Прикладная математика и механика. Том 28, 1964

О ВОЗМОЖНЫХ УПРОЩЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ ПОЛНОСТЬЮ ИОНИЗОВАННОЙ ДВУТЕМПЕРАТУРНОЙ ПЛАЗМЫ

В. В. Гогосов

(Москва)

Система уравнений, описывающая поведение двутемпературной (температура ионов не равна температуре электронов) полностью ионизованной плазмы [1], оказывается весьма сложной для решения конкретных задач.

В уравнения движения, кроме ионной вязкости, входит электронная вязкость, обычно выбрасываемая при одинаковых температурах электронов и ионов (однотемпературная плазма). Сильно усложняет задачу учет анизотропии коэффициентов переноса, что необходимо делать, когда $\omega_i\tau_i \geqslant 1$, $\omega_e\tau_e \geqslant 1$, здесь ω_e, ω_i — циклотронные частоты электронов и ионов, τ_e, τ_i — электронные и ионные «времена между столкновениями». Так, вместо двух коэффициентов теплопроводности для электронов и ионов и проводимости нужно писать три коэффициента теплопроводности для электронов, три — для ионов, три проводимости; вязкость в этом случае определяется пятью коэффициентами вязкости для электронов, пятью — для ионов и десятью вязкими тензорами второго ранга — для ионов и электронов.

В данной работе путем оценки различных членов в уравнениях проводится упрощение этих уравнений. Выписаны значения критических параметров, при которых различные упрощения (пренебрежение анизотропией коэффициентов переноса, электронной вязкостью в уравнении движения, вязкостью электронной и ионной в законе Ома и т. д.) могут быть сделаны. Оказывается, что при соответствующих значениях параметров в законе Ома необходимо учитывать вязкие члены, так что закон Ома становится дифференциальным уравнением, а не алгебраическим соотношением. Возможны случаи, когда в уравнении движения следует учитывать электронную вязкость и не нужно учитывать ионную и т. д. Большинство этих явлений связаны с двутемпературностью плазмы и в однотемпературной плазме не проявляются.

§ 1. Система уравнений для полностью ионизованной двутемпературной плазмы. Рассмотрим полностью ионизованную плазму, состоящую из двух компонент — электронов и ионов. Пусть для определенности ионы однократно ионизованы. В работе [1] получена система уравнений, описывающая поведение такой плазмы:

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \operatorname{div} n_e \mathbf{v}_e = 0, \qquad \frac{\partial n_i}{\partial t} + \operatorname{div} n_i \mathbf{v}_i = 0 \quad \left(\frac{d_j}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v}_j \nabla)\right) \tag{1.1}$$

$$\begin{gathered} m_e n_e \frac{d_e v_e{}^\alpha}{dt} = -\frac{\partial p_e}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial \pi_e{}^{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} - en\left(E_\alpha + \frac{1}{c}(\mathbf{v}_e \times \mathbf{H})_\alpha\right) + R_\alpha \\ m_i n_i \frac{d_i v_i{}^\alpha}{dt} = -\frac{\partial p_i}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial \pi_i{}^{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} + en\left(E_\alpha + \frac{1}{c}(\mathbf{v}_i \times \mathbf{H})_\alpha\right) - R_\alpha \end{gathered} \tag{1.2}$$

$$\begin{gathered} \frac{3}{2} n_e \frac{d_e T_e}{dt} + p_e \operatorname{div} \mathbf{v}_e = -\operatorname{div} \mathbf{q}_e - \pi_e{}^{\alpha\beta} \frac{\partial v_e{}^\alpha}{\partial x_\beta} + Q_e \\ \frac{3}{2} n_i \frac{d_i T_i}{dt} + p_i \operatorname{div} \mathbf{v}_i = -\operatorname{div} \mathbf{q}_i - \pi_i{}^{\alpha\beta} \frac{\partial v_i{}^\alpha}{\partial x_\beta} + Q_i \end{gathered} \tag{1.3}$$

Здесь n — число частиц в единице объема, $\mathbf{v}$ — скорость, m — масса частицы; p и π — давление и тензор вязких напряжений; e — заряд протона; $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ — электрическое и магнитное поля; T — температура; $\mathbf{R}$ — сила, с которой ионы действуют на электроны; $\mathbf{q}$ — поток тепла к данной компоненте. Индексом e обозначаются величины, относящиеся к электронам, индексом i — к ионам;

$$Q_e = -\mathbf{Ru} - \gamma\,(T_e - T_i), \qquad Q_i = \gamma\,(T_e - T_i), \tag{1.4}$$

$$\gamma = 3m_e n_e \,/\, m_i\tau_e, \qquad \mathbf{u} = \mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_u + \mathbf{R}_T, \qquad \begin{aligned} &\mathbf{R}_u = -\,\alpha_{\parallel}\mathbf{u}_{\parallel} - \alpha_{\perp}\mathbf{u}_{\perp} - \alpha_{\wedge}\,\mathbf{u}\times\mathbf{h}, \quad \mathbf{h} = \mathbf{H}\,/\,H \\ &\mathbf{R}_T = -\,\beta_{\parallel}{}^{uT}\,\nabla_{\parallel}T_e - \beta_{\perp}{}^{uT}\nabla_{\perp}T_e - \beta_{\wedge}{}^{uT}\,\mathbf{h}\times\nabla T_e \end{aligned} \tag{1.5}$$

$$\begin{aligned} &\mathbf{q}_e{}^u = \beta_{\parallel}{}^{Tu}\mathbf{u}_{\parallel} + \beta_{\perp}{}^{Tu}\mathbf{u}_{\perp} + \beta_{\wedge}{}^{Tu}\mathbf{h}\times\mathbf{u} \\ \mathbf{q}_e = \mathbf{q}_e{}^u + \mathbf{q}_e{}^T, \quad &\mathbf{q}_e{}^T = -\,\varkappa_{\parallel}{}^e\nabla_{\parallel}T_e - \varkappa_{\perp}{}^e\nabla_{\perp}T_e - \varkappa_{\wedge}{}^e\mathbf{h}\times\nabla T_e \\ &\mathbf{q}_i = -\,\varkappa_{\parallel}{}^i\nabla_{\parallel}T_i - \varkappa_{\perp}{}^i\nabla_{\perp}T_i + \varkappa_{\wedge}{}^i\,\mathbf{h}\times\nabla T_i \end{aligned} \tag{1.6}$$

Вид тензоров $\pi^{\alpha\beta}$ и коэффициентов α, β, $\varkappa$, η приведен в работе [1] (формулы (4.30) — (4.45)).

Значки $\parallel$ и $\perp$ у векторов означают, что берется компонента вектора, соответственно параллельная и перпендикулярная к магнитному полю.

При выводе уравнений использовалось, что

$$\varepsilon_j = {}^3/_2\, n_j T_j, \qquad c_v{}^j = {}^3/_2$$

где ε — внутренняя энергия единицы объема, c_v — теплоемкость, отнесенная к одной молекуле.

Для замыкания системы нужно добавить уравнения состояния для электронов и ионов $p_e = n_eT_e$, $p_i = n_iT_i$ и уравнения Максвелла

$$\begin{gathered} \operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\,\mathbf{j}, \qquad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\,\frac{1}{c}\,\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} \\ \operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \qquad \operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho_3 \end{gathered} \tag{1.7}$$

Будем в дальнейшем, не нарушая общности, считать плазму квазинейтральной $n_e \approx n_i \approx n$.

§ 2. Анизотропия коэффициентов переноса. Прежде всего возможно упростить выражения для коэффициентов переноса, входящих в формулы (4.30) — (4.45) [1], а значит, и выражения для потоков $\mathbf{R}$, $\mathbf{q}$. Из этих формул видно, что коэффициенты η, α, β, $\varkappa$ зависят от $\omega_e\tau_e$, $\omega_i\tau_i$.

Проводимость среды σ, определяемая обычно формулами

$$\sigma_{\parallel} = e^2n^2\,/\,\alpha_{\parallel}, \qquad \sigma_{\parallel} = e^2n^2\,/\,\alpha_{\perp}, \qquad \sigma_{\wedge} = e^2n^2\,/\,\alpha_{\wedge}$$

также зависит от $\omega_e\tau_e$.

Зависимость коэффициентов переноса от $\omega_e\tau_e$ и $\omega_i\tau_i$ называют анизотропией коэффициентов переноса. Как нетрудно видеть, при $\omega_e\tau_e \leqslant 1$, $\omega_i\tau_i \leqslant 1$ анизотропия не существенна, а значения коэффициентов переноса получаются из формул (4.30) — (4.45) работы [1], в которых нужно положить $\omega_e\tau_e = 0$ при $\omega_e\tau_e \ll 1$ и $\omega_i\tau_i = 0$ при $\omega_i\tau_i \ll 1$. При $\omega_e\tau_e \ll 1$, $\omega_i\tau_i \ll 1$ особенно сильно упрощаются тензоры вязких напряжений для электронов и для ионов соответственно. Вместо пяти коэффициентов вязкости для электронов и пяти для ионов остаются только четыре коэффициента вязкости: два — для электронов и два — для ионов.

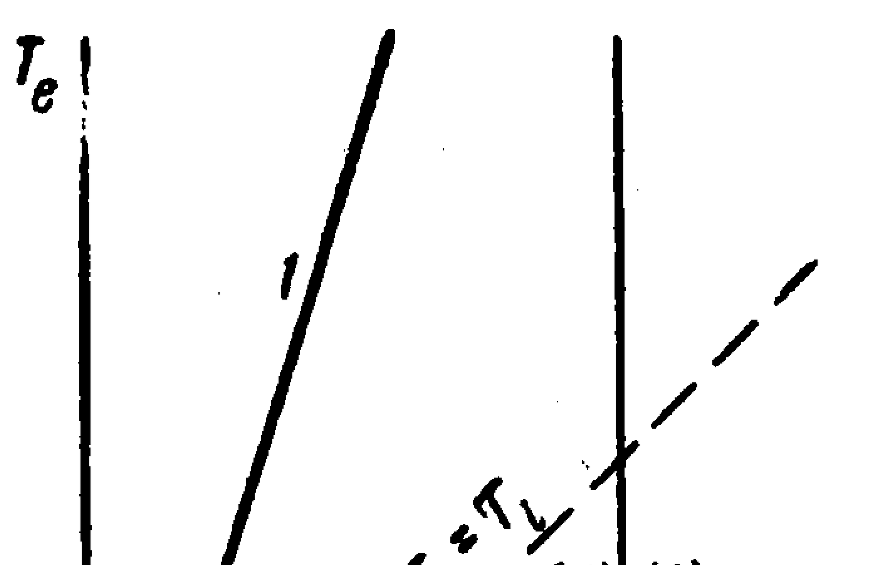
Выясним, при каких значениях макроскопических параметров величины $\omega_e\tau_e$ и $\omega_i\tau_i$ малы. Выражения для $\omega_e\tau_e$ и $\omega_i\tau_i$ известны [1]

$$\tau_e = \frac{3\sqrt{m_e}\,T_e^{3/2}}{4\sqrt{2\pi}\,\lambda e^4 n_e} = \frac{3.5\cdot 10^4}{0.1\lambda}\frac{T_e^{3/2}}{n}, \qquad \omega_e = \frac{eH}{m_e c} = 1.76\cdot 10^7 H \tag{2.1}$$

$$\tau_i = \frac{3\sqrt{m_i}\,T_i^{3/2}}{4\sqrt{\pi}\,\lambda e^4 n_i} = \frac{3\cdot 10^6}{0.1\lambda}\left(\frac{m_i}{2m_p}\right)^{1/2}\frac{T_i^{3/2}}{n}, \qquad \omega_i = 0.96\cdot 10^4 H\frac{m_p}{m_i}$$

$$\lambda = 23.4 - 1.15\lg n + 3.45\lg T_e$$

Значения T_e и T_i, при которых $\omega_e\tau_e = 1$, $\omega_i\tau_i = 1$, определяемые формулами (2.1), обозначим T_e^*, T_i^* соответственно. Можно найти явные выражения для T_e^*, T_i^*, если пренебречь влиянием зависимости λ от T_e, что приближенно верно при малых диапазонах изменения T_e вблизи $T_e \approx 1$ *эв*.



В плоскости T_e, T_i (фиг.) проведем прямые $T_e = T_e^*$, $T_i = T_i^*$. При этом получаем четыре области. В области (1) $\omega_e\tau_e < 1$, $\omega_i\tau_i < 1$ можно полностью пренебречь анизотропией коэффициентов переноса. В области (2) $\omega_e\tau_e < 1$, $\omega_i\tau_i > 1$ можно пренебречь анизотропией коэффициентов переноса, связанной с движением электронов, а в области (4) $\omega_e\tau_e > 1$, $\omega_i\tau_i < 1$ — анизотропией, связанной с движением ионов. В области (3) $\omega_e\tau_e > 1$, $\omega_i\tau_i > 1$ нужно учитывать анизотропию коэффициентов переноса, возникающую при движении ионов и электронов.

Вид коэффициентов переноса, которыми следует пользоваться в областях (1)—(4), дается формулами (4.30)—(4.45) работы [1], которые, как указывалось выше, значительно упрощаются при $\omega_e\tau_e \ll 1$, $\omega_i\tau_i \ll 1$, а также при $\omega_e\tau_e \gg 1$, $\omega_i\tau_i \gg 1$.

В последнем случае в формулах (4.30) — (4.45) нужно перейти к пределу при $\omega_e\tau_e \to \infty$, $\omega_i\tau_i \to \infty$.

Заметим, что в случае однотемпературной плазмы

$$\omega_e\tau_e / \omega_i\tau_i = (m_i / 2m_e)^{1/2}$$

поэтому для $\omega_e\tau_e$ порядка и даже больших единицы, $\omega_i\tau_i$ остается меньше единицы. В случае двутемпературной плазмы при больших T_i величина $\omega_i\tau_i$ может превышать величину $\omega_e\tau_e$.

§ 3. Оценка членов в уравнении движения. Вместо переменных n_e, n_i, $\mathbf{v}_e$, $\mathbf{v}_i$ удобно ввести, как это обычно делается и для однотемпературной плазмы, плотность ρ, среднюю скорость $\mathbf{v}$ и ток $\mathbf{j}$.

$$\rho = m_e n_e + m_i n_i, \qquad \rho\mathbf{v} = m_e n_e \mathbf{v}_e + m_i n_i \mathbf{v}_i, \qquad \mathbf{j} = en(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e) \tag{3.1}$$

В дальнейшем учтено, что $m_i / m_e \equiv m \gg 1$. (Заметим, что уравнения плазмы [1] также написаны с учетом этого обстоятельства.) Складывая одно с другим уравнения (1.1) и (1.2), получим [1] уравнения для ρ и $\mathbf{v}$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\rho\mathbf{v} = 0, \qquad \frac{\partial\rho v^\alpha}{\partial t} + \operatorname{div}\rho\mathbf{v}v^\alpha = -\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(p_e + p_i) -$$
$$- \frac{\partial}{\partial x_\beta}(\pi_e^{\alpha\beta} + \pi_i^{\alpha\beta}) + \frac{1}{c}\mathbf{j}\times\mathbf{H} - \operatorname{div}\rho_e\mathbf{u}\,u^\alpha \tag{3.2}$$

Оценим члены, входящие в уравнение движения (3.2). Для этого введем характерные параметры: размер L, скорость V, время задачи T, характерную частоту задачи $\Omega = V / L$, ток I, а также безразмерную разность

$$|\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e| / V \equiv I / enV \equiv U$$

Будем считать, что порядок инерционного члена, вязких сил, сил давления и диффузионного члена $\operatorname{div}\rho_e\mathbf{u}\,\mathbf{u}$ не превышает порядка электромагнитных сил, иначе, влиянием электромагнитных сил на среду вообще можно пренебречь. Отсюда следует

$$\begin{aligned} &|\operatorname{div}\rho_e\mathbf{u}\,\mathbf{u}| \leqslant \frac{1}{c}|\mathbf{j}\times\mathbf{H}|, \qquad \frac{U\Omega}{\omega_i} \leqslant m \\ &|\operatorname{div}\rho\,\mathbf{v}\mathbf{v}| \leqslant \frac{1}{c}|\mathbf{j}\times\mathbf{H}|, \qquad U \gtrsim \frac{\Omega}{\omega_i}, \qquad \frac{\Omega}{\omega_i} \leqslant m^{1/2} \end{aligned} \tag{3.3}$$

Заметим, что в случае $|\operatorname{div}\rho\mathbf{u}\mathbf{u}| \ll |[\mathbf{jH}]| / c\ (U \gg \Omega / \omega_i)$ инерционный член можно опустить в уравнении движения. При этом уравнение движения сводится либо к случаю магнитогидростатики (если вязкие силы меньше электромагнитных), либо к магнитогидродинамическому уравнению Стокса (если вязкие силы порядка электромагнитных).

Выясним, когда диффузионный член можно не учитывать в уравнении движения. Легко видеть, что $\operatorname{div}\rho_e\mathbf{u}\mathbf{u} / \operatorname{div}\rho\mathbf{v}\mathbf{v} = U^2 m^{-1}$. При $U \ll m^{1/2}$ диффузионный член $\operatorname{div}\rho_e\mathbf{u}\mathbf{u}$ может быть опущен в уравнении движения, которое совпадает в этом случае с уравнением движения в обычной магнитной гидродинамике. При $U \sim m^{1/2}$ диффузионный и инерционный члены одного порядка и в зависимости от конкретной задачи либо оба остаются в уравнении движения, либо выбрасываются по сравнению с другими членами. При $U \gg m^{1/2}$ инерционный член можно опустить в уравнении дви-

[1] Заметим, что суммы $p_e + p_i$, $\pi_e + \pi_i$, вообще говоря, не есть полное давление и вязкость смеси p и π, так как при определении p_j, π_j, T_j в качестве хаотической скорости j компоненты бралось $\mathbf{v}_j^x = \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_j$, а не $\mathbf{v}^x = \mathbf{v}_n - \mathbf{v}$ (здесь $\mathbf{v}_n$, $\mathbf{v}_j$, $\mathbf{v}$ — соответственно истинная скорость частицы j-го сорта, средняя скорость частиц j-го сорта, средняя скорость смеси) [2].

Учет разности между давлением (вязкостью и температурами), подсчитанным по $\mathbf{v}_j^x$ и $\mathbf{v}^x$, будет превышением точности. Это связано с тем, что выписанные уравнения справедливы при условии $|\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i| \ll v_e^T$ — тепловой скорости электронов. Заметим также, что при использовании хаотической скорости v^x для определения p_j, π_j, T_j член $\operatorname{div}\rho_e\mathbf{u}u^\alpha$ в уравнении движения не появляется [1,2].

жения, которое переходит в этом случае либо в магнитогидродинамическое уравнение Стокса, либо в уравнение магнитной гидростатики. Для оценок члена $\operatorname{div} \rho_e \mathbf{uu}$ его надо сравнивать в последних двух случаях с вязким или электромагнитным членами.

При $v_e / v_i \ll m$, $v_i \approx v$ — средняя скорость приближенно совпадает со средней скоростью ионов. В дальнейшем для определенности будем пользоваться этим, не нарушающим общности неравенством.

При выводе уравнений (1.1) — (1.3) [1] предполагалось, что $|\mathbf{u}| \equiv |\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i| \ll v_e^T$, где v_e^T — тепловая скорость электронов. Используя это неравенство, получим оценку

$$|\operatorname{div} \rho_e \mathbf{uu}| \sim \rho_e (\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i)^2 / L \ll n m_e v_e^{T2} / L \sim n T_e / L = p_e / L \qquad (3.4)$$

Проведем оценки членов в уравнении движения, когда порядок члена $|\nabla p_e| \sim p_e / L$, т. е. p_e, меняется на характерной длине на величину порядка p_e.

Заметим, что когда $|\operatorname{div} \rho \mathbf{vv}| \sim |\nabla p_e|$, столь большое изменение p_e может быть только при значительных изменениях скорости. При этом (3.4) член $\operatorname{div} \rho_e \mathbf{uu}$ может быть опущен в уравнении движения. В случае, когда сумма остальных членов правой части порядка $\operatorname{div} \rho_e \mathbf{uu}$, то и инерционный член имеет тот же порядок. При этом инерционный член может быть также опущен в уравнении движения в первом приближении. Если при этом вязкие члены меньше сил давления, то уравнение движения сводится к магнитогидростатике; если вязкие силы порядка сил давления, то уравнение движения оказывается магнитогидродинамическим уравнением Стокса (или просто гидродинамическим уравнением Стокса, если электромагнитные силы меньше сил давления).

Легко видеть, что

$$|\operatorname{div} \rho_e \mathbf{uu}| \ll c^{-1} |\mathbf{j} \times \mathbf{H}|, \qquad U\Omega / \omega_i \ll m \qquad \text{при } |\nabla p_e| \sim p_e / L \qquad (3.5)$$

Из (3.3) и (3.5) следует $\Omega / \omega_i \ll m^{1/2}$.

Нетрудно показать, что в случае, когда $|\nabla p_e| \sim p_e / L$, $|\nabla p_i| \sim p_i / L$, отношения $|\operatorname{div} \pi_e| / |\nabla p_e|$ и $|\operatorname{div} \pi_i| / |\nabla p_i|$ равны по порядку величин $\tau_e / T \ll 1$ и $\tau_i / T \ll 1$. Другими словами, в этом случае вязкость в уравнении движения можно не учитывать. Как указывалось выше, это справедливо лишь при довольно больших скоростях.

Сравним порядки вязких членов π_e и π_i. Для этого выпишем выражения для π_e^{xx}, π_i^{xx} для определенности в случае, когда поле направлено по оси z

$$\pi_i^{xx} = -\eta_0^i \left(\frac{1}{3} \operatorname{div} \mathbf{v} - \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) - \eta_1^i \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) - \eta_3^i \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)$$

$$\pi_e^{xx} = -\eta_0^e \left(\frac{1}{3} \operatorname{div} \mathbf{v} - \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{1}{3} \operatorname{div} \mathbf{u} - \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) - \qquad (3.6)$$

$$- \eta_1^e \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{\partial u_y}{\partial y}\right) - \eta_3^e \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right)$$

Остальные члены тензоров вязкости имеют тот же порядок, что и член π^{xx}. Заметим, что при любых $\omega_i \tau_i$ среди пяти коэффициентов ионной вязкости всегда есть, по крайней мере, один (η_0^i), порядок которого (см. § 4[1]) больше или равен порядку других коэффициентов вязкости $\eta_0^i \sim n_i T_i \tau_i$. То же самое можно сказать о коэффициентах электронной вязкости, которые по порядку меньше или равны $\eta_0^e \sim n_e T_e \tau_e$.

В дальнейшем будем различать два случая. Случай (A), когда $U \lesssim 1$, а значит, $\Omega / \omega_i \lesssim 1$ (3.3). Тогда в выражении для π_e порядок $\partial u^l / \partial x_k$ будет меньше или порядка $\partial v^l / \partial x_k$.

Случай (B), когда $U \gg 1$, при этом Ω / ω_i может быть любым. В этом случае порядок π_e определяется членами вида $\partial u^l / \partial x_k$.

Оценим порядок Ω / ω_i для характерного течения проводящей среды в канале. Пусть $V = 10^5$ *см/сек*, $L = 10^2$ *см*, $H = 10^4$ *гс*, тогда $\Omega = V / L \sim 10^3$ сек$^{-1}$, $\omega_i \sim 10^8$ сек$^{-1}$, $\Omega / \omega_i \sim 10^{-5} \ll 1$. Отсюда видно, что во многих интересных для практики случаях осуществляется неравенство $\Omega / \omega_i \ll 1$.

Сравнивая π_e и π_i согласно (3.6) и используя выражения (2.1) для τ_e, τ_i, получим, что в уравнении движения электронные и ионные вязкости одного порядка

$$\pi_e \sim \pi_i, \qquad \text{если } T_e \sim (2m)^{1/5} T_i \quad (A); \quad T_e = (2mU^{-2})^{1/5} T_i \quad (B)$$

Прямая *1*, описываемая уравнениями $T_e = (2m)^{1/5} T_i$ в случае (A) и и $T_e = (2mU^{-2})^{1/5} T_i$ — в случае (B), построена на фиг. Ниже этой прямой

$$T_e < (2m)^{1/5} T_i, \qquad T_e < (2mU^{-2})^{1/5} T_i, \qquad \pi_e < \pi_i$$

Выше этой прямой

$$T_e > (2m)^{1/5} T_i, \qquad T_e > (2mU^{-2})^{1/5} T_i, \qquad \pi_e > \pi_i$$

Таким образом, в случае двутемпературной плазмы при достаточно высоких электронных температурах возможны случаи, когда в уравнении движения нужно учитывать вязкост электронов наравне с вязкостью ионов, а иногда и в случае, когда ионной вязкостью мож. пренебречь. В случае однотемпературной плазмы обычно электронной вязкостью в уравнении движения пренебрегают. Как видно из проведенных оценок, это можно делать только при $U \ll (2m)^{-1/2}$. При U порядка или больше $(2m)^{1/2}$ электронная вязкость может по порядку величины соответственно быть сравнимой или превосходить ионную вязкость и должна учитываться в уравнении движения.

Как указывалось выше, порядок вязких членов не должен превышать порядка электромагнитных членов.

$$|\operatorname{div}(\pi_e + \pi_i)| \lesssim c^{-1} |\mathbf{j} \times \mathbf{H}| \tag{3.7}$$

В случае, когда $|\operatorname{div}(\pi_e + \pi_i)| \ll c^{-1} |\mathbf{j} \times \mathbf{H}|$, вязкость в уравнении движения можно выбросить.

§ 4. Оценки членов в обобщенном законе Ома. Складывая первое уравнение (1.2), умноженное на $-e / m_e$, со вторым уравнением, умноженным на e / m_i, используя (3.1) и имея в виду, что $m_i / m_e \equiv m \gg 1$, получим уравнение, называемое обобщенным законом Ома

$$\frac{d\mathbf{j}}{dt} + \mathbf{j} \operatorname{div} \mathbf{v} + (\mathbf{j}\nabla)\mathbf{v} - (\mathbf{j}\nabla)\frac{\mathbf{j}}{en} = \frac{e}{m_e}\nabla p_e - \frac{e}{m_i}\nabla p_i + \frac{e}{m_e}\operatorname{div}\pi_e -$$

$$- \frac{e}{m_i}\operatorname{div}\pi_i + \frac{e^2 n}{m_e}\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{H}\right) - \frac{e}{cm_e}\mathbf{j}\times\mathbf{H} - \frac{e}{m_e}\mathbf{R}_u - \frac{e}{m_e}\mathbf{R}_T \tag{4.1}$$

Выражения для $\mathbf{R}_u$, $\mathbf{R}_T$ берутся из (1.5).

Сравним порядки вязких членов $C_1 \equiv |\operatorname{div} \pi_e|\, e/m_e$, $C_2 \equiv |\operatorname{div} \pi_i|\, e/m_i$ в законе Ома. Можно показать, что

$$C_1 \sim C_2, \quad \text{если } (A)\ T_e \sim (2m^{-1})^{1/5}\, T_i, \qquad (B)\ T_e = (2m^{-1}\, U^{-2})^{1/5}\, T_i$$

Прямая *2*, описываемая уравнениями $T_e = (2m^{-1})^{1/5} T_i$ в случае (A) и $T_e = (2m^{-1}U^{-2})^{1/5} T_i$ — в случае (B), изображена на фиг. Прямые *1* и *2* разбивают квадрат на три области α_1, α_2 и α_3, в которых

$$(\alpha_1) \qquad (2m)^{1/5}\, T_i \lesssim T_e, \qquad (2mU^{-2})^{1/5}\, T_i \lesssim T_e \tag{4.2}$$

$$(\alpha_2) \quad (2m^{-1})^{1/5}\, T_i \ll T_e \ll (2m)^{1/5} T_i, \quad (2m^{-1}U^{-2})^{1/5}\, T_i \ll T_e \ll (2mU^{-2})^{1/5}\, T_i$$

$$(\alpha_3) \qquad T_e \lesssim (2m^{-1})^{1/5}\, T_i, \qquad T_e \lesssim (2m^{-1}U^{-2})^{1/5}\, T_i$$

Таким образом, в законе Ома (4.3)

$$\frac{|\operatorname{div} \pi_e|}{m_e} \gg \frac{|\operatorname{div} \pi_i|}{m_i} \ \text{ в области } \alpha_1 + \alpha_2, \qquad \frac{|\operatorname{div} \pi_e|}{m_e} \lesssim \frac{|\operatorname{div} \pi_i|}{m_i} \ \text{ в области } \alpha_3$$

В уравнении движения

$$|\operatorname{div} \pi_e| \gtrsim |\operatorname{div} \pi_i| \ \text{ в области } \alpha_1, \quad |\operatorname{div} \pi_i| \gg |\operatorname{div} \pi_e| \ \text{ в области } \alpha_2 + \alpha_3 \tag{4.4}$$

Оценим порядок вязких членов в законе Ома (4.1).

Члены $\operatorname{div} \pi_e / m_e$, $\operatorname{div} \pi_i / m_i$ будем сравнивать с членом $\mathbf{j} \times \mathbf{H} / cm_e$, используя формулы, (3.7), (4.4).

В области α_3 член $|\operatorname{div} \pi_e| \ll |\operatorname{div} \pi_i| \lesssim |\mathbf{j} \times \mathbf{H}| / c$, а значит, $|\operatorname{div} \pi_i| / m_i \ll |\mathbf{j} \times \mathbf{H}| / cm_e$. Следовательно, в законе Ома

$$|\operatorname{div} \pi_e| / m_e \lesssim |\operatorname{div} \pi_i| / m_i \ll |\mathbf{j} \times \mathbf{H}| / cm_e$$

и вязкие члены можно не учитывать.

В области α_2 член $|\operatorname{div} \pi_e| \ll |\operatorname{div} \pi_i| \lesssim |\mathbf{j} \times \mathbf{H}| / c$, а значит, $|\operatorname{div} \pi_e| / m_e \ll |[\mathbf{jH}]| / cm_e$. Следовательно, в законе Ома будем иметь

$$|\operatorname{div} \pi_i| / m_i \ll |\operatorname{div} \pi_e| / m_e \ll |\mathbf{j} \times \mathbf{H}| / cm_e$$

и вязкие члены можно не учитывать.

В области α_1 член $|\operatorname{div} \pi_i| \lesssim |\operatorname{div} \pi_e| \lesssim |\mathbf{j} \times \mathbf{H}| / c$, а значит, $|\operatorname{div} \pi_i| / m_e \lesssim |\operatorname{div} \pi_e| / m_e \lesssim |\mathbf{j} \times \mathbf{H}| / cm_e$. Следовательно, в законе Ома

$$|\operatorname{div} \pi_i| / m_i \ll |\operatorname{div} \pi_e| / m_e \lesssim |\mathbf{j} \times \mathbf{H}| / cm_e$$

Другими словами, в областях α_2, α_3 в законе Ома (4.1) не нужно учитывать вязкость. В области α_1 в законе Ома (4.1) не нужно учитывать ионную вязкость. Электронную вязкость в законе Ома нужно учитывать или не учитывать в области α_1 вместе с членом $\mathbf{j} \times \mathbf{H} / cm_e$, если в уравнении движения учитывается вязкость ($|\operatorname{div} \pi_i| \lesssim |\operatorname{div} \pi_e| \sim |\mathbf{j} \times \mathbf{H}| / c$). Электронную вязкость не нужно учитывать в области α_1, если в уравнении (3.2) не учитывается вязкость ($|\operatorname{div} \pi_i| \lesssim |\operatorname{div} \pi_e| \ll |\mathbf{j} \times \mathbf{H}| / c$).

Порядок невязких членов в законе Ома (4.1) выписывается ниже

$$
\begin{gathered}
C_3 \sim \left|\frac{d\mathbf{j}}{dt}\right| \sim |\mathbf{j}\operatorname{div}\mathbf{v}| \sim |(\mathbf{j}\nabla)\mathbf{v}| \sim IV/L \sim enV\Omega U \\
C_4 \sim \left|\frac{(\mathbf{j}\nabla)\mathbf{j}}{en}\right| \sim enV\Omega U^2, \quad C_5 \sim |\mathbf{R}_u|\frac{e}{m_e} \sim Ie^2n/\sigma m_e \sim neVU/\tau_e \\
C_6 \sim \frac{e^2n}{m_e c}|\mathbf{v}\times\mathbf{H}| \sim enV\omega_e, \qquad \frac{e^2n}{m_e}|\mathbf{E}| \gtrsim C_6 \qquad (4.5) \\
C_7' \sim \frac{e}{m_e}|\nabla p_e|, \quad C_7 \sim \frac{e}{cm_e}|\mathbf{j}\times\mathbf{H}| \sim enV\omega_e U, \qquad C_8 \sim |\mathbf{R}_T|\frac{e}{m_e} \sim C_7' \\
C_9' \sim \frac{e}{m_i}|\nabla p_i|, \quad C_9 \sim \frac{e}{cm_i}|\mathbf{j}\times\mathbf{H}| \sim enV\omega_e U m_e/m_i, \qquad C_7' \lesssim C_7
\end{gathered}
$$

Используя (4.5), сравним члены, входящие в закон Ома: (4.6)

$$
\frac{C_3}{C_5} \sim \tau_e/T, \qquad \frac{C_4}{C_7} \sim U\frac{\Omega m^{-1}}{\omega_i}, \qquad \frac{C_5}{C_6} \sim \frac{U}{\tau_e\omega_e}, \qquad \frac{C_7}{C_6} \sim U, \qquad \frac{C_9'}{C_7'} \sim \frac{T_i}{T_e}m^{-1}
$$

Используя (3.3), (4.6) можно записать в виде

$$
\frac{C_5}{C_6} \gtrsim \frac{\Omega}{\omega_i}\frac{1}{\tau_e\omega_e}, \qquad \frac{C_7}{C_6} \gtrsim \frac{\Omega}{\omega_i}, \qquad \frac{C_7}{C_5} \sim \omega_e\tau_e \qquad (4.7)
$$

Характерное время задачи T много больше электронного времени между столкновениями τ_e, поэтому из (4.6) следует, что $C_3 \ll C_5$. Следовательно, члены C_3, C_2 могут быть опущены в законе Ома. В случае, когда $|\nabla p_e| \sim p_e/L$ (выполняется неравенство (3.5)), член $C_4 \ll C_7$ и может быть опущен в законе Ома; если выполняются неравенства (3.3), возможны случаи, когда член C_4 нужно учитывать в законе Ома. Член $C_9' \lesssim C_9 \ll C_7$, поэтому далее член C_9' в законе Ома можно опустить. Обычно $T_e \gg T_i m^{-1}$ и член $C_7' \gg C_9'$ (4.6); в случае $T_e \lesssim T_i m^{-1}$ член $C_7' \lesssim C_9'$ и может быть также опущен во всех полученных ниже формах закона Ома.

§ 5. Возможные формы закона Ома. Выпишем, пользуясь полученными оценками, возможные упрощенные формы закона Ома. Рассмотрим вначале случай, когда порядок величины тока, а следовательно, параметр U неизвестны, а порядок Ω/ω_i и $\omega_e\tau_e$ известен. Тогда для сравнения членов в законе Ома нельзя пользоваться удобными оценками (4.6), а нужно использовать оценки (4.7), содержащие гораздо меньшую, по сравнению с (4.6), информацию.

1. Пусть $\omega_e\tau_e \ll 1$. При этом $C_1 \lesssim C_7 \ll C_5$, $C_4 \ll C_5$ (4.7), анизотропия коэффициентов переноса, связанная с движением электронов, отсутствует. Возможны следующие случаи.

1.1. Когда $\Omega/\omega_i \lesssim \omega_e\tau_e$; отношение C_5/C_6 может быть любым (4.7); закон Ома, вообще говоря, принимает вид

$$
\mathbf{j} = \sigma\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{H}\right) \qquad (5.1)
$$

1. 2. Когда $\Omega/\omega_i \gg \omega_e\tau_e$; при этом $C_5 \gg C_6$ (4.7); закон Ома принимает вид

$$
\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E} \qquad (5.2)
$$

2. Пусть $\omega_e\tau_e \sim 1$. При этом $C_1 \lesssim C_7 \sim C_5$. Возможны следующие случаи.

2.1. Когда $\Omega / \omega_i \lesssim \omega_e\tau_e$; отношение C_5 / C_6 может быть любым (4.7). Кроме того, в области α_1 вязкий член может быть порядка C_5 или C_6. Член C_4 может быть порядка C_5 при $U\Omega / \omega_i \sim m$ (4.6). Закон Ома принимает вид (5.3)

$$-\frac{m_e}{ne^2}(\mathbf{j}\nabla)\,\mathbf{j} = \nabla p_e + \operatorname{div}\pi_e + en\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\,\mathbf{v}\times\mathbf{H}\right) - \frac{1}{c}\,\mathbf{j}\times\mathbf{H} - \mathbf{R}_u - \mathbf{R}_T$$

2.2. Когда $\Omega / \omega_i \gg \omega_e\tau_e \sim 1$; при этом $C_5 \gg C_6$ (4.7). В области α_1 может быть $C_1 \sim C_5$. Член C_4 может быть порядка C_5 при $U\Omega / \omega_i \sim m$ (4.6). Закон Ома принимает вид

$$-\frac{m_e}{e^2n}(\mathbf{j}\nabla)\,\mathbf{j} = \nabla p_e + \operatorname{div}\pi_e + en\,\mathbf{E} - \frac{1}{c}\,\mathbf{j}\times\mathbf{H} - \mathbf{R}_u - \mathbf{R}_T \qquad (5.4)$$

3. Пусть $\omega_e\tau_e \gg 1$. При этом $C_7 \gg C_5$ (4.7). Члены C_6 и C_5 нужно сравнивать с C_7. Возможны следующие случаи.

3.1. Когда $\Omega / \omega_i \lesssim 1$; при этом отношение C_7 / C_6 может быть любым (4.7).

Кроме того, в области α_1 вязкий член C_1 может быть порядка C_7. Член C_4 может быть порядка C_7 при $U\Omega/w_i \sim m$ согласно (4.6). Закон Ома принимает вид

$$-\frac{m_e}{e^2n}(\mathbf{j}\nabla)\,\mathbf{j} = \nabla p_e + \operatorname{div}\pi_e + en\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\,\mathbf{v}\times\mathbf{H}\right) - \frac{1}{c}\,\mathbf{j}\times\mathbf{H} - \mathbf{R}_T \qquad (5.5)$$

3.2. Когда $\Omega/w_i \gg 1$; при этом $C_7 \gg C_6$. В области α_1 вязкий член C_1 может быть порядка C_7. Член C_4 может быть порядка C_7 при $U\Omega/w_i \sim m$ согласно (4.6). Закон Ома принимает вид

$$-\frac{m_e}{e^2n}(\mathbf{j}\nabla)\,\mathbf{j} = \nabla p_e + \operatorname{div}\pi_e + en\mathbf{E} - \frac{1}{c}\,\mathbf{j}\times\mathbf{H} - \mathbf{R}_T \qquad (5.6)$$

В области температур $\alpha_2 + \alpha_3$ в формах закона Ома (5.3) — (5.6) вязкий член $\operatorname{div}\pi_e$ не нужно учитывать. В области α_1 электронную вязкость нужно учитывать только при учете ее и в уравнении движения. В случае, когда выполняется неравенство $U\Omega / \omega_i \ll m$ (3.5), в (5.3) — (5.6) не нужно учитывать член $m_e(\mathbf{j}\nabla)\,\mathbf{j}/e^2n$. Именно при этих условиях закон Ома в форме (5.3) использовался в работе [3] при изучении теплообмена в полностью ионизованной двутемпературной плазме, движущейся в канале с магнитным полем.

При написании законов Ома использовалось, что $\mathbf{E}$ может быть больше и даже много больше члена $\mathbf{v}\times\mathbf{H} / c$. Если $|\mathbf{E}| \sim |\mathbf{v}\times\mathbf{H}| / c$, то в тех формах закона Ома, в которых опущен член $\mathbf{v}\times\mathbf{H} / c$, следует опустить и $\mathbf{E}$.

Если известны порядки величин U и $\omega_e\tau_e$, то, пользуясь оценками (4.6), можно выписать формы закона Ома более определенно.

1. Пусть $\omega_e\tau_e \ll 1$; при этом $C_1 \lesssim C_7 \ll C_5$, $C_4 \ll C_5$. Возможны следующие случаи.

1.1. Когда $U \sim \omega_e\tau_e$; при этом $C_5 \sim C_6$. Закон Ома принимает вид (5.1)

1.2. Когда $U \ll w_e\tau_e$; при этом $C_5 \ll C_6$. Закон Ома принимает вид

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\,[\mathbf{vH}] \qquad (5.7)$$

1.3. Когда $U \gg \omega_e\tau_e$; при этом $C_5 \gg C_6$. Закон Ома принимает вид (5.2).

2. Пусть $\omega_e\tau_e \sim 1$; при этом $C_5 \sim C_7$. Возможны следующие случаи.

2.1. Когда $U \ll 1$; при этом $\Omega / \omega_i \ll 1$ (3.3), $C_4 \ll C_7 \ll C_6$. Закон Ома принимает форму (5.7).

2.2. Когда $U \sim 1$; при этом $C_1 \lesssim C_7 \sim C_5 \sim C_6$, $C_4 \ll C_7$ (4.6). Закон Ома принимает вид (выписан в случае, когда $C_1 \sim C_7$)

$$0 = \nabla p_e + \operatorname{div} \pi_e + en\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\,\mathbf{v}\times\mathbf{H}\right) - \frac{1}{c}\,\mathbf{j}\times\mathbf{H} - \mathbf{R}_u - \mathbf{R}_T \tag{5.8}$$

2.3. Когда $U \gg 1$; при этом $C_1 \lesssim C_7 \sim C_5 \gg C_6$. При $U\Omega / \omega_i \sim m$ (4.6) член C_4 может быть порядка C_5. Закон Ома принимает вид (5.4) (выписан в случае, когда $C_1 \sim C_7$, $C_4 \sim C_7$).

В случаях, когда вязкость не существенна и $U\Omega / \omega_i \ll m$, члены $\operatorname{div} \pi_e$, $m_e(\mathbf{j}\nabla)\,\mathbf{j} / e^2 n$ в законе Ома в последних двух случаях следует опустить.

3. Пусть $\omega_e \tau_e \gg 1$; при этом $C_7 \gg C_5$. Возможны следующие случаи.

3.1. Когда $U \ll 1$; закон Ома сводится к форме (5.7).

3.2. Когда $U \sim 1$, $C_4 \ll C_7 \sim C_6$, $C_1 \lesssim C_7$. Закон Ома принимает вид (выписан в случае, когда $C_1 \sim C_7$).

$$0 = \nabla p_e + \operatorname{div} \pi_e + en\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\,\mathbf{v}\times\mathbf{H}\right) - \frac{1}{c}\,\mathbf{j}\times\mathbf{H} - \mathbf{R}_T \tag{5.9}$$

3.3. Когда $U \gg 1$; при этом $C_7 \gg C_6$, $C_1 \lesssim C_7$. При $U\Omega / \omega_i \sim m$ член C_4 может быть порядка C_7. Закон Ома принимает вид (5.6) (выписан в случае, когда $C_1 \sim C_7$, $C_4 \sim C_7$).

В случаях, когда вязкость не существенна и $U\Omega / \omega_i \ll m$, члены $\operatorname{div} \pi_e$ и $m_e\,(\mathbf{j}\nabla)\,\mathbf{j} / e^2 n$ в законе Ома (5.9), (5.6) в последних двух случаях нужно опустить.

Заметим, что при оценке порядков членов предполагалось, что $C_8 \sim C_7$ $(n\nabla T_e \sim \nabla p_e)$. Однако возможны случаи, когда $C_8 \ll C_7$ и $C_8 \gg C_7$ (например, в пограничном слое). В последнем случае член C_8 нужно сравнивать с C_6 или с членом $e^2 nE/m_e$ и при равенстве порядков оставлять (выбрасывать) во всех формах закона Ома (формулы (5.1) — (5.9)), когда остаются (выбрасываются) указанные члены.

Пусть $V \sim 10^5$ *см/сек*, $H \sim 10^4$ *гс*, изменение T_e на длине L *см* порядка $10^{4\circ}$ *K*, $E \sim VH/c \sim 10^{-1}\, г^{1/2} см^{-1/2} сек^{-1}$. Тогда из $C_8 \sim C_6$ следует $E \sim 10^{-3} L^{-1} г^{1/2} см^{-1/2} сек^{-1}$. Отсюда видно, что при $L \sim 10^{-2}$ *см* член C_8 порядка C_6.

Если $\mathbf{E} \sim |\,\mathbf{v} \times \mathbf{H}\,| / c$, то $\mathbf{E}$ можно выбросить из закона Ома всегда когда выбрасывается член $\mathbf{v}\times\mathbf{H} / c$.

Из проведенных оценок следует, что при достаточно высоких электронных температурах в законе Ома в некоторых случаях нужно учитывать члены, связанные с вязкостью электронов, так что закон Ома становится не алгебраическим соотношением, а нелинейным дифференциальным уравнением.

В случае однотемпературной плазмы оценки членов в законе Ома проводились в [4] в предположениях $U \sim \Omega / \omega_i$ (инерционные члены порядка электромагнитных) и $\pi_e \ll \pi_i$. Для температур $T_e \sim T_i$ результаты данной работы дают возможные упрощенные формы уравнения движения и закона Ома для однотемпературной плазмы, полученные без этих предположений, а потом не совпадающие с результатами [4].

Поступила 3 VI 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Брагинский С. Н. Явления переноса в полностью ионизованной плазме, Сб. «Вопросы теории плазмы». Госатомиздат, 1963.
2. Kihara T. Macroscopic Foundation of Plasma dynamics. J. Phys. Soc. Japan, 1958, v. 13, No. 5 (русский перев.: Сб. «Движущаяся плазма». Изд. иностр. лит., 1961).
3. Гогосов В. В. Теплообмен в полностью ионизованной неизотермической плазме, движущейся в канале с магнитным полем, ПМТФ, 1964, № 2.
4. Баранов В. Б., Любимов Г. А. О форме обобщенного закона Ома в полностью ионизованном газе. ПММ, 1960, т. 25, вып. 1.