

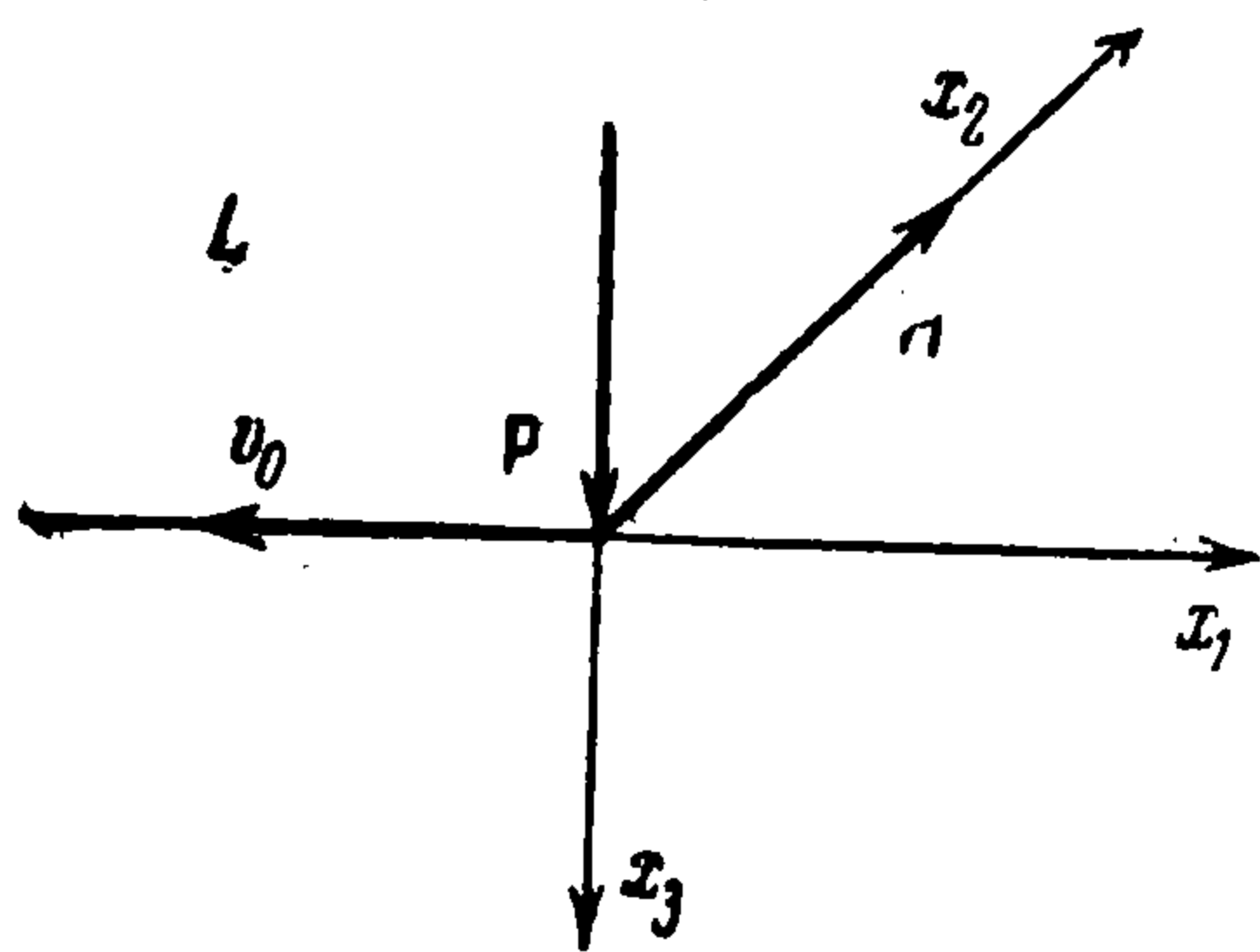
МЕХАНИЧЕСКАЯ ГЕНЕРАЦИЯ ЧЕРЕНКОВСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В КОНТАКТИРУЮЩИХ УПРУГОМ ПРОВОДНИКЕ И ЖИДКОСТИ, В ИЗОТРОПНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

С. К а л и с к и й
(Варшава, Польша)

Рассматривается плоская задача генерации черенковского излучения в идеально проводящих жидкости и упругом проводнике в магнитном поле при помощи подвижного механического импульса, движущегося в плоскости контакта обеих сред. Рассмотрен случай изотропного действия первичного магнитного поля. Решения даны для плоского случая, методом характеристик без учета дисперсии.

В первом параграфе выводятся исходные уравнения и граничные условия, во втором — рассматривается случай сверхмагнитнозвуковой скорости в обеих средах, в третьем — случай межмагнитнозвуковой скорости в упругом проводнике и сверхмагнитнозвуковой — в жидкости и в четвертом — случай сверхмагнитнозвуковой скорости в жидкости и домагнитнозвуковой — в упругом проводнике (предполагается, что скорость поперечных волн в упругом теле больше, чем магнитнозвуковая скорость в жидкости).

§ 1. Рассмотрим идеальный, упругий проводник, занимающий нижнее полупространство (фиг. 1) и идеально проводящую, сжимаемую идеальную жидкость L , заполняющую верхнее полупространство. На поверхности упругого проводника действует нормальная сила P , движущаяся со скоростью v_0 в направлении оси x_1 . Первичное поле действует изотропно в направлении оси x_2 . Обозначим $|H| = H_2 = H$. Система отсчета показана на фиг. 1. Гравитационным полем в жидкости пренебрегаем. Будем пред-



Фиг. 1

полагать, что жидкость первоначально напряжена настолько, что может переносить отрицательные давления. Кроме этого, для определенности предположим, что

$$a_1^* > a_2 > a_0^* \quad (1.1)$$

$$a_1^{*2} = a_1^2 + \kappa^2, \quad a_0^{*2} = a_0^2 + \kappa_0^2$$

$$a_1 = \left(\frac{\lambda + 2G}{\rho} \right)^{1/2}, \quad a_2 = \left(\frac{G}{\rho} \right)^{1/2}$$

$$\kappa^2 = \frac{\mu H^2}{4\pi\rho}, \quad \kappa_0^2 = \frac{\mu_0 H^2}{4\pi\rho_0}$$

Здесь a_0 — скорость акустической волны в жидкости, λ , G — упругие постоянные упругого проводника, ρ , ρ_0 — плотности упругого проводника в жидкости, μ , μ_0 — магнитные проницаемости упругого проводника и жидкости.

Предположение (1.1) несущественно, решение при других неравенствах проходит аналогично. В дальнейшем для упрощения будем принимать $\mu \approx \mu_0 \approx 1$. Воспользуемся нерелятивистскими уравнениями.

магнитогидродинамики [1] и упругого проводника ($v_0^2 / c^2 \ll 1$). Согласно [2], линеаризованные уравнения магнитоупругости для идеального упругого проводника и жидкости будут иметь вид

$$a_2^2 \nabla^2 \mathbf{u} + (a_1^2 - a_2^2) \text{grad div } \mathbf{u} + \frac{\mu}{4\pi\rho} [\text{rot rot } (\mathbf{u} \times \mathbf{H})] \times \mathbf{H} - \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.2)$$

где

$$\mathbf{E} = -\frac{\mu}{c} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \times \mathbf{H} \right), \quad \mathbf{h} = \text{rot } (\mathbf{u} \times \mathbf{H}) \quad (1.3)$$

$$a_0^2 \text{grad div } \mathbf{u}' + \frac{1}{4\pi\rho_0} [\text{rot rot } (\mathbf{u}' \times \mathbf{H})] \times \mathbf{H} - \frac{\partial^2 \mathbf{u}'}{\partial t^2} = 0 \quad (1.4)$$

где

$$\mathbf{E}' = -\frac{\mu_0}{c} \left(\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} \times \mathbf{H} \right); \quad \mathbf{h}' = \text{rot } (\mathbf{u}' \times \mathbf{H}) \quad (1.5)$$

Уравнения (1.2) и (1.4) были упрощены по $\partial / \partial t$ в предположении, что $\partial \mathbf{u} / \partial t \neq 0$ и $\partial \mathbf{u}' / \partial t \neq 0$. В случае $|\mathbf{H}| = H_2 = H$ уравнения (1.2) и (1.4) примут вид

$$a_2^2 \nabla^2 \mathbf{u} + (a_1^{*2} - a_2^2) \text{grad div } \mathbf{u} - \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = 0, \quad a_0^{*2} \text{grad div } \mathbf{u}' - \frac{\partial^2 \mathbf{u}'}{\partial t^2} = 0 \quad (1.6)$$

Граничные условия на поверхности полупространства будут иметь следующий вид:

$$\sigma_{3^{\circ}3^{\circ}} + T_{3^{\circ}3^{\circ}} - \sigma_{3^{\circ}3^{\circ}}' - T_{3^{\circ}3^{\circ}}' = -P\delta(x_1^{\circ} + v_0 t^{\circ}), \quad \sigma_{3^{\circ}1^{\circ}} = 0, \quad u_{3^{\circ}} = u_{3^{\circ}}' \quad (1.7)$$

Здесь $\sigma_{i^{\circ}k^{\circ}}$ — механическое напряжение в упругом проводнике, $\sigma_{i^{\circ}i^{\circ}}'$ — давление в жидкости, $T_{i^{\circ}k^{\circ}}$, $T_{i^{\circ}k^{\circ}}'$ — тензоры напряжений Максвелла в твердом теле и жидкости.

Тензоры Максвелла выражаются формулами при $\mu = \mu_0 \approx 1$

$$T_{i^{\circ}k^{\circ}} = \frac{1}{4\pi} [H_{k^{\circ}} h_{i^{\circ}} + H_{i^{\circ}} h_{k^{\circ}} - \mathbf{H}h\delta_{i^{\circ}k^{\circ}}] \quad (1.8)$$

$$T_{i^{\circ}k^{\circ}}' = \frac{1}{4\pi} [H_{k^{\circ}} h_{i^{\circ}}' + H_{i^{\circ}} h_{k^{\circ}}' - \mathbf{H}h'\delta_{i^{\circ}k^{\circ}}]$$

В случае $|\mathbf{H}| = H_2 = H$ и после выражения \mathbf{h} , \mathbf{h}' через \mathbf{u} , \mathbf{u}' условия (1.7) примут окончательно вид

$$\begin{aligned} \rho (a_1^{*2} - 2a_2^2) u_{1^{\circ},1^{\circ}} + \rho a_1^{*2} u_{3^{\circ},3^{\circ}} - \rho_0 a_0^{*2} u_{1^{\circ},1^{\circ}} - \rho_0 a_0^{*2} u_{3^{\circ},3^{\circ}} &= \\ &= -P\delta(x_1^{\circ} + v_0 t^{\circ}) \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$u_{1^{\circ},3^{\circ}} + u_{3^{\circ},1^{\circ}} = 0, \quad u_{3^{\circ}} - u_{3^{\circ}}' = 0$$

Здесь принято $u_{2^{\circ}} = u_{2^{\circ}}' = 0$ так как в случае плоской задачи, нагрузки не зависят от x_2 .

Введем дальше, аналогично [3], следующие потенциалы:

$$u_{1^{\circ}} = \Phi_{,1^{\circ}} + \Psi_{,3^{\circ}}, \quad u_{3^{\circ}} = \Phi_{,3^{\circ}} - \Psi_{,1^{\circ}}, \quad \mathbf{u}' = \text{grad } \varphi \quad (1.10)$$

Тогда система уравнений (1.6) сведется к следующим, отдельным для каждого потенциала, уравнениям (1.11)

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{a_1^{*2}} \Phi_{,t^{\circ}t^{\circ}} = 0, \quad \nabla^2 \Psi - \frac{1}{a_2^2} \Psi_{,t^{\circ}t^{\circ}} = 0, \quad \nabla^2 \varphi - \frac{1}{a_0^{*2}} \varphi_{,t^{\circ}t^{\circ}} = 0$$

Введем новую систему отсчета [3]

$$x_1 = x_1^{\circ} + v_0 t^{\circ}, \quad x_3 = x_3^{\circ}, \quad t = t^{\circ} \quad (1.12)$$

Будем рассматривать установившийся процесс, тогда уравнения (1.11) и граничные условия (1.9) примут вид

$$\begin{cases} \Phi_{,33} - \alpha_1^2 \Phi_{,11} = 0, & \Psi_{,33} - \alpha_2^2 \Psi_{,11} = 0, & \varphi_{,33} - \alpha_0^2 \varphi_{,11} = 0 \end{cases} \quad (1.13)$$

$$\begin{cases} (\alpha_1^2 = v_0^2 / a_1^{*2} - 1, & \alpha_2^2 = v_0^2 / a_2^2 - 1, & \alpha_0^2 = v_0^2 / a_0^{*2} - 1) \end{cases}$$

$$\rho (a_1^{*2} - 2a_2^2) u_{1,1} + \rho a_1^{*2} u_{3,3} - \rho_0 a_0^{*2} u'_{1,1} - \rho_0 a_0^{*2} u'_{3,3} = -P \delta(x_1) \quad (1.14)$$

$$u_{1,3} + u_{3,1} = 0, \quad u_3 - u_3' = 0$$

или

$$\begin{aligned} \rho (a_1^{*2} - 2a_2^2) \Phi_{,11} + \rho a_1^{*2} \Phi_{,33} - 2\rho a_2^2 \Psi_{,11} - \rho_0 a_0^{*2} \varphi_{,11} - \\ - \rho_0 a_0^{*2} \varphi_{,33} = -P \delta(x_1) \end{aligned} \quad (1.15)$$

$$2\Phi_{,13} + \Psi_{,33} - \Psi_{,11} = 0, \quad \Phi_{,3} - \Psi_{,1} - \varphi_{,3} = 0$$

Случай сверхмагнитнозвуковой скорости в обеих средах при выполнении, согласно условию (1.1), неравенства $\alpha_0^2 > \alpha_2^2 > \alpha_1^2$ имеет место, когда $v_0 > a_1^*$; случай межмагнитнозвуковой скорости в упругом проводнике и сверхмагнитнозвуковой скорости в жидкости — когда $a_0 < v_0 < a_1^*$; домагнитнозвуковой скорости в упругом проводнике и сверхмагнитнозвуковой скорости в жидкости — когда $a_0^* < v_0 < a_2$.

Эти три случая интервалов изменения скорости механического импульса v_0 рассматриваются ниже; в первом из них выступают три конуса черенковского излучения — два в упругом проводнике и один в жидкости, во втором — один в упругом проводнике и один в жидкости, в третьем — один конус в жидкости.

§ 2. При сверхмагнитнозвуковой скорости в обеих средах $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 > 0$. Решения уравнений (1.13) будем искать в виде

$$\begin{cases} \Phi = \Phi(x_1 - \alpha_1 x_3), & \Psi = \Psi(x_1 - \alpha_2 x_3), & \varphi = \varphi(x_1 + \alpha_0 x_3) \end{cases} \quad (2.1)$$

При $x_3 = 0$ из второго, третьего и первого граничных условий (1.15) находим последовательно

$$\Phi'' = -\frac{1 - \alpha_2^2}{2\alpha_1} \Psi'', \quad \varphi'' = -\frac{1 + \alpha_2^2}{2\alpha_0} \Psi'', \quad \Psi''(x_1) = \frac{P}{M} \delta(x_1) \quad (2.2)$$

Здесь штрихи означают дифференцирование по аргументу (2.3)

$$M = \rho [a_1^{*2} (1 + \alpha_1^2) - 2a_2^2] \frac{1 - \alpha_2^2}{2\alpha_1} - 2\rho a_2^2 \alpha_2 - \rho_0 a_0^{*2} (1 + \alpha_0^2) \frac{1 + \alpha_2^2}{2\alpha_0}$$

Интегрируя последнее уравнение (2.2), находим

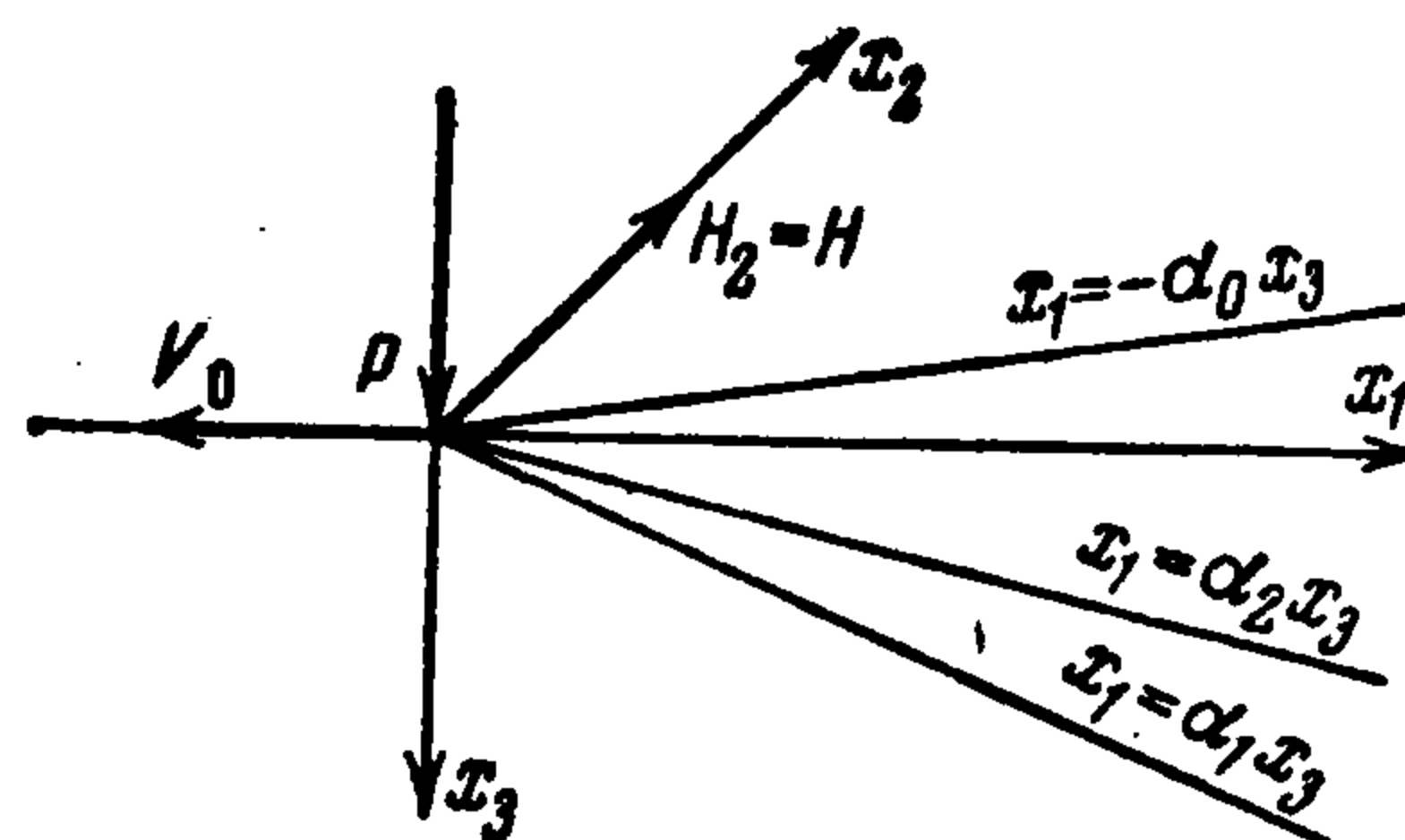
$$\Psi'(x_1 - \alpha_2 x_3) = \frac{P}{M} H(x_1 - \alpha_2 x_3) \quad (H - \text{функция Хевисайда}) \quad (2.4)$$

Постоянная интегрирования опущена: она может ввести лишь постоянное перемещение, которое будет несущественным.

В дальнейшем (а также в следующих параграфах) будем оперировать в этом смысле неоднозначно определенными перемещениями (однозначно будут определены, очевидно, производные перемещений). После вычисления Ψ' из двух других соотношений (2.1) определяются Φ' и φ' , а затем перемещения u_i, u_i' ($i = 1, 3$) с точностью до произвольных постоянных:

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{P}{M} \left[\frac{1 - \alpha_2^2}{2\alpha_1} H(x_1 - \alpha_1 x_3) + \alpha_2 H(x_1 - \alpha_2 x_3) \right] \\ u_1' &= -\frac{P}{M} \frac{1 + \alpha_2^2}{2\alpha_0} H(x_1 + \alpha_0 x_3) \\ u_3 &= \frac{P}{M} \left[\frac{1 - \alpha_2^2}{2} H(x_1 - \alpha_1 x_3) - H(x_1 - \alpha_2 x_3) \right] \\ u_3' &= -\frac{P}{M} \frac{1 + \alpha_2^2}{2} H(x_1 + \alpha_0 x_3) \end{aligned} \quad (2.5)$$

При помощи (2.5) по формулам (1.3) и (1.5) находим составляющие векторов поля в обеих средах (напомним, что $\partial(\dots)/\partial t^\circ$ надо заменить после преобразования на $v_0 \partial(\dots)/\partial x_1$). Из решений (2.5) видно, что при сверхмагнитнозвуковой скорости в обеих средах возникают три конуса черенковского излучения: два — в упругом проводнике, один — в жидкости (фиг. 2). Аналогично для составляющих поля. Как следует из решений (2.5), порядок величин деформаций или скорости $P\delta/M$ и $Pv_0\delta/M$ и, соответственно, порядок величин возмущенных магнитного и электрического полей в области конусов $HP\delta/M$ и $RHv_0\delta/cM$; в определении порядка величины символ δ имеет такой смысл, что определяет функцию влияния, которая при умножении на неособую функцию после интегрирования дает решение для данной нагрузки и позволяет сравнить порядок величин исследуемых параметров. Из приведенного рассмотрения следует, что когда нагрузки дают напряжения порядка границы упругости в упругом проводнике, тогда интенсивности поля черенковского излучения имеют порядок технических величин [3, 4].



Фиг. 2

§ 3. Рассмотрим межмагнитнозвуковую скорость импульса в упругом проводнике и сверхмагнитнозвуковую скорость в жидкости. Для построения решений в случае $a_0^* < a_2 < v_0 < a_1^*$ поступаем аналогично, как в работах [3] и [4], т. е. используем решения § 2, вводя вместо $-\alpha_1^2$ величину $\beta_1^2 > 0$ или $\alpha_1 = -i\beta_1$. Тогда первое из уравнений (1.13) становится эллиптическим.

В связи с этим, согласно [3], вводим в решениях (2.5) вместо функции $H(x_1 - \alpha_1 x_3)$ ее аналитическое продолжение

$$H(\xi) = H(x_1 + i\beta_1 x_3) = \frac{i}{\pi} \ln \xi + 1 = \frac{i}{\pi} \ln r + 1 - \frac{\varphi}{\pi} \quad (3.1)$$

где

$$\xi = x_1 + i\beta_1 x_3 = re^{i\varphi} \quad (3.2)$$

Функция $H(\xi)$ удовлетворяет эллиптическому уравнению для Φ и принимает значение функции Хевисайда на действительной оси. Определяя Ψ и φ из граничных условий или из соответственно выбранных аналитических продолжений, вычисляем функции u , u' . Сохраняя действительные части, получаем искомое решение проблемы. Решения удовлетворяют уравнениям и граничным условиям. После замены в выражении для M величины α_1 на $-i\beta_1$ получаем

$$M = s_1 + is_2 \quad (3.3)$$

$$s_1 = - \left[2\rho a_2^2 \alpha_2 + \rho_0 a_0^{*2} (1 + \alpha_0^2) \frac{1 + \alpha_2^2}{2\alpha_0} \right], \quad s_2 = \rho [a_1^{*2} (1 - \beta_1^2) - 2a_2^2] \frac{1 - \alpha_2^2}{2\beta_1}$$

Дальше

$$\frac{1}{M} = n_1 + in_2 \quad \left(n_1 = \frac{s_1}{s_1^2 + s_2^2}, \quad n_2 = -\frac{s_2}{s_1^2 + s_2^2} \right) \quad (3.4)$$

Отсюда после вычисления Ψ и φ , согласно (1.15), и после подстановки в (1.10) или же непосредственно из (2.5) на основе соответственно подобранных аналитических продолжений и после выделения действительных частей находим

$$\begin{aligned} u_1 &= P \left\{ \frac{1 - \alpha_2^2}{2\beta_1} \left[\frac{n_1}{\pi} \ln r + n_2 \left(1 - \frac{\varphi}{\pi} \right) \right] - n_1 \alpha_2 H(x_1 - \alpha_2 x_3) + \frac{\alpha_2 n_2}{\pi} \ln |x_1 - \alpha_2 x_3| \right\} \\ u_3 &= P \left\{ \frac{1 - \alpha_2^2}{2} \left[n_1 \left(1 - \frac{\varphi}{\pi} \right) - \frac{n_2}{\pi} \ln r \right] - n_1 H(x_1 - \alpha_2 x_3) + \frac{n_2}{\pi} \ln |x_1 - \alpha_2 x_3| \right\} \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$u_1' = -P \left[n_1 \frac{1 + \alpha_2^2}{2\alpha_0} H(x_1 + \alpha_0 x_3) - \frac{n_2}{\pi} \frac{1 + \alpha_2^2}{2\alpha_0} \ln |x_1 + \alpha_0 x_3| \right]$$

$$u_3' = -P \left[n_1 \frac{1 + \alpha_2^2}{2} H(x_1 + \alpha_0 x_3) - \frac{n_2}{\pi} \frac{1 + \alpha_2^2}{2} \ln |x_1 + \alpha_0 x_3| \right]$$

Как видно из (3.5), решение в упругой среде и в жидкости состоит из стационарной части и конуса черенковского излучения. Стационарные возмущения опережают фронты возмущений конусов черенковского излучения. Порядки величин отдельных параметров решений соответствуют установленным в предыдущем параграфе.

Вычисления составляющих поля в обеих средах при помощи соотношений (1.3) и (1.5) здесь не приводятся.

§ 4. Рассмотрим домагнитнозвуковую скорость импульса в упругом проводнике и сверхмагнитнозвуковую — в жидкости. Как и в § 3, введем обозначения

$$\alpha_1 = -i\beta_1, \quad \alpha_2 = -i\beta_2 \quad (4.1)$$

так как уравнения для Φ и Ψ перейдут из гиперболических в эллиптические.

Следовательно, положим, аналогично (4.1),

$$\begin{aligned} H(\xi_1) &= H(x_1 + i\beta_1 x_3) = \frac{i}{\pi} \ln \xi_1 + 1 = \frac{i}{\pi} \ln r_1 + 1 - \frac{\varphi_1}{\pi} \\ H(\xi_2) &= H(x_1 + i\beta_2 x_3) = \frac{i}{\pi} \ln \xi_2 + 1 = \frac{i}{\pi} \ln r_2 + 1 - \frac{\varphi_2}{\pi} \end{aligned} \quad (4.2)$$

где

$$\xi_1 = x_1 + i\beta_1 x_3 = r_1 e^{i\varphi_1}, \quad \xi_2 = x_1 + i\beta_2 x_3 = r_2 e^{i\varphi_2} \quad (4.3)$$

Подставляя (4.1) в (2.5), находим

$$\begin{aligned} M &= s_1 + i s_2, \quad s_1 = -\rho_0 a_0^{*2} (1 + \alpha_0^2) \frac{1 - \beta_2^2}{2\alpha_0} \\ s_2 &= \rho [a_1^{*2} (1 - \beta_1^2) - 2a_2^2] \frac{1 + \beta_2^2}{2\beta_1} + 2\rho a_2^2 \beta_2 \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\frac{1}{M} = n_1 + i n_2, \quad n_1 = \frac{s_1}{s_1^2 + s_2^2}, \quad n_2 = -\frac{s_2}{s_1^2 + s_2^2} \quad (4.5)$$

Подстановка этих выражений в (2.5) с соответствующими аналитическими продолжениями (или определенными из граничных условий функциями Ψ и φ) после отделения действительных частей приводит к следующему результату:

$$\begin{aligned} u_1 &= P \left\{ \frac{n_1}{\pi} \left[\frac{1 - \beta_2^2}{2\beta_1} \ln r_1 - \beta_2 \ln r_2 \right] + n_2 \left[\frac{1 + \beta_2^2}{2\beta_1} \left(1 - \frac{\varphi_1}{\pi} \right) - \beta_2 \left(1 - \frac{\varphi_2}{\pi} \right) \right] \right\} \\ u_3 &= P \left\{ n_1 \left[\frac{1 + \beta_2^2}{2} \left(1 - \frac{\varphi_1}{\pi} \right) - \left(1 - \frac{\varphi_2}{\pi} \right) \right] + \frac{n_2}{\pi} \left[\ln r_2 - \frac{1 + \beta_2^2}{2} \ln r_1 \right] \right\} \\ u_1' &= -P \left[\frac{1 - \beta_2^2}{2\alpha_0} n_1 H(x_1 + \alpha_0 x_3) - \frac{n_2}{\pi} \frac{1 - \beta_2^2}{2\alpha_0} \ln |x_1 + \alpha_0 x_3| \right] \\ u_3' &= -P \left[\frac{1 - \beta_2^2}{2} n_1 H(x_1 + \alpha_0 x_3) - \frac{n_2}{\pi} \frac{1 - \beta_2^2}{2} \ln |x_1 + \alpha_0 x_3| \right] \end{aligned} \quad (4.6)$$

Решение (4.6) дает только один конус черенковского излучения в жидкости (и стационарную часть). В упругой среде решение имеет стационарный характер (согласно с определением установления процесса после достаточно долгого отрезка времени). Как и ранее, производные (4.6) будут определены однозначно; векторы поля вычисляем из (1.3) и (1.5). Относительно порядков величин сохраняются замечания предыдущих параграфов.

Случая домагнитнозвуковой скорости в жидкости ($v_0 < a_0^*$) не рассматриваем, так как он не дает конусов излучения. Стационарное решение в этом случае легко тоже получить на основе решения (2.5).

Поступила 12 VII 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Сыроватский С. И. Магнитная гидродинамика. Успехи физ. наук, 1957, т. 62, № 3.
2. Kaliski S. Rayleigh waves between perfectly conducting fluid and solid body in a magnetic field. Proc. Vibr. Probl. 1962, v. 3, No 1.
3. Kaliski S. Cerenkov radiation in a perfect elastic conductor in a magnetic field of isotropic action, excited by a moving impulse, Proc. Vibr. Probl. 1963, v. 4, No 3.
4. Kaliski S. Cerenkov radiation in a perfect elastic conductor in a magnetic field of anisotropic action excited by a moving impulse, Proc. Vibr. Probl. 1963, v. 4, No 3.