Прикладная математика и механика. Том 28, 1964

О ВЯЗКОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ НА ЭЛЕКТРОДЕ ПРИ ПЕРЕМЕННОЙ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ СРЕДЫ

Г. А. Любимов

(Москва)

В работе [1] рассмотрена постановка задачи о вязком пограничном слое при постоянной электропроводности среды. Показано, что в рамках теории пограничного слоя касательная составляющая электрического поля не меняется поперек пограничного слоя, а изменение нормальной составляющей электрического поля вычисляется из условия $j^\circ_n = \text{const}$.

При этом задачи о пограничном слое и внешнем потоке разделяются.

Если обтекаемая поверхность — электрод и ее температура много ниже температуры внешнего потока, то благодаря зависимости электропроводности от температуры в пограничном слое может концентрироваться объемный заряд, значительно больший, чем в случае $\sigma = \text{const}$. Ниже будут получены уравнения, описывающие изменение электрического поля поперек пограничного слоя в этом случае. Показывается, что когда сопротивление пограничных слоев становится (вследствие большой разности температур стенки и ядра потока) сравнимым с сопротивлением ядра потока между двумя электродами, задача о пограничном слое не отделяется, вообще говоря, от задачи во внешнем потоке. Проведены оценки в уравнениях пограничного слоя, показывающие, что в последнем случае внутри вязкого пограничного слоя существует «тепловой подслой», в котором происходит интенсивное выделение джоулева тепла и который несет основное электрическое сопротивление. Для простоты рассматривается только случай изотропно проводящей среды.

1. Вязкий пограничный слой на электроде при наличии параллельного электроду магнитного поля (такая ситуация имеет место, как правило, на электродах магнитогидродинамических устройств) несет объемный электрический заряд [1]. Плотность объемного заряда определяется из закона Ома и при $R_m \ll 1$ и $\sigma = \sigma(T) = \sigma(x,y,z)$ дается соотношением

$$4\pi\rho_e = -\frac{1}{c}\mathbf{H}\operatorname{rot}\mathbf{v} - \frac{1}{\sigma^2}\mathbf{j}\cdot\operatorname{grad}\sigma \tag{1.1}$$

Произведя в этом уравнении оценки пограничного слоя [1] для гидродинамических величин, получим, что главная часть плотности заряда в пограничном слое определяется соотношением

$$4\pi\rho_e^\circ = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{v}_\tau \times \mathbf{H})_y - \frac{1}{\sigma^2} j_y^\circ \frac{\partial\sigma}{\partial y} \tag{1.2}$$

Здесь y — координата, нормальная обтекаемой поверхности, индекс τ обозначает проекцию вектора на касательную плоскость x, z, индекс 0 указывает, что соответствующие величины вычислены с точностью до членов порядка единицы (по отношению к δ — толщине пограничного слоя).

При $\sigma = \text{const}$ второй член (B) в равенстве (1.2) обращается в нуль, плотность заряда в пограничном слое определяется первым членом (A) в (1.2), и ее влияние на распределение электрического поля в слое подробно изучено в [1]. Второй член в (1.2) связан с плотностью заряда, возникающей за счет переменности проводимости. В силу линейности уравнений электродинамики можно изучать отдельно влияние этого заряда на распределение поля в слое. Кроме того, в ряде случаев, которые в основном будут рассматриваться здесь, плотность заряда, связанная с переменностью проводимости (B), значительно больше плотности заряда, связанной с переменностью скорости в пограничном слое (A). Действительно, если через σ_0 обозначить среднюю электропроводность в пограничном слое, то отношение членов, стоящих в правой части (1.2), имеет порядок $B/A \sim j_y^{\circ} c/\sigma_0 UH$. Если, кроме того,

$$j_y^{\circ} \gtrsim \frac{\sigma_\infty UH}{c} \tag{1.3}$$

то

$$\frac{B}{A} \gtrsim \frac{\sigma_\infty}{\sigma_0} \sim \frac{r_0}{r}\frac{h}{\delta} \gg 1 \quad \text{при } r \sim r_0, \quad r = \frac{h}{\sigma_\infty}, \quad r_0 = \int_0^\delta \frac{dy}{\sigma} \sim \frac{\delta}{\sigma_0} \tag{1.4}$$

Здесь r — внутреннее сопротивление ядра потока между двумя электродами ($\sigma_\infty = \text{const}$), r_0 — сопротивление пограничного слоя. В дальнейшем будем интересоваться условиями, при которых $r_0 \gtrsim r$. Такая ситуация может возникнуть, если температуры ядра и стенки сильно различаются. Действительно,

$$r_0 = \int_0^\delta \frac{dy}{\sigma} \approx \int_{T_w}^{T_\infty} \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^{-1} \frac{dT}{\sigma}$$

Производная $\partial T / \partial y$ ограничена, а σ — сильно меняющаяся функция температуры, поэтому $r_0 \to \infty$ при $T_w \to 0$. При этом ясно, что, охлаждая стенку, можно добиться выполнения условия

$$r_0 \gtrsim r \tag{1.5}$$

которое принимается в дальнейшем.

Условие (1.3) выполняется, как правило, для течений типа МГД-генератора и ускорителя. При больших внешних нагрузках МГД-генератора условие (1.3) может нарушиться. В этих случаях, несмотря на переменность проводимости, плотность заряда в пограничном слое определяется первым членом A в (1.2), и верны все выводы работы [1].

В дальнейшем будем интересоваться пограничным слоем на «холодном» электроде, когда соотношения (1.3) — (1.5) имеют место. При этом плотность заряда в пограничном слое определяется соотношением

$$4\pi\rho_e = -\frac{1}{\sigma^2} j_y^{\circ} \frac{\partial\sigma}{\partial y} \tag{1.6}$$

Если сильные внешние электрические поля, параллельные стенке, отсутствуют, то из уравнений $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$ и $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$ следует (этот вывод особенно легко получить, используя оценки п. 2 данной работы), что в приближении пограничного слоя $\partial j_y^{\circ} / \partial y = 0$ и, следовательно в соотношении (1.6) функция $j_y^{\circ} = j_y^{\circ}(x, z)$.

Из уравнения $\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho_e$ в рамках теории пограничного слоя с учетом (1.6) получим

$$\frac{\partial E_y}{\partial y} = -\frac{1}{\sigma^2} j_y^\circ \frac{\partial \sigma}{\partial y} \tag{1.7}$$

Отсюда для распределения электрического потенциала в пограничном слое получаем

$$\varphi(x,y,z) = -j_y^\circ \int_0^y \frac{dy}{\sigma} + \varphi_w(x, z) \tag{1.8}$$

Здесь $\varphi_w(x,z)$ — распределение потенциала по поверхности электрода. Если электрод сплошной, то $\varphi_w = \mathrm{const}$.

Пусть электрод сплошной, тогда $E_{\tau w} = 0$. Из (1.8) для распределения касательной составляющей электрического поля поперек пограничного слоя получим соотношения

$$\begin{aligned} &\frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{j_y^\circ}{\sigma}\right), \qquad E_{x\infty} = \frac{\partial}{\partial x} j_y^\circ \int_0^\delta \frac{dy}{\sigma} = \frac{\partial}{\partial x}(j_y^\circ r_0) \\ &\frac{\partial E_z}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{j_y^\circ}{\sigma}\right), \qquad E_{z\infty} = \frac{\partial}{\partial z} j_y^\circ \int_0^\delta \frac{dy}{\sigma} = \frac{\partial}{\partial z}(j_y^\circ r_0) \end{aligned} \tag{1.9}$$

Отсюда следует, что в ядре потока существует касательное электрическое поле, сравнимое по величине с нормальной компонентой электрического поля. Действительно, в силу (1.5) и (1.9)

$$\frac{E_{y\infty}}{E_{\tau\infty}} \sim \frac{L}{\sigma_\infty r_0} \lesssim \frac{L}{h} \tag{1.10}$$

Очевидно при этом, что касательная составляющая электрического поля должна учитываться при формулировке задачи в ядре потока.

При $\sigma \approx \sigma_\infty$ отношение $E_{y\infty} / E_{\tau\infty} \sim L / \delta \gg 1$, и, следовательно, в приближении пограничного слоя можно считать, что касательная составляющая электрического поля не меняется поперек пограничного слоя [1]. Появление касательной составляющей электрического поля связано с большой концентрацией заряда вблизи холодной стенки, который создает вблизи стенки большие электрические поля, необходимые для протекания заданной плотности тока (1.3) через слой с малой проводимостью. При этом

$$\frac{E_{yw}}{E_{y\infty}} \sim \frac{\sigma_\infty}{\sigma_w} \gg 1$$

Таким образом, соотношения для изменения электрического поля поперек пограничного слоя отличаются от условий на поверхности разрыва, несущей электрический заряд. Этот факт, который кажется неожиданным ввиду малой толщины пограничного, слоя может быть получен из исследования решения уравнения Пуассона для электрического потенциала, если правая часть в уравнении Пуассона задается согласно (1.6).

Рассмотрим полосу ширины δ, в которой плотность заряда распределена по закону (1.6). Распределение электрического потенциала в полосе определяется при этом уравнением

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho_e = -j_y{}^\circ \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\sigma} \qquad (\varphi(x, 0) = 0) \tag{1.11}$$

Отсюда, используя формулу Грина [2] для полуполосы, получим

$$\varphi(x_0, \delta) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_0^\delta \ln\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-\delta)^2}}\, j_y{}^\circ(x)\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\sigma}\,dx\,dy -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(x, \delta)\lim_{y\to\delta}\frac{y-\delta}{(x-x_0)^2+(y-\delta)^2}\,dx -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ln\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\frac{j_y{}^\circ(x)}{\sigma(x,\delta)}\,dx + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ln\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+\delta^2}}\,\frac{j_y{}^\circ(x)}{\sigma(x, 0)}\,dx$$

Или, интегрируя в первом интеграле по частям

$$\begin{aligned}\varphi(x_0, \delta) &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}dx\int\limits_0^\delta\frac{j^\circ{}_y(x)}{\sigma(x,y)}\frac{y-\delta}{(x-x_0)^2+(y-\delta)^2}\,dy - \\ &-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(x,\delta)\lim_{y\to\delta}\frac{y-\delta}{(x-x_0)^2+(y-\delta)^2}\,dx\end{aligned} \tag{1.12}$$

Последний интеграл в правой части (1.12) отличен от нуля, так как подынтегральная функция имеет особенность в точке $(x = x_0, y = \delta)$, и равен $-\,{}^1/_2\varphi(x_0, \delta)$. Следовательно,

$$\varphi(x_0,\delta) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}dx\int\limits_0^\delta\frac{j_y{}^\circ(x)}{\sigma(x,y)}\frac{y-\delta}{(x-x_0)^2+(y-\delta)^2}\,dy \tag{1.13}$$

Основной вклад в значение интеграла (1.13) дает окрестность точки $x = x_0$. Интегрирование вне этой окрестности дает результат $\sim\delta$ (функция $j_y{}^\circ / \sigma$ — ограничена), и, следовательно, в рамках теории пограничного слоя эти члены можно не учитывать. При интегрировании в окрестности $x = x_0$ по x функция $j_y{}^\circ(x) / \sigma(x,y) \approx j_y{}^\circ(x_0) / \sigma(x_0,y)$. В связи с этим, производя в (1.13) интегрирование по x, получим

$$\varphi(x_0,\delta) = -j_y{}^\circ(x_0)\int\limits_0^\delta\frac{dy}{\sigma(x_0,y)} \tag{1.14}$$

Этот же результат следует из (1.8).

Результат, заключенный в формулах (1.8) и (1.14), получен на основе анализа уравнений $\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho_e$ и $\operatorname{div}\mathbf{j} = 0$. На первый взгляд, этот результат противоречит уравнению $\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0$, так как из этого уравнения для плоского случая, например, следует, что

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0 \tag{1.15}$$

Действительно, если бы характерной длиной для изменения E_x было бы δ, то, в силу (1.10), из (1.15) следовало бы равенство $\partial E_x/\partial y = 0$ в пограничном слое, а не соотношения (1.9). На самом деле этого противоречия не существует. Характерная длина изменения E_x оказывается много меньше воличины δ и сравнима с толщиной холодного подслоя, где происходит основное изменение электропроводности и где E_y очень велико, причем соотношение между этими величинами таково, что оба члена в (1.15) одного порядка. Выяснению этого вопроса посвящен следующий параграф.

2. Из соотношений (1.9) следует, что характерная длина, на которой меняется E_τ (обозначим ее δ^*), совпадает с характерной длиной поперек пограничного слоя, на которой электропроводность σ меняется от значения σ_w до значения σ_∞, так как именно слой толщины δ^* определяет сопротивление r_0.

Так как $\sigma = \sigma(p, T)$, то ясно, что величина δ^* определяет в некотором смысле толщину теплового пограничного слоя (или подслоя). Существующие расчеты магнитогидродинамического пограничного слоя [3] показывают, что для слабо ионизованной среды ($P \sim 1$) вблизи холодной стенки существует область значительного прогрева газа, и профиль температур имеет существенно немонотонный характер, причем максимум температуры лежит вблизи стенки. Ниже будет показано, что это явление характерно для пограничного слоя на холодном электроде. При этом ясно, что толщина теплового пограничного слоя δ^*, если определить ее как расстояние до ближайшей к стенке точки с $T \approx T_\infty$, будет меньше толщины вязкого пограничного слоя δ. Сравнивая вязкие и электромагнитные члены в уравнении движения, получим, в силу (1.3),

$$\frac{\eta U}{\delta^2}\frac{c}{jH} \sim \frac{\eta U}{\delta^2}\frac{c^2}{UH^2\sigma_\infty} \sim \frac{L^2}{\delta^2 R}\frac{c^2 U\rho}{\sigma_\infty H^2 L} \sim \frac{L^2}{\delta^2 R}(mL)^{-1}\left(R = \frac{UL}{\nu}\right) \qquad (2.1)$$

Отсюда следует, что толщина вязкого пограничного слоя при существенном магнитогидродинамическом взаимодействии ($mL \sim 1$) определяется, как и в обычной гидродинамике, соотношением $\delta \sim L / \sqrt{R}$.

С другой стороны, сравнивая вязкие и электромагнитные члены в уравнении энергии, получим (σ^* — характерная величина электропроводности в холодном слое, $\delta^* / \sigma^* \sim r_0$)

$$\frac{\eta U^2}{\delta^2}\frac{\sigma^*}{j^2} \sim \frac{\eta U^2}{\delta^2}\frac{\sigma^* c^2}{\sigma_\infty^2 U^2 H^2} \sim \frac{1}{mL}\frac{\sigma^*}{\sigma_\infty} \sim \frac{r}{r_0}\frac{\delta^*}{h} \qquad (2.2)$$

Отсюда следует, что если $\sigma^* \sim \sigma_\infty$, то вязкие и электромагнитные члены сравнимы по величине. С другой стороны, если электрод холодный и имеет место (1.5), то в пределах теплового слоя (δ^*) основной подогрев газа происходит за счет джоулева тепла. В связи с этим величину δ^* можно определить, сравнивая в уравнении энергии электромагнитный член с членом, определяемым теплопроводностью. Так как при холодной стенке изменение температуры в тепловом слое имеет порядок T_∞, то для определения δ^* получим соотношение

$$k\frac{T_\infty}{\delta^{*2}} \sim \frac{j^2}{\sigma^*} \qquad (2.3)$$

Это соотношение, используя соотношение $c_p T / U^2 \sim 1 / (\gamma - 1) M^2$ и (1.3), (1.5) перепишем в виде

$$\frac{\delta^{*2}}{L^2} \sim \frac{1}{(\gamma-1)M^2 PRmL}\frac{\sigma^*}{\sigma_\infty} \lesssim \frac{1}{(\gamma-1)M^2 PRmL}\frac{\delta^*}{h}$$

Отсюда для толщины теплового слоя получаем оценку

$$\frac{\delta^*}{L} \lesssim \frac{1}{(\gamma-1)\, M^2 PRmL}\,\frac{L}{h} \tag{2.4}$$

Соотношение (2.4) показывает, что тепловой слой или слой большого электрического сопротивления много тоньше вязкого динамического пограничного слоя ($\delta^* / \delta \sim R^{-1/2}$).

С физической точки зрения, образование вблизи холодной стенки узкого слоя резкого изменения температуры понятно, так как оно связано с действием вблизи стенки сильных источников тепла, которые обусловлены прохождением тока через слой холодного газа. Наличием этого слоя объясняется тот факт, что вблизи холодного электрода имеет место сильный прогрев газа, приводящий к немонотонному, сильно вытянутому вблизи стенки профилю температуры.

Легко убедиться на основе (2.4), (1.3), (1.5) и соотношения $\delta^*/\sigma^* \sim r_0$, что в соотношении (1.15) оба члена имеют одинаковый порядок величины, о чем указывалось в конце п. 1.

3. В связи с тем что на холодном электроде существует узкий слой, в котором сосредоточен большой объемный электрический заряд, оценки величины электромагнитной силы, проведенные в [1], становятся неприменимыми в данном случае.

Из соотношений (1.10) и (1.5) следует, что

$$E_\tau \sim \frac{UH}{c}$$

поэтому для касательной составляющей электромагнитной силы верны оценки работы [1]. Следовательно, в проекциях уравнений импульсов на касательную плоскость членом $\rho_e \mathbf{E}$ в выражении для силы можно пренебречь, и эти уравнения будут иметь тот же вид, что и в работе [1].

Отношение нормальной составляющей силы, связанной с объемным зарядом $\rho_e E_n$, к нормальной компоненте силы, действующей на токи, $c^{-1}(\mathbf{j}\times\mathbf{H})_n$, внутри холодного слоя выражается, в силу (1.6) и (2.4), следующим образом:

$$\frac{\rho_e E_n}{c^{-1}(\mathbf{j}\times\mathbf{H})_n} \sim \frac{\sigma_\infty}{\sigma^*}\,\frac{U}{\sigma^*\delta^*} \gtrsim \frac{U^2}{c^2}\left(\frac{h}{L}\right)^5 \frac{1}{R_m}\,[(\gamma-1)\, M^2 PRmL]^3 \tag{3.1}$$

Следовательно, при больших числах Рейнольдса и Маха может оказаться, что $\rho_e E_n \gg c^{-1}(\mathbf{j}\times\mathbf{H})_n$. При этом уравнение импульсов в проекции на нормаль дает

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \rho_e E_n \tag{3.2}$$

Если $\rho_e E_n \sim c^{-1}(\mathbf{j}\times\mathbf{H})_n$, то в рамках пограничного слоя из (3.2) следует уравнение $\partial p / \partial y = 0$. Если же $\rho_e E_n \gg c^{-1}(\mathbf{j}\times\mathbf{H})_n$, то изменение давления поперек холодного слоя может оказаться существенным:

$$\frac{\Delta p}{p} \sim \frac{\Delta p}{\rho U^2} \lesssim \frac{U^2}{c^2}\,\frac{R^2}{R_m}\left(\frac{h}{L}\right)^4 (mL)^3\,[(\gamma-1)PM^2]^2 \tag{3.3}$$

Очевидно, что при $\rho_e E_n \sim c^{-1}(\mathbf{j}\times\mathbf{H})_n$ изменение давления в холодном подслое и во всем пограничном слое мало ($\Delta p \ll p$). При $\rho_e E_n \gg c^{-1}(\mathbf{j}\times\mathbf{H})_n$ и не очень больших R и M имеем $\Delta p/p \ll 1$. В этих случаях в уравнениях пограничного слоя $\partial p / \partial y = 0$. Если же $\Delta p \gtrsim p$, то в системе уравнений пограничного слоя надо использовать уравнение (3.2).

Легко убедиться, что конвекционным током ($\rho_e v$) в выражении для плотности тока можно пренебречь, так как в холодном слое скорости малы.

Таким образом, при $\Delta p \,/\, p \ll 1$ уравнения пограничного слоя на холодном электроде имеют вид такой же, как в [1], с той только разницей, что касательная составляющая электрического поля определяется не решением внешней задачи, а соотношениями (1.9). При $\Delta p \,/\, p \gtrsim 1$ система уравнений еще усложняется за счет переменности давления поперек пограничного слоя. При этом из (3.2) и (1.6) для распределения давления получаем формулу

$$p = p_\infty + \frac{1}{8\pi}\, \mathring{j}_y^{\,2} \left(\frac{1}{\sigma^2} - \frac{1}{\sigma_\infty^{\,2}} \right) \tag{3.4}$$

4. Предыдущий анализ показывает, что при формулировке задачи о пограничном слое на холодном электроде необходимо учитывать при выполнении условия (1.5), что электрическое поле в пограничном слое определяется как решением внешней задачи (в ядре потока), так и решением задачи в пограничном слое (зависит от сопротивления пограничного слоя). С другой стороны, решение задачи в ядре потока зависит от распределения параметров в пограничном слое через величину касательной составляющей электрического поля. В связи с этим при $r \sim r_0$ внешняя задача в принципе не отделяется от задачи в пограничном слое. Конечно, деление потока на пограничный слой и ядро упрощает решение. Но тем не менее, задачи пограничного слоя и ядра должны в этом случае решаться совместно и сопрягаться на внешней границе пограничного слоя.

В работе [3] при расчете изменения потенциала в пограничном слое получено, что $\varphi_\infty = \varphi_\infty(x)$, но автор при этом не обратил внимания, что это связано с наличием осевого электрического поля, которое необходимо было учесть при формулировке задачи как в ядре потока, так и в пограничном слое.

Подчеркнем еще раз, что величина осевого поля существенным образом зависит от скорости изменения параметров по длине канала (см. (1.9)). Если в ядре потока параметры не меняются по длине канала и пограничный слой близок к автомодельному ($r_0 \approx \mathrm{const}$), то $\partial E_\tau \,/\, \partial y = 0$ в пограничном слое.

Поступила 30 VI 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Любимов Г. А. К постановке задачи о магнитогидродинамическом пограничном слое. ПММ, 1962, т. 26, вып. 5.
2. Соболев С. Л. Уравнения математической физики. Гостехиздат, 1950.
3. Kerrebrock Y. L. Electrode Boundary Layers in Direct - Current Plasma Accelerators. J. Aero - space, 1961, v. 28, No. 8.