\infty}^{\gamma_1 + i\infty} \frac{\partial^2 w_1^*(x, \lambda)}{\partial x^2} e^{\lambda t} d\lambda \tag{3.7}$$

Функция

$$p(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1 - i\infty}^{\gamma_1 + i\infty} \lambda^2 [I_1(x, \lambda) + I_2(x, \lambda)] e^{\lambda t} d\lambda \tag{3.8}$$

будет непрерывна, очевидно, и при более слабом условии (2.12).

Подставляя (3.7) и (3.8) в уравнение (1.6) и принимая во внимание (2.1), получим тождество.

Полагая $t = 0$ в (2.5) и в первой производной по t от интеграла (2.5), затем деформируя контур интегрирования, как и в случае (3.3), получим $w_1 = 0$, $\partial w_1 / \partial t = 0$ при $t = 0$. Из (3.3) следует, что $w_1(0, t) = 0$.

Отсюда найденное решение $w_1(x, t)$ в виде (2.5) при условии (2.13) будет точным решением уравнения (1.6) при условиях (1.7) и (1.8).

Единственность решения задачи очевидна.

В случае, когда функция $v(t)$ удовлетворяет условию (2.12), производные (3.7) не будут уже непрерывными. Однако комбинация вторых производных

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} - \alpha^2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_1 - i\infty}^{\gamma_1 + i\infty} \left[[\lambda^2 w^* (x, \lambda) - \alpha^2 \frac{\partial^2 w_1^* (x, \lambda)}{\partial x} \right] e^{\lambda t} d\lambda$$

как следует из (2.11), будет непрерывна.

Исследуем разрыв вторых производных в этом случае. Для этого возьмем функцию $v(t)$ в виде

$$v(t) = Vt^\delta \qquad (V = \text{const}, \ \delta > 0) \tag{3.9}$$

Тогда

$$v^*(\lambda) = V\Gamma(1 + \delta)\lambda^{-(1+\delta)} \tag{3.10}$$

где Γ — гамма-функция. Подставляя (3.10) в (2.5), принимая во внимание (2.11) при малых t, получим

$$w_1 = \frac{-\varepsilon V}{(1+\delta)(2+\sigma)\pi} \int\limits_1^\infty \frac{h(t - x\xi)(t - x\xi)^{2+\delta} - h(t - x/\alpha)(t - x/\alpha)^{2+\delta}}{(1-\alpha\xi)^2 (1+\alpha\xi)\xi\sqrt{\xi^2 - 1}} d\xi + O(t^3) \tag{3.11}$$

Здесь $h(t) = 1$ при $t > 0$ и $h(t) = 0$ при $t < 0$.

Из (3.11) следует, что вторые производные по x и t от $w_1(x, t)$ терпят разрыв второго рода на линии $x = \alpha t$, являющейся фронтом изгибных волн, распространяющихся по пластине со скоростью $a = \sqrt{\sigma / \rho}$. Этого и следовало ожидать, поскольку в данном случае, согласно (1.5),

$$w(x, t) = V(1+\delta)^{-1}(t - x/\alpha)^{1+\delta} + w_1(x, t)$$

и при $x = 0$, $t = 0$ вторые производные терпят разрыв. А так как дифференциальный оператор в уравнении (1.1) волновой, то этот разрыв сохранится при $t > 0$ в выражении $w_1(x, t)$, учитывающем влияние жидкости на деформацию пластины, и будет распространяться на пластине с безразмерной скоростью α.

4. Решение (2.11) найдено для времени $0 \leqslant t \leqslant 1$. Для времени $0 \leqslant t \leqslant \infty$ задача сводится к решению интегро-дифференциального уравнения более сложного, чем уравнение (2.1). Оно имеет вид

$$w_1^*(x, \lambda) - \frac{\alpha^2}{\lambda^2} \frac{\partial^2 w^*(x, \lambda)}{\partial x^2} + \frac{\varepsilon}{\pi} \int\limits_0^\infty \{K_0(\lambda|x - \xi|) + K_0[\lambda(x + 1 + \xi)]\} \times$$

$$\times w_1^*(\xi, \lambda) d\xi + \varepsilon \frac{v^*(\lambda)}{\lambda\pi} \left\{ \int\limits_0^\infty [K_0(\lambda|x - \xi|) + K_0(\lambda(x + 1 + \xi))] e^{-\lambda\xi/\alpha} d\xi + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^1 K_0[\lambda(x + \xi)] d\xi \right\} = 0 \qquad (x \geqslant 0) \tag{4.1}$$

Применение к уравнению (4.1) метода Винера-Хопфа-Фока приводит к уравнению Фредгольма второго рода для функции $W(z, \lambda)$

$$W(z, \lambda) + \frac{\varepsilon_1 \varphi(z, \varepsilon_1)}{(1 + \alpha z)\pi} \int\limits_1^\infty \frac{e^{-\lambda\xi} \varphi(\xi, \varepsilon_1) W(\xi, \lambda)}{(z + \xi)(1 + \alpha\xi)\sqrt{\xi^2 - 1}} d\xi = -\frac{\varepsilon_1 v^*(\lambda)}{\lambda^2} \frac{\varphi(z, \varepsilon_1)}{1 + \alpha z} \Phi(z, \lambda)$$

$$(\mathrm{Re}\, z > 0) \tag{4.2}$$

Решая уравнение (4.2) методом последовательных приближений, получим

$$W(z, \lambda) = -\varepsilon_1 \frac{v^*(\lambda)}{\lambda^2} \frac{\varphi(z, \varepsilon_1)}{1 + \alpha z} \left[\Phi(z, \lambda) + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^\infty \left(-\frac{\varepsilon_1}{\pi}\right)^n \int\limits_1^\infty \cdots \int\limits_1^\infty \Phi(\xi_n, \lambda) \prod_{i-1}^n \frac{\varphi^2(\xi_i, \varepsilon_1) e^{-\lambda\xi_i} d\xi_i}{(\xi_{i-1} + \xi_i)(1 + \alpha\xi_i)^2 \sqrt{\xi_i^2 - 1}} \right] \qquad (\xi_0 = z) \tag{4.3}$$

Здесь функция $\Phi(z, \lambda)$ равна

$$\Phi(z, \lambda) = \frac{1}{\pi} \int_1^\infty \frac{(1 - e^{-\lambda\xi}) \varphi(\xi, \varepsilon_1)}{(z+\xi)(1-\alpha^2\xi^2)\xi\sqrt{\xi^2-1}} d\xi$$

В результате функцию $w_1(x, t)$ найдем в виде

$$w_1(x, t) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\gamma_1 - i\infty}^{\gamma_1 + i\infty} e^{\lambda t} d\lambda \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \lambda W(z, \lambda) e^{\lambda x z} dz \qquad \begin{pmatrix} \gamma_1 > \gamma_0, & \gamma > 0; \\ x > 0, & 0 \leqslant t < \infty \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

Можно показать, что число слагаемых в (4.3) будет не бесконечно, как в (4.2), а конечно и не больше целой части безразмерного времени t.

5. Рассмотрим случай, когда тело после удара о пластину начинает двигаться с постоянной скоростью $v(t) = V$.

Решение задачи в этом случае может быть получено, очевидно, как предел обобщенного решения, соответствующего случаю (3.9), при $\delta \to 0$.

Принимая во внимание (3.11) и (3.12), устремляя в (3.11) $\delta \to 0$, а затем интегрируя по ξ, получим для малых времен с точностью до t^2

$$w = 0 \quad \text{при } \eta \geqslant 1, \qquad w = -\varepsilon V t^2 f(\eta; \alpha) \quad \text{при } \alpha \leqslant \eta \leqslant 1 \tag{5.1}$$

$$w = V\{t(1 - \alpha^{-1}\eta) + \varepsilon t^2 [(1 - \alpha^{-1}\eta)^2 f(0; \alpha) - f(\eta; \alpha)] \quad \text{при } 0 \leqslant \eta \leqslant \alpha$$

Здесь

$$\eta = \frac{x}{t}, \qquad f(\eta; \alpha) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \arccos \eta - \frac{(\eta + \alpha)^2}{4\alpha\sqrt{1-\alpha^2}} \ln \frac{1 + \alpha\eta + \sqrt{(1-\alpha^2)(1-\eta^2)}}{\eta + \alpha} - \right.$$

$$- \left[\frac{(\eta - \alpha)(\eta + 3\alpha)}{4\alpha\sqrt{1-\alpha^2}} - \frac{(\eta - \alpha)^2}{2\alpha(\sqrt{1-\alpha^2})^3} \right] \ln \left| \frac{1 - \alpha\eta + \sqrt{(1-\alpha^2)(1-\eta^2)}}{\eta - \alpha} \right| -$$

$$\left. - \frac{(\eta - \alpha)\sqrt{1-\eta^2}}{2(1-\alpha^2)} \right\} \tag{5.2}$$

Устремляя $\alpha \to 1$ в (5.2), получим

$$f(\eta; 1) = {}^1/_2\, \pi^{-1} [\arccos \eta + {}^3/_{16} (1 - \eta) \sqrt{1 - \eta^2}]$$

На фиг. 2 дана качественная картина формы деформированной пластины $w^\circ = w^\circ(\eta)$, полученная при помощи формул (5.1); при этом $w^\circ = w / Vt$. Решение в этом случае само непрерывно, а производные терпят разрыв на линии $x = \alpha t$. Кривые w° в точке $\eta = \alpha$ имеют вертикальную касательную (фиг. 2).

Определим силу $F(t)$, действующую на тело со стороны жидкости и пластины. Очевидно,

$$F(t) = \int_{-1}^{0} p(x, t)\, dx, \qquad F^*(\lambda) = \int_{-1}^{0} p^*(x, \lambda)\, dx \tag{5.3}$$

Из (1.2) следует, что

$$p^*(x, \lambda) = \frac{\lambda V}{\pi} \int_{-1}^{0} K_0(\lambda |x - \xi|) d\xi + \frac{\lambda^2}{\pi} \int_{-\infty}^{-1} K_0(\lambda |x - \xi|) w^*(\xi, \lambda) d\xi +$$

$$+ \frac{\lambda^2}{\pi} \int_0^\infty K_0(\lambda |x - \xi|) w^*(\xi, \lambda) d\xi = \frac{V}{\lambda\pi} \int_1^\infty \frac{2 - e^{\lambda x\xi} - e^{-\lambda(1+x)\xi}}{\xi\sqrt{\xi^2 - 1}} d\xi +$$

$$+ \frac{\lambda^2}{\pi} \int_0^\infty \{K_0[\lambda(x + \xi)] + K_0[\lambda(x + 1 + \xi)]\} w^*(\xi, \lambda) d\xi \qquad (-1 \leqslant x \leqslant 0) \tag{5.4}$$

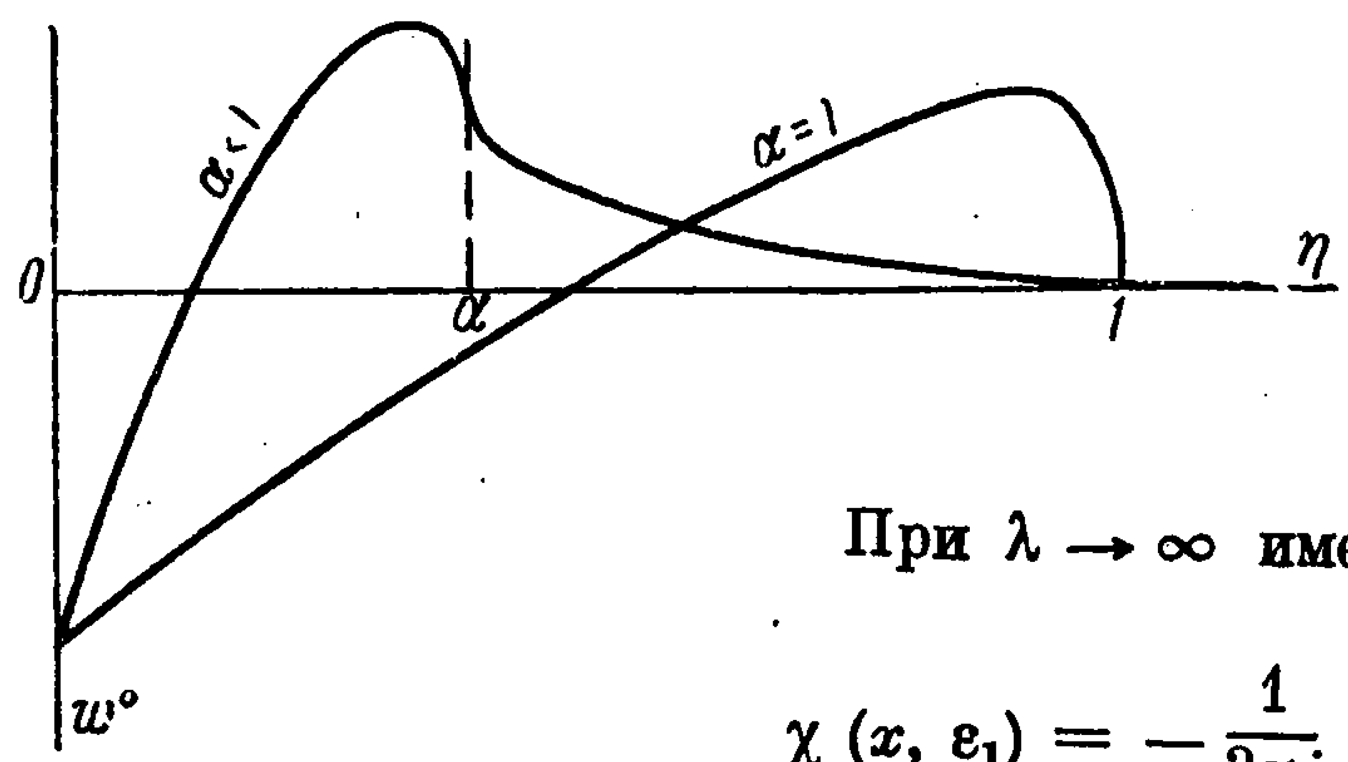
В рассматриваемом случае функция $w^*(x, \lambda)$ равна

$$w^*(x, \lambda) = V\lambda^{-2} e^{-\lambda x/\alpha} + w_1^*(x, \lambda) \tag{5.5}$$

Подставляя (5.5) в (5.4), затем (5.4) в (5.3) и интегрируя по x, получим

$$F^*(\lambda) = \frac{V}{\lambda} - \frac{2V}{\lambda^2\pi}\int\limits_1^\infty \frac{1-e^{-\lambda\xi}}{(1+\alpha\xi)\,\xi^2\sqrt{\xi^2-1}}\,d\xi + \frac{2\lambda}{\pi}\int\limits_1^\infty \frac{1-e^{-\lambda\xi}}{\xi\sqrt{\xi^2-1}}\,W(\xi,\lambda)\,d\xi \tag{5.6}$$

Функция $W(\xi, \lambda)$, входящая в (5.6), имеет довольно сложный вид (2.3). При выполнении обратного преобразования в (5.6) используем первую теорему разложения теории преобразования Лапласа [7]. Согласно этой теореме, если трансформанта при $\lambda \to \infty$ разлагается в ряд Лорана, то оригиналом является ряд по степеням t, который равномерно сходится и представляет собою целую функцию.



Фиг. 2

При $\lambda \to \infty$ имеем $\varepsilon_1 \to 0$. Обозначим через

$$\chi(x, \varepsilon_1) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty} \ln\left[1 + \frac{\varepsilon_1}{(1-\alpha^2\zeta^2)\sqrt{1-\zeta^2}}\right]\frac{d\zeta}{x-\zeta} \qquad (x \geqslant 1) \tag{5.7}$$

согласно (2.4), будем иметь

$$\varphi(x, \varepsilon_1) = e^{\chi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\chi^n(x, \varepsilon_1)}{n!} \tag{5.8}$$

Ряд (5.8) равномерно сходится относительно x при $x \geqslant 1$ и малом $|\varepsilon_1|$, так как при $\varepsilon_1 \to 0$ функция $\chi \to 0$.

При малом $|\varepsilon_1|$ разлагается в равномерно сходящийся ряд и функция

$$\chi(x, \varepsilon_1) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi_m(x)}{m}\,\varepsilon_1^m \tag{5.9}$$

Здесь

$$\chi_m(x) = \frac{(-1)^m}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty} \frac{d\zeta}{(1-\alpha^2\zeta^2)^m(1-\zeta^2)^{m/2}(x-\zeta)} =$$

$$= \frac{(-1)^m}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{x\,d\xi}{(x^2+\xi^2)(1+\alpha^2\xi^2)^m(1+\xi^2)^{m/2}} \tag{5.10}$$

Подставляя (5.9) в (5.8), будем иметь

$$\varphi(x, \varepsilon_1) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left[\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\chi_m}{m}\varepsilon_1^m\right]^n =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_1^n \sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m!}\sum_{(q_1,\ldots,q_k)}\left(\frac{\chi_1}{1}\right)^{q_1}\cdots\left(\frac{\chi_k}{k}\right)^{q_k}$$

Здесь суммирование совершается по таким комбинациям целых чисел $q_1, q_2, \ldots, q_k$, равных $1, 2, \ldots$, для которых

$$\sum_{i=1}^{k} q_i = m, \qquad \sum_{i=1}^{k} iq_i = n$$

После аналогичных преобразований получим

$$\varphi(z, \varepsilon_1)\,\varphi(\xi, \varepsilon_1) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{\lambda^n}\varphi_n(z, \xi) \qquad \left(\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{\lambda}\right) \tag{5.11}$$

где

$$\varphi_n(z, \xi) = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m!} \sum_{(q_1, \ldots, q_k)} \left[\frac{\chi_1(z) + \chi_1(\xi)}{1}\right]^{q_1} \cdots \left[\frac{\chi_k(z) + \chi_k(\xi)}{k}\right]^{q_k}$$

В результате, принимая во внимание (2.3) и (5.12), выполняя в (5.6) обратное преобразование, получим силу $F(t)$ в виде

$$F(t) = V\left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{n-1} C_n(\alpha) t^n\right] \qquad (5.12)$$

где коэффициенты $C_n(\alpha)$ равны

$$C_1 = \frac{2}{\pi}\left(1 - \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\alpha^2}{\sqrt{1-\alpha^2}} \ln \frac{1+\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha}\right)$$

$$C_2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2\alpha^2}{\sqrt{1+\alpha^2}} \ln \frac{1+\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha}\right) C_1(\alpha) + \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{\ln(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})\, d\xi}{\xi^2 (1+\alpha\xi)^2 (\xi^2 - 1)(1 - \alpha\xi}$$

$$C_n = \frac{2}{(n+2)\pi^2} \int_1^{\infty} \frac{d\xi}{(1+\alpha\xi)\,\xi \sqrt{\xi^2-1}} \int_1^{\infty} \frac{\varphi_n(\xi, \eta)\, d\eta}{(\xi+\eta)(1-\alpha^2\eta^2)\,\eta\sqrt{\eta^2-1}} \quad (n = 3, 4, \ldots)$$

Можно показать, что ряд (5.12) довольно быстро сходится.

В случае отсутствия пластины ($\varepsilon = \infty$, $\alpha = 0$) из (2.3) и (5.6), а также из результатов работы [1] можно получить простое выражение для силы $F_0(t)$, действующей на тело со стороны жидкости

$$F_0(t) = V(1 - t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1) \qquad (5.13)$$

Вычисляя для заданных значений α и ε численным интегрированием коэффициенты ряда (5.12) и сравнивая (5.12) и (5.13), можно оценить влияние пластины на удар тела о жидкость.

6. Пусть начальная скорость тела в момент удара о пластину равна V_0, а затем тело начинает двигаться с некоторой неизвестной скоростью $v(t)$. Определим закон движения тела.

В рассматриваемой задаче сила, действующая на тело со стороны жидкости и пластины, согласно принципу Дюамеля, будет равна

$$R(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{F(t-\tau)}{V} v(\tau)\, d\tau \qquad (6.1)$$

Здесь функцию $F(t)$ следует взять из решения предыдущей задачи согласно формуле (5.12).

Сила $R(t)$ направлена против движения тела, поэтому его уравнение движения в безразмерных величинах будет иметь вид

$$\frac{dv}{dt} = -\mu R(t) \qquad \left(\mu = \frac{\rho_0 l^2}{m}\right) \qquad (6.2)$$

Здесь m — масса тела, приходящаяся на единицу его длины. В реальных случаях параметр μ мал.

Принимая во внимание (5.12), подставляя (6.1) в (6.2), получим интегро-дифференциальное уравнение

$$\frac{dv(t)}{dt} + \mu v(t) - \mu \int_0^t K(t-\tau)\, v(\tau)\, d\tau = 0, \qquad K(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n\varepsilon^{n-1} C_n(\alpha)\, t^{n-1} \qquad (6.3)$$

Сохраняя в выражении ядра только первый член и решая операционным методом уравнение (6.3), при условии $v(0) = V_0$ получим приближенное решение

$$v(t) = V_0 e^{-0.5\mu t} [\operatorname{ch}(0.5\varkappa t) - \varkappa^{-1}\mu \operatorname{sh}(0.5\varkappa t)] \qquad (\varkappa = \sqrt{\mu^2 + 4\mu C_1(\alpha)}) \tag{6.4}$$

которое тем ближе к точному, чем меньше время t.

Из (6.4) следует, что

$$dv / dt < 0, \qquad d^2v / dt^2 > 0, \qquad dv / d\alpha < 0, \qquad dv / d\mu < 0$$

Зная $v(t)$, из (6.1) найдем силу сопротивления $R(t)$ как явную функцию от

$$R(t) = V_0 e^{-0.5\mu t} [\operatorname{ch}(0.5\varkappa t) - \varkappa^{-1}(\mu + 2C_1(\alpha)) \operatorname{sh}(0.5\varkappa t)] \tag{6.5}$$

Из (6.5) следует, что

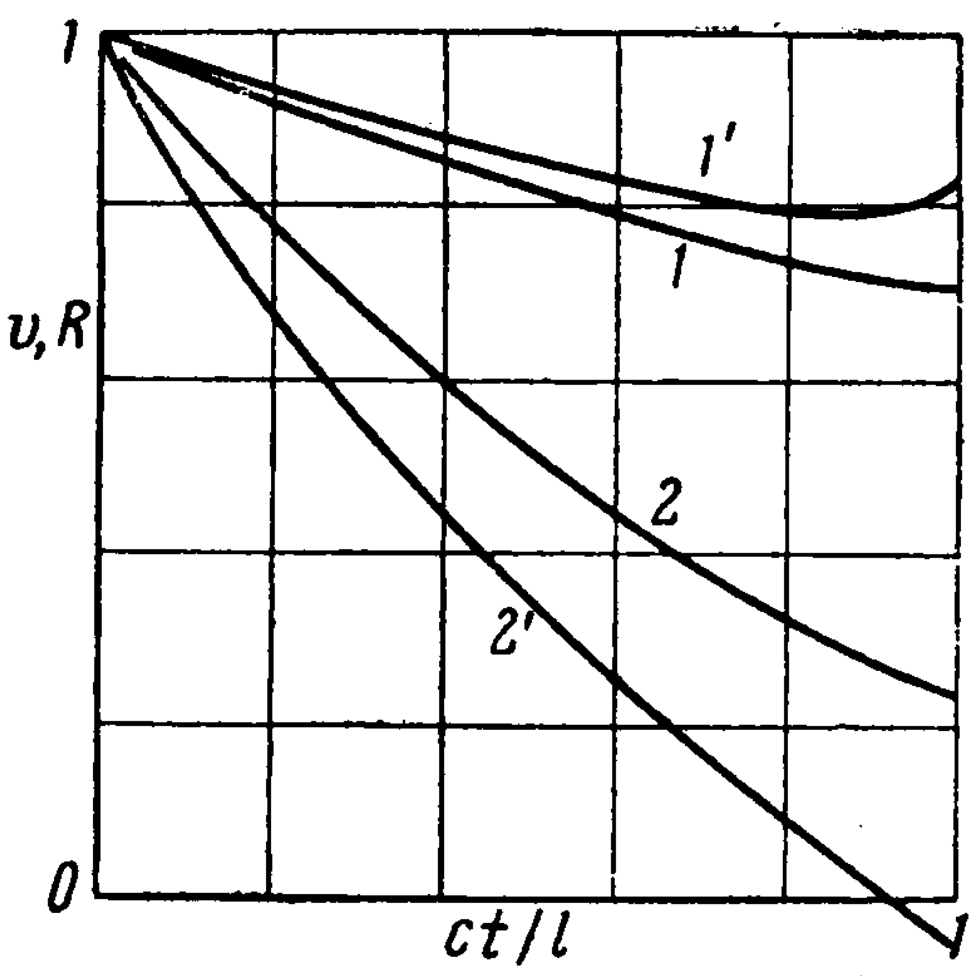
$$dR / dt < 0, \qquad d^2R / dt^2 > 0$$
$$\partial R / \partial\alpha > 0, \qquad \partial R / \partial\mu < 0$$

Результаты численных расчетов дают, что

1) если m велико ($\mu \approx 0$), то $v \approx V_0$, а R сильно зависит от параметра α;

2) если параметр μ растет (масса тела уменьшается), то зависимость v от параметра α усиливается, а зависимость R от α уменьшается.

Отсюда, если принять во внимание, что $\alpha = c^{-1}\sqrt{\sigma / \rho}$, сразу следует вывод: с ростом отношения σ / ρ скорости тела v уменьшается, а сила сопротивления R, действующая на тело, растет.



Фиг. 3

Известно [1], что в случае удара тела о поверхность сжимаемой жидкости его скорость $v_0(t)$ и сила $R_0(t)$, действующая на него со стороны жидкости, равны для $0 \leqslant t \leqslant 1$

$$v_0(t) = V_0 e^{-0.5\mu t} [\operatorname{ch}(0.5\varkappa_0 t) - \varkappa_0^{-1}\mu \operatorname{sh}(0.5\varkappa_0 t)] \tag{6.6}$$

$$(\varkappa_0 = \sqrt{\mu^2 + 4\mu})$$

$$R_0(t) = V_0 e^{-0.5\mu t} [\operatorname{ch}(0.5\varkappa_0 t) - \varkappa_0^{-1}(\mu + 2) \operatorname{sh}(0,5\varkappa_0 t)] \tag{6.7}$$

При помощи формул (6.4) — (6.7) можно провести численные оценки влияния пластины на удар тела о поверхность сжимаемой жидкости.

В качестве примера на фиг. 3 построены кривые *1*, *2* и *1'*, *2'* по формуле (6.4), (6.5) и (6.6), (6.7) соответственно для $\alpha = 0.8$ и $\mu = 0.4$. Как видно из графиков, влияние пластины на скорость тела незначительно, а более существенно на силу сопротивления.

Поступила 28 III 64

ЛИТЕРАТУРА

1. Галин Л. А. Удар по твердому телу, находящемуся на поверхности жидкости. ПММ, 1947, т. 11, вып. 5.
2. Флитман Л. М. Об одной смешанной краевой задаче для волнового уравнения. ПММ, 1958, т. 22, вып. 6.
3. Коул Р. Подводные взрывы. Изд. иностр. лит., 1950.
4. Мюнтц Г. Интегральные уравнения, т. I. Гостехтеоретиздат, 1934.
5. Фок В. А. О некоторых интегральных уравнениях математической физики. Матем. сб., 1944, т. 14 (56), вып. 1—2.
6. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, 1962.
7. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. Физматгиз, 1958.