

О ПРОСТРАНСТВЕННОМ ГИПЕРЗВУКОВОМ ТЕЧЕНИИ ОКОЛО ТОНКИХ КРЫЛЬЕВ¹

М. Д. Ладыженский

(Москва)

При обтекании тонких крыльев не слишком малых удлинений с острыми передними кромками невязким гиперзвуковым потоком справедлива так называемая «теория полос» [1], согласно которой течение в каждой плоскости, направленной по потоку, можно рассчитывать независимо, как при обтекании плоского профиля.

В работе даны постановки задач о невязком обтекании тонкого крыла с притупленными передними кромками и о течении вязкого газа около крыла с острыми передними кромками.

Показано, что в случае, когда толщины энтропийного или пограничного слоев сравнимы или превышают толщину крыла, теория полос в ее обычном виде неприменима. По этой теории можно рассчитывать течение вне энтропийного или пограничного слоев. Для случая течения вязкого газа теорию полос можно применять ко всему течению при малых значениях параметра $\varepsilon = (\kappa - 1) / (\kappa + 1)$, где κ — показатель адиабаты.

Приведен пример решения для случая невязкого обтекания треугольного крыла с притупленными передними кромками в предположении об изэнтропичности течения внутри энтропийного слоя. Рассмотрено автомодельное решение задачи о течении вязкого газа около треугольной пластины с острыми передними кромками в режиме сильного взаимодействия невязкого потока с пограничным слоем.

В настоящее время имеются исследования влияния вязкости [1] и малого притупления передних кромок тел [2] для случаев плоского и осесимметрического течений. В работах [3, 4] проведено исследование влияния притупления, а в работе [5] — влияние вязкости на пространственное гиперзвуковое течение около тонких вытянутых тел при условии, что толщины энтропийного [6] или пограничного слоев сравнимы или превышают толщину тела. В настоящей работе при этом же условии рассмотрено влияние притупления передних кромок и влияние вязкости на пространственное гиперзвуковое течение около тонких крыльев.

1. Используется декартова система координат (фиг. 1) Lx, Ly, Lz , где L — характерная длина, ось x направлена вдоль вектора скорости U_∞ невозмущенного потока. Введены обозначения: $uU_\infty, vU_\infty, wU_\infty$ — составляющие скоростей вдоль осей x, y, z соответственно, $p\rho_\infty U_\infty^2$ — давление, $\rho\rho_\infty$ — плотность (ρ_∞ — плотность невозмущенного потока), $Ld, L\tau, L\delta$ — величины, характеризующие соответственно размер затупления, толщину крыла и толщину энтропийного или пограничного слоев (предполагается, что $d \ll 1, \tau \ll 1, \delta \ll 1, \delta \gtrsim \tau, M_\infty \tau \gtrsim 1$, где M_∞ — число Маха невозмущенного потока).

Пусть уравнение поверхности крыла имеет вид $y = \tau f(x, z)$, а уравнение внешней границы энтропийного или пограничного слоев $y = \tau\varphi(x, z)$; причем будем предполагать $f \sim \varphi \sim 1$.

¹ По материалам доклада на Втором Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике 30 января 1964 г.

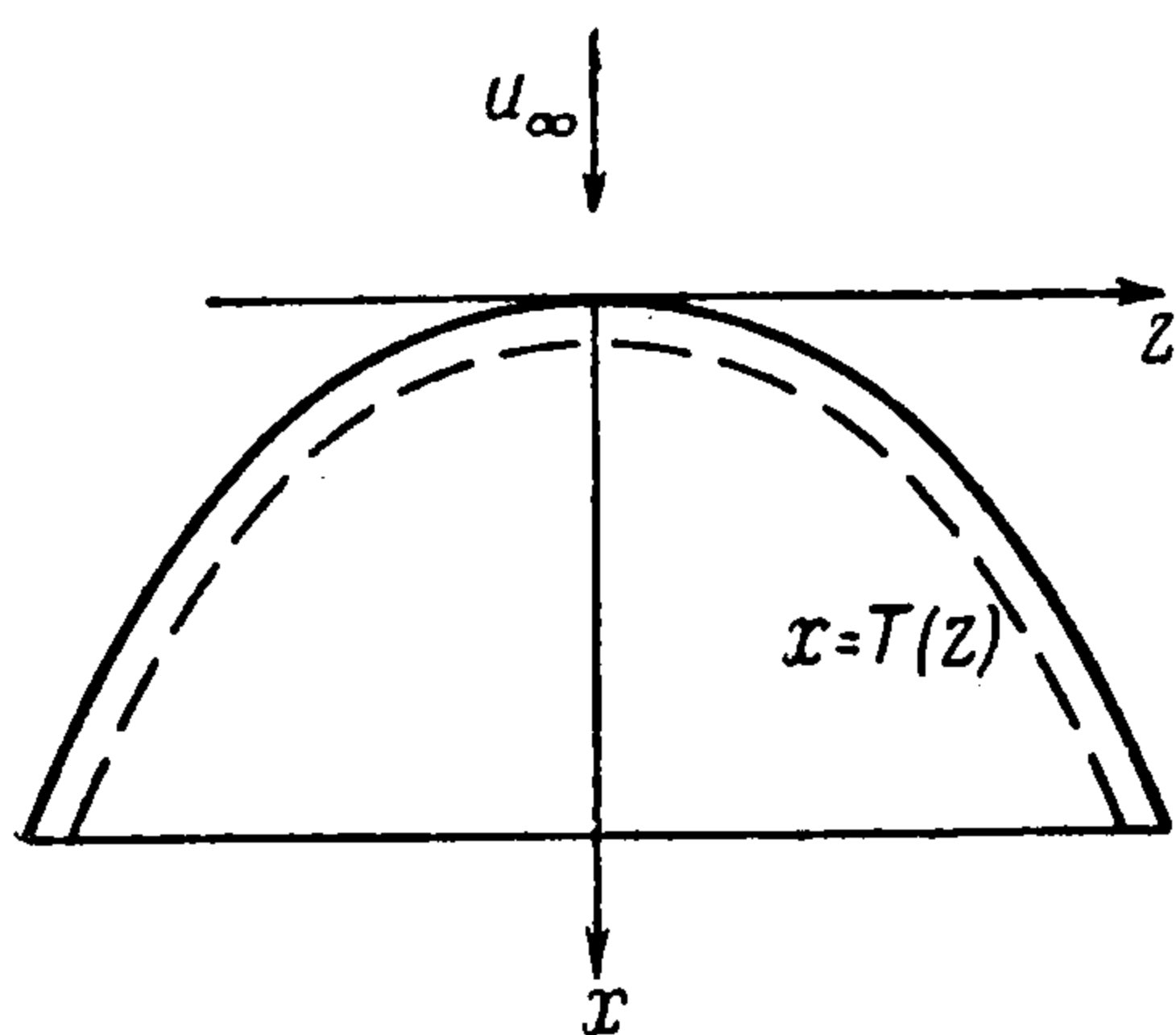
Вне энтропийного или пограничного слоев из оценок [1]

$$u = 1 + o(\tau^2), \quad v \sim \tau, \quad w \sim \tau^2, \quad p \sim \tau^2, \quad \rho \sim 1$$

следует, что в каждой плоскости $z = z_0 = \text{const}$ уравнения движения с относительной погрешностью порядка τ^2 сводятся к уравнениям одномерного неустановившегося течения газа, вытесняемого поршнем

$$\frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \frac{p}{\rho^\kappa} + v \frac{\partial}{\partial y} \frac{p}{\rho^\kappa} = 0 \quad (1.1)$$

Граничные условия на границе с энтропийным или пограничным слоем и на поверхности ударной волны $y = \tau\psi(x, z)$ записываются (индекс x означает частную производную по x)



Фиг. 1

$$\begin{aligned} v &= \frac{2\tau\psi_x}{\kappa+1} \left(1 - \frac{1}{M_\infty^2 \tau^2 \psi_x^2} \right) \\ p &= \frac{2\tau^2 \psi_x^2}{\kappa+1} \left(1 - \frac{\kappa-1}{2\kappa M_\infty^2 \tau^2 \psi_x^2} \right) \\ \rho &= \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \left(1 + \frac{2}{(\kappa-1) M_\infty^2 \tau^2 \psi_x^2} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (1.2)$$

при $y = \tau\psi(x, z_0)$

$$v = \tau\psi_x \quad \text{при } y = \tau\psi(x, z_0)$$

Взаимное влияние сечений $z = \text{const}$ осуществляется через энтропийный или пограничный слой, течение в которых является трехмерным. Для энтропийного слоя, аналогично случаю плоского или осесимметрического течений [6], имеем

$$p \sim \tau^2, \quad \rho \sim \tau^{2/\kappa} \varepsilon^{-1}, \quad u \sim 1, \quad v \sim \tau, \quad w \sim \tau^{2-2/\kappa}$$

Оценка для w получена из рассмотрения течения вблизи передней кромки крыла с использованием принципа локальной стреловидности. Аналогичные оценки справедливы для пограничного слоя (учитывается, что температура в пограничном слое имеет порядок температуры торможения невозмущенного потока [1]):

$$p \sim \tau^2, \quad \rho \sim \tau^{2/\kappa} \varepsilon, \quad u \sim 1, \quad v \sim \tau, \quad w \sim \varepsilon$$

Оценка для w получена из проекции уравнения импульсов на ось z . Существенна разница в поведении w при стремлении ε к нулю ($\kappa \rightarrow 1$) в случае энтропийного слоя (w растет) и в случае пограничного слоя ($w \rightarrow 0$). Из уравнения импульсов в проекции на ось y для перепада давления Δp поперек энтропийного или пограничного слоев имеем соответственно

$$p^{-1} \Delta p \sim \tau^{2/\kappa} \varepsilon^{-1}, \quad p^{-1} \Delta p \sim \tau^2 \varepsilon^{-1}$$

С такой погрешностью давление внутри этих слоев можно считать зависящим только от x и z .

2. Рассмотрим невязкое течение в пространственном энтропийном слое. Уравнения движения записываются в виде

$$\begin{aligned} \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\ \rho \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\partial p}{\partial z} &= 0 \\ p = p(x, z), \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} &= 0 \\ u \frac{\partial}{\partial x} \frac{p}{\rho^\kappa} + v \frac{\partial}{\partial y} \frac{p}{\rho^\kappa} + w \frac{\partial}{\partial z} \frac{p}{\rho^\kappa} &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Краевые условия, согласно которым поверхность тела и внешняя граница энтропийного слоя являются поверхностями тока, имеют вид

$$\begin{aligned} \begin{cases} v = \tau (uf_x + wf_z) & \text{при } y = \tau f(x, z) \\ v = \tau (u\varphi_x + w\varphi_z) & \text{при } y = \tau \varphi(x, z) \end{cases} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Из требования для толщины δ энтропийного слоя ($\delta \gtrsim \tau$) получаем, используя уравнения неразрывности и изэнтропичности, связь между τ и характерным размером затупления d

$$\tau \lesssim (\varepsilon d)^{\kappa/(2+\kappa)} \quad (2.3)$$

Уравнения (2.1), (2.2) решаются совместно уравнениями (1.1), (1.2) с учетом непрерывности давления на поверхности $y = \tau \varphi(x, z)$, которая определяется из решения.

Расчет начинается от некоторой поверхности

$$x = T(z), \tau f(T(z), z) \leq y \leq \tau \varphi(T(z), z)$$

Линия $x = T(z)$, по предположению, удалена от передней кромки на расстояние порядка характерного размера затупления d . Предполагается, что параметры течения рассчитаны на этой поверхности. Расчет может быть выполнен, например, с использованием принципа местной стреловидности, как для передней части плоского затупленного профиля.

Рассмотрим далее обтекание треугольного крыла, предполагая течение в пространственном энтропийном слое изэнтропическим, что справедливо, если весь газ в энтропийном слое прошел через ударную волну одинаковой интенсивности. Приблизительно это выполняется, если затупление выполнено в виде клина с большим углом раствора или плоского среза.

При указанной форме затупления предположение об изэнтропичности течения в энтропийном слое эквивалентно допущению, что внешняя «переходная» часть области энтропийного слоя, в которой существенна завихренность и течение в которой нельзя считать изэнтропическим, намного тоньше всего энтропийного слоя и потому может быть приближенно заменена поверхностью тангенциального разрыва, совпадающей с внешней границей энтропийного слоя $y = \tau \varphi(x, z)$. Положение и интенсивность тангенциального разрыва, который отделяет энтропийный слой от остального течения, определяются из решения.

Следует заметить, что указанное допущение становится более точным при $\kappa \rightarrow 1$, когда ударная волна приближается к телу. При этом, разумеется, должно остаться справедливым соотношение (2.3).

С принятой точностью система уравнений (2.1) может быть записана

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad p = p(x, z) \quad (2.4) \\ \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial x} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0, \quad \frac{u^2 + w^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p}{\rho} = \frac{1}{2} + \frac{1}{(\kappa - 1) M_\infty^2}, \quad \frac{p}{\rho^\kappa} = \text{const} \end{aligned}$$

Здесь первые три уравнения выражают отсутствие вихря скорости, что следует из предположения об изэнтропичности. Из (2.4) следует

$$u = u(x, z), \quad w = w(x, z), \quad p = p(x, z), \quad \rho = \rho(x, z) \quad (2.5)$$

В уравнении неразрывности первый и третий члены зависят от x и z ; поэтому второй член будет функцией тех же переменных; откуда следует, что зависимость v от y будет линейной. Из уравнений (2.2) имеем

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{u(\varphi_x - f_x) + w(\varphi_z - f_z)}{\varphi - f} \quad (2.6)$$

Подставляя (2.6) в уравнение неразрывности и используя уравнение изэнтропичности и интеграл Бернулли, приводим систему (2.4) к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} [\rho u (\varphi - f)] + \frac{\partial}{\partial z} [\rho w (\varphi - f)] = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (2.7) \\ \rho = \rho_0 \left(1 - \frac{u^2 + w^2}{U_m^2}\right)^{1/(\kappa-1)}, \quad U_m^2 = U_\infty^2 \left(1 + \frac{2}{(\kappa-1) M_\infty^2}\right) \end{aligned}$$

Здесь ρ_0 — постоянная, по предположению, плотность торможения в энтропийном слое. Чтобы замкнуть систему (2.7), необходимо задать функциональную зависимость между давлением p (а следовательно, и плотностью, так как $p/\rho^\kappa = \text{const}$) и уравнением внешней границы энтропийного слоя $y = \varphi(x, z)$. Эта зависимость определяется из решения системы (1.1) с граничными условиями (1.2).

Уравнения (2.7) удовлетворяют краевым условиям на линии $x = T(z)$, где заданы все параметры течения.

Отметим, что предположение об изэнтропичности течения дает возможность простейшим образом «осреднить» уравнения (2.1) по координате y . Возможны и другие варианты осреднения с учетом переменности энтропии, которые привели бы к более сложным уравнениям, чем (2.7).

Система (2.7) напоминает систему уравнений плоского течения сжимаемого газа, что облегчает анализ. Решение этой системы (при известной функциональной связи между ρ и φ) может быть выполнено методом характеристик.

Построим особенно простой пример решения, предполагая толщину энтропийного слоя всюду постоянной величиной $\varphi - f = C$, где C — константа, определяемая из расчета течения вблизи передних кромок. В этом случае система (2.7) с граничными условиями, которые, используя симметрию течения, ставятся на линии $x = T(z)$ при $z > 0$ и на линии $z = 0$, принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \rho = \rho_0 \left(1 - \frac{u^2 + w^2}{U_m^2}\right)^{1/(\kappa-1)} \quad (2.8) \\ u = u_0(z), \quad w = w_0(z) \quad \text{при } x = z \operatorname{tg} \chi_\Delta, \quad w = 0 \quad \text{при } z = 0 \end{aligned}$$

В уравнении линии $x = T(z)$ с погрешностью порядка d принято, что эта линия совпадает с передней кромкой, угол стреловидности которой обозначен через χ_Δ . Из решения системы (2.8) определяются $\rho(x, z)$ и $p(x, z)$, по найденному давлению с использованием функциональной связи между p и φ строится внешняя граница энтропийного слоя $y = \varphi(x, z)$, а из уравнения $f = \varphi - C$ определяется поверхность тела, т. е. здесь решается обратная задача.

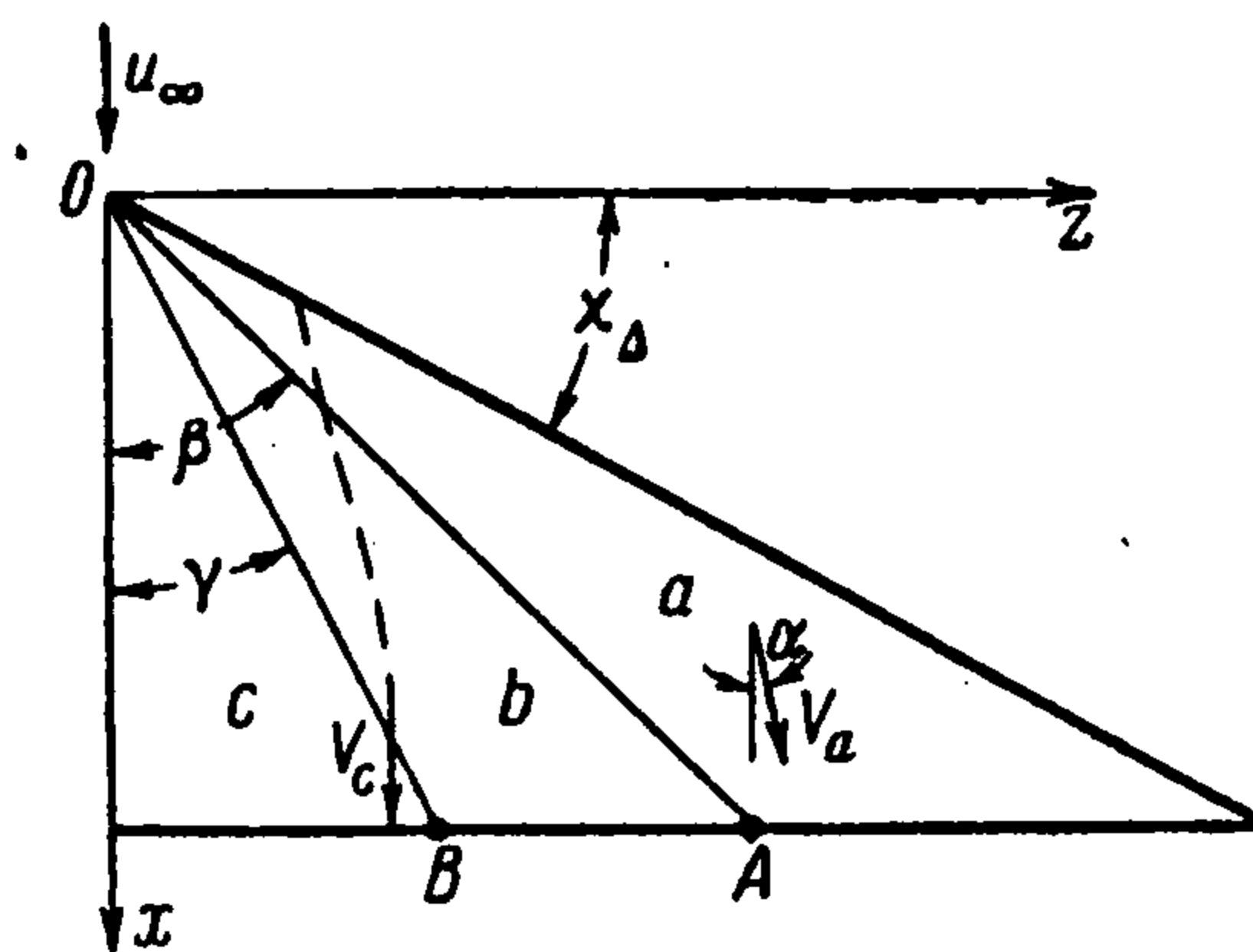
При обтекании треугольного крыла с постоянной по размаху формой затупления параметры течения на линии $x = T(z)$, рассчитанные с использованием принципа стреловидности, постоянны (за исключением малой окрестности вершины крыла). В (2.8) можно положить $u_0 = \text{const}$, $w_0 = \text{const}$. Как показывают расчеты, на линии $x = T(z)$ составляющая скорости, перпендикулярная к этой линии, превышает скорость звука. Кроме того, нетрудно показать, что вектор скорости на этой линии составляет при $z > 0$ положительный угол с осью x , т. е. $w > 0$. Учитывая эти обстоятельства, нетрудно построить картину течения на основе решения задачи Коши для уравнений (2.8). Картина течения (для половины крыла) такова (фиг. 2): к передней кромке прилегает область a равномерного потока, соответствующая в рассматриваемом случае обтеканию стреловидной пластины бесконечного размаха. Далее следует область b течения Прандтля — Мейера и затем снова идет участок равномерного потока c . Как следует из построения решения, угол между вектором скорости V_a в области a и лучом OA равен углу Маха в области a , аналогично угол между V_c и лучом OB равен углу Маха в области c . Приведенный простой пример иллюстрирует появление на треугольном крыле областей разрежения с давлением, меньшим, чем давление, которое дается расчетом по теории стреловидной пластины бесконечного размаха. Полученный результат, как можно ожидать, не зависит от сделанных упрощающих предположений.

Появление областей разрежения следует из того, что вблизи передних кромок составляющая скорости w направлена от середины к кромкам крыла, в связи с чем линии тока (пунктир на фиг. 2) обращены вогнутостью к оси x .

Приводим значения параметров течения, вычисленные по изложенному решению для $\kappa = 1.4$, $M_\infty = \infty$ и трех значений угла стреловидности χ_Δ

χ_Δ	M_a	M_c	α	β	γ
30°	3.45	4.0	6°40'	24°51'	14°29'
45°	4.57	5.31	7°05'	19°43'	10°57'
60°	7.24	8.7	6°20'	13°41'	6°33'

Передняя кромка, по предположению, представляет собой клин (фиг. 3), при обтекании которого в перпендикулярном к передней кромке направлении за скачком, число $M=1$ (угол полураствора клина равен 45.5°). Предполагается, что линия $x = T(z)$ проходит вблизи кромки C (фиг. 3) клина, поэтому нормальная к передней кромке составляющая скорости на линии $x = T(z)$ берется из решения Прандтля — Мейера непосредственно в точке C после разворота. Касательная к линии $x = T(z)$ составляющая скорости равна своему значению в невозмущенном потоке. Приведенные выше значения M_a и M_c — числа Маха в соответствующих областях, остальные параметры указаны на фиг. 2.



Фиг. 2



Фиг. 3

Из приведенных данных следует, что отклонение линий тока от прямых $z = \text{const}$ невелико. Эти же данные позволяют также оценить относительные размеры областей a , b , c при различных значениях χ_{Δ} .

Отметим еще одно простое решение уравнений (2.7) для случая обтекания плоской треугольной пластины под углом атаки, когда $f = x$ и давление рассчитывается по формуле Ньютона $p = \varphi_x^2$. При этом если пренебречь толщиной энтропийного слоя около передней кромки по сравнению с его толщиной в средней части крыла, то в уравнениях (2.7) можно принять $\varphi = x\Phi(\zeta)$, $u = u(\zeta)$, $w = w(\zeta)$, $\rho = \rho(\zeta)$, где $\zeta = z/x$. При этом уравнения (2.7) сводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений по ζ .

3. Существенно отметить, что в случае, когда толщина энтропийного слоя сравнима или превышает толщину тела, подъемная сила Y для тонких вытянутых тел уменьшается по сравнению с ее значением Y_0 для заостренных тел.

Из работы [3], где рассмотрено обтекание тонких затупленных вытянутых тел в предположении [2] о сильном уплотнении газа за ударной волной, вообще следует $Y/Y_0 = 0$. Из работы [4], где дается уточнение результатов [3] при помощи введения энтропийного слоя [6], следует $Y/Y_0 \sim \tau^{2/\kappa}/\epsilon$. Для рассматриваемого случая обтекания планарных тел типа крыльев затупление увеличивает подъемную силу. Работы [7, 8], где методом возмущений рассчитано течение около плоской затупленной пластины под малым углом атаки, подтверждают высказанное утверждение.

Это различие объясняется тем, что при отклонении на малый угол в случае крыла энтропийный слой вытесняется телом, а в случае тонкого вытянутого тела граница энтропийного слоя почти не перемещается.

4. Рассмотрим обтекание тонких крыльев с острыми передними кромками вязким гиперзвуковым потоком. Введем дополнительно следующие обозначения: μ_0 — коэффициент вязкости (μ_0 — коэффициент вязкости, соответствующий температуре торможения невозмущенного потока), σ — число Прандтля, hU_{∞}^2 — энтальпия.

Уравнения пространственного пограничного слоя имеют вид

$$\begin{aligned} \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + \rho w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{1}{R_*}, \quad p = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \rho h \\ \rho u \frac{\partial w}{\partial x} + \rho v \frac{\partial w}{\partial y} + \rho w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial y} \right) \frac{1}{R_*}, \quad R_* = \frac{\rho_{\infty} U_{\infty} L}{\mu_0} \\ \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} &= 0, \quad p = p(x, z), \quad \mu = \mu(h) \quad (4.1) \\ \rho u \frac{\partial}{\partial x} \left(h + \frac{u^2 + w^2}{2} \right) + \rho v \frac{\partial}{\partial y} \left(h + \frac{u^2 + w^2}{2} \right) + \rho w \frac{\partial}{\partial z} \left(h + \frac{u^2 + w^2}{2} \right) &= \\ &= \frac{1}{R_*} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{\sigma} \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{1}{R_*} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial}{\partial y} \frac{u^2 + w^2}{2} \right) \end{aligned}$$

Течение вне пограничного слоя удовлетворяет системе уравнений (1.1) и граничным условиям (1.2). Предполагается, что толщина тела не превосходит толщину пограничного слоя $\delta \sim (\epsilon/R_*)^{1/4}$, на границе между пограничным слоем и невязким потоком $y = \tau f(x, z)$ выполняются условия непрерывности давления и вертикальной составляющей скорости, температура на границе пограничного слоя предполагается равной нулю. На теле, уравнение поверхности которого $y = \tau f(x, z)$, выполняются обычные условия прилипания и равенства температуры газа и стенки (или условие для теплового потока к стенке).

В качестве примера пространственного вязкого гиперзвукового течения рассмотрим обтекание плоской треугольной пластины с заданной температурой поверхности или теплоизолированной с острыми передними кромками при $M_\infty = \infty$. Ищем уравнения внешней границы пограничного слоя, поверхности ударной волны и остальные параметры в области невязкого потока в виде

$$y = \delta\varphi(x, z) = \delta x^{3/4}\Phi(\zeta), \quad y = \delta\psi(x, z) = \delta x^{3/4}\Psi(\zeta) \quad (4.2)$$

$$p = \frac{\delta^2 P_0(\zeta, \eta)}{\sqrt{x}}, \quad \rho = R_0(\zeta, \eta), \quad v = \frac{\delta V_0(\zeta, \eta)}{x^{1/4}}, \quad \delta = \frac{1}{R_*^{1/4}}$$

$$\zeta = \frac{z}{x}, \quad \eta = \frac{y}{\delta x^{3/4}}$$

Уравнения (4.1) невязкого течения и граничные условия на ударной волне (1.2) и на границе с пограничным слоем примут вид

$$R_0 \left(V_0 - \frac{3\eta}{4} \right) \frac{\partial V_0}{\partial \eta} - R_0 \zeta \frac{\partial V_0}{\partial \zeta} - \frac{R_0 V_0}{4} + \frac{\partial P_0}{\partial \zeta} = 0$$

$$\left(V_0 - \frac{3\eta}{4} \right) \frac{\partial R_0}{\partial \eta} + R_0 \frac{\partial V_0}{\partial \eta} - \zeta \frac{\partial R_0}{\partial \zeta} = 0$$

$$\left(V_0 - \frac{3\eta}{4} \right) \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{P_0}{R_0^\kappa} - \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{P_0}{R_0^\kappa} - \frac{P_0}{2R_0^\kappa} = 0 \quad (4.3)$$

$$V_0 = \frac{2}{\kappa+1} \left(\frac{3}{4} \Psi - \zeta \frac{d\Psi}{d\zeta} \right), \quad P_0 = \frac{2}{\kappa+1} \left(\frac{3}{4} \Psi - \zeta \frac{d\Psi}{d\zeta} \right)^2$$

$$R_0 = \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \quad \text{при } \eta = \Psi(\zeta)$$

$$V_0 = \frac{3}{4} \Phi - \zeta \frac{d\Phi}{d\zeta} \quad \text{при } \eta = \Phi(\zeta)$$

Для пограничного слоя ищем решение в виде (4.4)

$$u = U(\eta, \xi), \quad w = W(\eta, \zeta), \quad v = x^{-1/4} \delta V(\eta, \zeta), \quad h = h(\eta, \zeta)$$

$$\rho = x^{-1/2} \delta^2 R(\eta, \zeta), \quad p = x^{-1/2} \delta^2 P(\zeta), \quad P(\zeta) = P_0(\zeta, \Phi(\zeta)), \quad \delta = R_*^{-1/4}$$

Граничные условия для системы уравнений пограничного слоя приобретают вид

$$V = 0, \quad U = 0, \quad W = 0, \quad h = h_0 = \text{const} \quad (\text{или } \partial h / \partial \eta = 0) \quad \text{при } \eta = 0$$

$$V = V_0 = \frac{3}{4} \Phi_0 - \zeta \frac{d\Phi_0}{d\zeta} \quad (4.5)$$

$$U = 1, \quad W = 0, \quad h = 0 \quad \text{при } \eta = \Phi(\zeta), \quad -\zeta_0 \leq \zeta \leq \zeta_0 = \text{ctg } \chi_\Delta$$

Здесь χ_Δ — по-прежнему стреловидность передней кромки.

Подставляя выражения (4.4) в уравнения (4.1), получим систему уравнений с двумя независимыми переменными η и ζ , которую нужно решать совместно с уравнениями (4.3) при выполнении граничных условий (4.5).

Для упрощения используем для давления формулу касательных клиньев, что приводит в плоском случае к небольшой погрешности по-

рядка нескольких процентов [1]

$$p = \frac{\kappa + 1}{2} \delta^2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2, \quad P(\zeta) = \frac{\kappa + 1}{2} \left(\frac{3\Phi}{4} - \frac{\zeta d\Phi}{d\zeta} \right)^2 \quad (4.6)$$

Использование (4.6) позволяет не решать систему (4.3). Предположим, что число Прандтля $\sigma = 1$ и стенка является теплоизолированной ($\partial h / \partial \eta = 0$ при $\eta = 0$). Тогда существует интеграл

$$h + 1/2 (u^2 + w^2) = 1/2 \quad (4.7)$$

Наконец, будем считать зависимость коэффициента вязкости от эн-тальпии линейной ($\mu = 2h$). Сделаем в уравнениях (4.1) замену переменных, вводя вместо независимых переменных η, ζ переменные s, ζ , где переменная А. А. Дородницына s дается уравнением

$$ds = R d\eta, \quad s = \int_0^\eta R d\eta, \quad \Phi(\zeta) = \int_0^\infty ds / R \quad (4.8)$$

Существенно, что при приближении к внешней границе пограничного слоя, т. е. при $\eta \rightarrow \Phi(\zeta)$, величина $s \rightarrow \infty$, откуда следует последнее равенство (4.8).

В качестве зависимых переменных введем две функции тока ψ и χ согласно уравнениям

$$U = \partial \chi / \partial s, \quad W - \zeta U = \partial \psi / \partial s \quad (4.9)$$

Уравнение неразрывности может быть записано

$$R (V - 3/4 \eta U) + (W - \zeta U) (\partial s / \partial \zeta)_\eta = - 5/4 \chi - \partial \psi / \partial s \quad (4.10)$$

С учетом уравнений (4.6) — (4.10) система уравнений пограничного слоя (4.1) может быть записана в виде (индексами s, ζ обозначены частные производные по соответствующим величинам, штрихом обозначена производная по ζ)

$$\begin{aligned} & - (\psi_\zeta + 5/4 \chi) \psi_{ss} + \psi_s \psi_{\zeta s} + \psi_s \chi_s + \varepsilon_1 [1 - \chi_s^2 (1 + \zeta^2) - \psi_s^2 - 2\zeta \psi_s \chi_s] \times \\ & \quad \times [1/2 \zeta + (1 + \zeta^2) P' / P] = P \varepsilon_1^{-1} \psi_{sss}, \quad \varepsilon_1 = \frac{\kappa - 1}{2\kappa} \\ & - (\psi_\zeta + 5/4 \chi) \chi_{ss} + \psi_s \chi_{\zeta s} - \varepsilon_1 [1 - \chi_s^2 (1 + \zeta^2) - \psi_s^2 - 2\zeta \psi_s \chi_s] \times \\ & \quad \times [1/2 + \zeta P' / P] = P \varepsilon_1^{-1} \chi_{sss} \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\Phi \left(\frac{3}{4} \Phi - \zeta \Phi' \right)^2 = \frac{2\varepsilon_1}{\kappa + 1} \int_0^\infty [1 - \chi_s^2 (1 + \zeta^2) - \psi_s^2 - 2\psi_s \chi_s \zeta] ds$$

$$P = 1/2 (\kappa + 1) \left(\frac{3}{4} \Phi - \zeta \Phi' \right)^2$$

Граничные условия (4.5) с учетом (4.9) приобретают вид

$$\begin{aligned} \psi(0, \zeta) = \chi(0, \zeta) = \psi_s(0, \zeta) = \chi_s(0, \zeta) = 0, \quad \chi_s(\infty, \zeta) = 1 \\ \psi_s(\infty, \zeta) = -\zeta \quad (-\zeta \leq \zeta \leq \zeta_0) \end{aligned} \quad (4.12)$$

В результате решения системы уравнений (4.11) с граничными условиями (4.12) определяются функции $\psi(s, \zeta), \chi(s, \zeta), P(\zeta), \Phi(\zeta)$.

Ищем решение уравнений (4.11) в виде рядов

$$\begin{aligned} \psi &= \sqrt{A_1}(\zeta_0 - \zeta)^{1/4} \psi_1(\lambda) + (\zeta_0 - \zeta)^{5/4} \psi_2(\lambda) + \dots, \quad \lambda = sA_1^{-1/2}(\zeta_0 - \zeta)^{-1/4} \\ \chi &= \sqrt{A_1}(\zeta_0 - \zeta)^{1/4} \chi_1(\lambda) + (\zeta_0 - \zeta)^{5/4} \chi_2(\lambda) + (\zeta_0 - \zeta)^{9/4} \chi_3(\lambda) + \dots \\ P &= A_1(\zeta_0 - \zeta)^{-1/2} + A_2(\zeta_0 - \zeta)^{1/2} + A_3(\zeta_0 - \zeta)^{3/2} + \dots \\ \Phi &= B_1(\zeta_0 - \zeta)^{3/4} + B_2(\zeta_0 - \zeta)^{7/4} + B_3(\zeta_0 - \zeta)^{11/4} + \dots \end{aligned} \quad (4.13)$$

Подставляя эти ряды в уравнения (4.11), (4.12), получаем рекуррентные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с граничными условиями, заданными при $\lambda = 0$ и $\lambda = \infty$. Первая система имеет вид

$$\begin{aligned} \psi_1 \psi_1'' + 2\varepsilon_1(1 + \zeta_0^2)L_1 &= 4\varepsilon_1^{-1} \psi_1''', \quad \psi_1 \chi_1'' - 2\varepsilon_1 \zeta_0 L_1 = 4\varepsilon_1^{-1} \chi_1''' \\ L_1 &= 1 - (\chi_1')^2(1 + \zeta_0^2) - (\psi_1')^2 - 2\zeta_0 \psi_1' \chi_1' \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\psi_1(0) = \psi_1'(0) = \chi_1(0) = \chi_1'(0) = 0, \quad \psi_1'(\infty) = -\zeta_0, \quad \chi_1'(\infty) = 1$$

После решения этой системы определяются величины

$$A_1 = \frac{3\varepsilon_1 \zeta_0}{4} \frac{\sqrt{\kappa+1}}{\sqrt{2}} \int_0^\infty L_1(\lambda) d\lambda, \quad B_1 = \frac{4\sqrt{2A_1}}{\sqrt{\kappa+1}} \frac{1}{3\zeta_0} \quad (4.15)$$

Последующие системы здесь не приводятся; нетрудно убедиться подстановкой, что если в уравнениях (4.13) положить

$$\psi_2 = \sqrt{A_1} \chi_1, \quad \psi_i = 0 \quad (i \geq 3), \quad \chi_i = A_i = B_i \equiv 0 \quad (i \geq 2) \quad (4.16)$$

то выражения (4.13) удовлетворят уравнению (4.11) и граничным условиям (4.12).

Анализ выражения для давления с учетом (4.13) и (4.16) дает

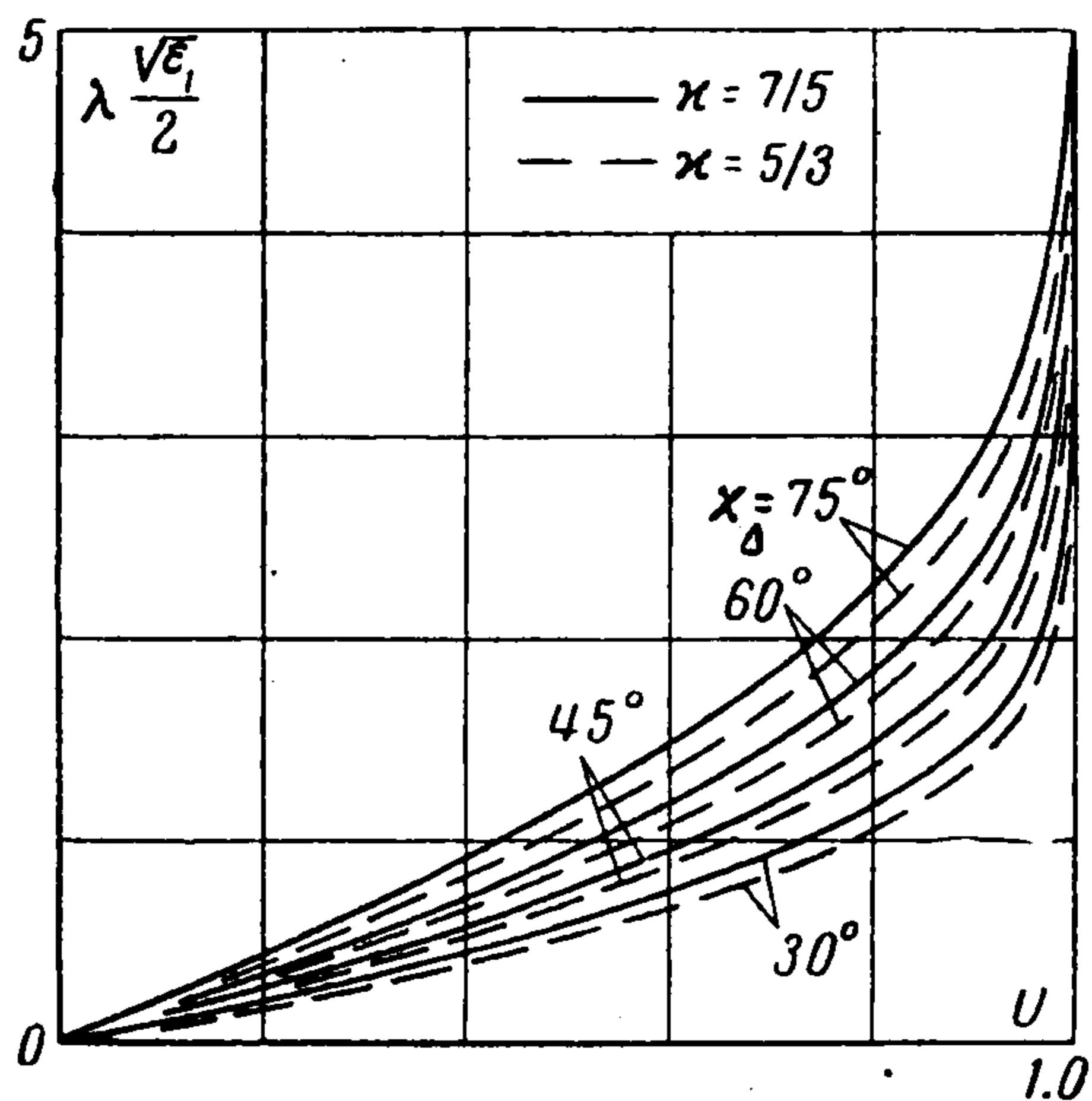
$$p = \frac{P(\zeta)}{\sqrt{x}} = \frac{A_1}{\sqrt{x(\operatorname{ctg} \chi_0 - z/x)^{1/2}}} = \frac{A_1 \sqrt{\sin \chi_0}}{(x \cos \chi_0 - z \sin \chi_0)^{1/2}} = \frac{A_1 \sqrt{\sin \chi_0}}{\sqrt{\xi}} \quad (4.17)$$

где ξ — координата, отсчитываемая по нормали к передней кромке крыла. Таким образом, давление (а также и остальные параметры потока) ведут себя так, как если бы обтекалась стреловидная пластина, решение для сильного взаимодействия на которой известно [9, 10].

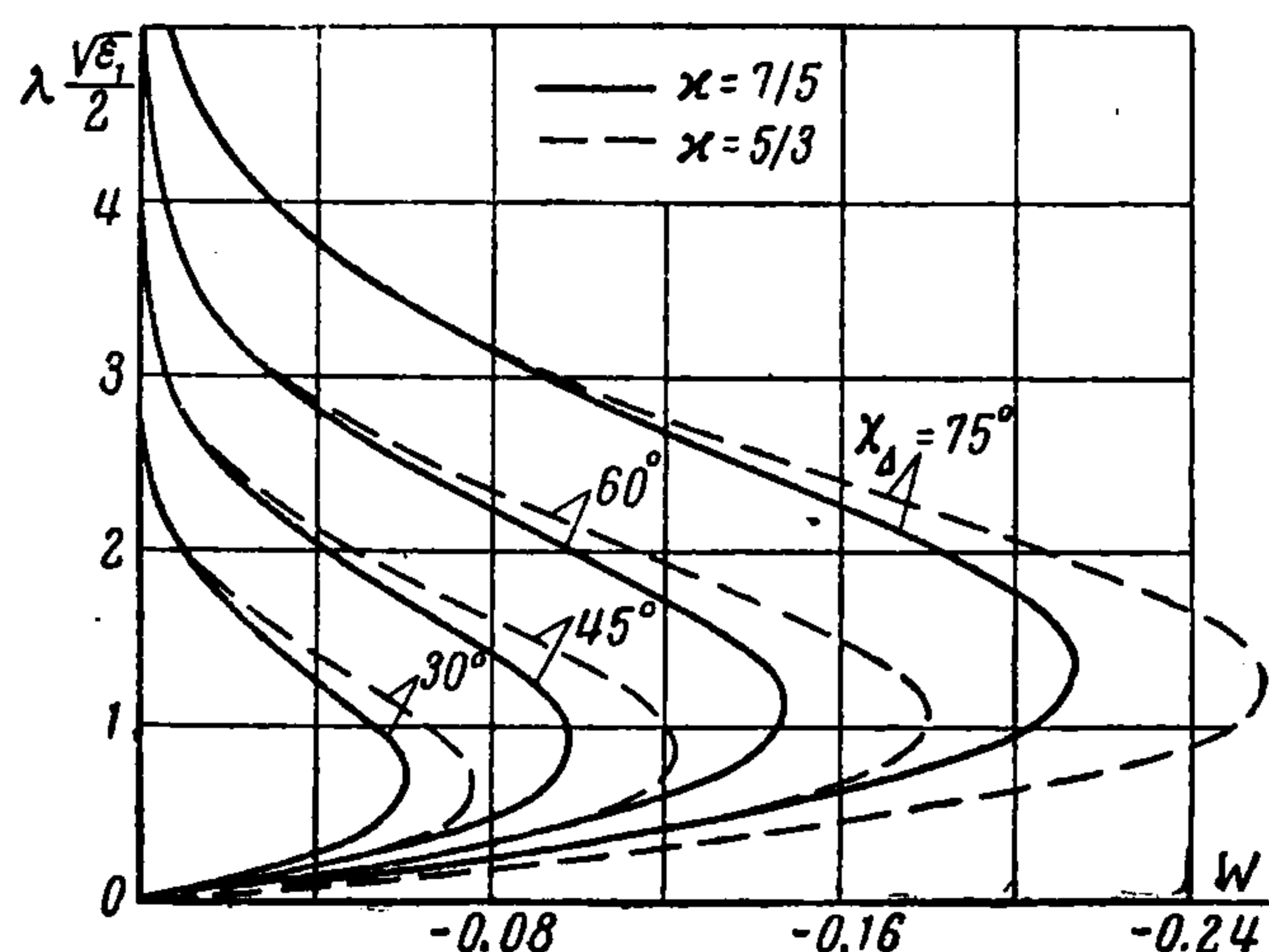
Ввиду того что уравнения (4.11) будут параболическими, имея ζ в качестве характеристики, решение, которое строится от передней кромки, «не чувствует» наличия второй кромки и не удовлетворяет условию $W = 0$ в плоскости симметрии крыла. (В энтропийном слое (п. 2), напротив, в силу гиперболичности уравнений решение строится, исходя из условия $W = 0$ в плоскости симметрии.) Можно показать, что при некотором $\zeta = \zeta_*$ в невязком потоке возникает ударная волна, за которой построенное решение не справедливо. Решение в области $|\zeta| < |\zeta_*|$ в настоящей работе не рассматривается.

На фиг. 4, 5 приведены результаты расчета зависимостей $U(1/2 \lambda \sqrt{\varepsilon_1})$ и $W(1/2 \lambda \sqrt{\varepsilon_1})$, полученные А. А. Богачевой путем численного решения методом Рунге — Кутты уравнений (4.14) на электронно-счетной машине. Принятые в расчетах значения χ_Δ и κ указаны на графиках.

Из приведенных расчетов следует, что максимальное значение $|W|$ при $\kappa = 1.4$ и при χ_Δ , меняющемся от 30° до 75° , лежит в диапазоне от 0.08 до 0.216, а при $\kappa = 1.667$ — в диапазоне от 0.077 до 0.258. Это подтверждает оценки п. 1, согласно которым $W \sim \varepsilon$. (Можно строго показать, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ величина $W \rightarrow 0$.) С ростом χ_Δ величина W возрастает, поэтому для крыльев большой стреловидности влияние



Фиг. 4



Фиг. 5

вторичных течений может быть существенным. Важно отметить, что в противоположность случаю невязкого энтропийного слоя, в котором вторичное течение направлено от плоскости симметрии ($w > 0$ при $z > 0$), в случае вязкого течения около крыльев вторичное течение направлено к плоскости симметрии ($w < 0$ при $z > 0$). Из проекции уравнения импульсов на ось z (третье уравнение (4.1)) получаем, что вблизи плоскости симметрии крыла (при $z > 0$) давление должно нарастать при уменьшении z , чтобы затормозить вторичное течение и обеспечить выполнение условия $w = 0$ при $z = 0$. Отсюда можно заключить, что область $|\zeta| < |\zeta_*|$ вблизи плоскости симметрии крыла, решение для которой не рассматривается, будет областью повышенного, а не пониженного, как в случае энтропийного слоя, давления.

Автор благодарен В. В. Луневу и В. В. Сычеву за весьма полезную дискуссию.

Поступила 2 IV 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Хейз У. Д., Пробстин Р. Ф. Теория гиперзвуковых течений. Изд. иностр. лит., 1962.
2. Черный Г. Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. Физматгиз, 1959.
3. Ладыженский М. Д. О гиперзвуковом обтекании тонких затупленных тел. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1961, № 1.
4. Ладыженский М. Д. Гиперзвуковое правило площадей. Инж. ж., 1961, т. 1, № 1.
5. Ладыженский М. Д. Обтекание тонких тел вязким гиперзвуковым потоком. ПММ, 1963, т. 27, вып. 5.
6. Сычев В. В. К теории гиперзвуковых течений газа со скачками уплотнения степенной формы. ПММ, 1960, т. 24, вып. 3.
7. Burke A. F. Nose and real fluid effects in hypersonic aerodynamics. IAS Papers, No. 59, 114.
8. Холяк В. И. Обтекание пластины при больших сверхзвуковых скоростях. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1962, № 5.
9. Whalen R. J. Boundary-layer interaction on a jawed infinite wing in hypersonic flow. JASS, 1959, v. 26, No. 12.
10. Dewey C. F. Use of local similarity concepts in hypersonic viscous interaction problems. AIAA Journal, 1963, No. 1.