

## О ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ТВЕРДОГО ВРАЩЕНИЯ ЖИДКОСТИ

Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий

(Пермь)

Ранее [1] была решена задача о конвективной устойчивости нестационарного равновесия жидкости в условиях, когда вертикальный равновесный градиент температуры периодически модулируется с некоторой частотой и амплитудой. Как было показано, модуляция параметра существенно влияет на конвективную устойчивость. При определенных условиях это влияние оказывается стабилизирующим: модуляция температурного градиента повышает устойчивость равновесия по сравнению со стационарным случаем. Сходный эффект параметрического повышения устойчивости был обнаружен на опыте [2], где наблюдалось возникновение тэйлоровской неустойчивости движения жидкости между цилиндрами при модуляции угловой скорости.

В данной работе исследуется устойчивость наиболее простого нестационарного движения жидкости — модулированного твердого вращения. Как известно (см. [3, 4]), стационарное вращение жидкости как твердого тела устойчиво по отношению к малым возмущениям при всех значениях угловой скорости вращения. Модуляция угловой скорости приводит к появлению областей неустойчивости. Влияние модуляции параметра оказывается дестабилизирующим.

1. Пусть жидкость заполняет полость, имеющую форму тела вращения. Границы полости вращаются вокруг фиксированной оси с угловой скоростью, меняющейся периодически со временем

$$\Omega(t) = \Omega_1 + \Omega_2 \sin \omega_0 t \quad (1.1)$$

где  $\Omega_1$  — средняя угловая скорость вращения,  $\Omega_2$  — амплитуда модуляции. Рассмотрим случай медленной модуляции, когда частота  $\omega_0$  мала

$$\omega_0 \ll \nu / L^2 \quad (1.2)$$

Здесь  $\nu$  — кинематическая вязкость,  $L$  — характерный размер. В этом случае справедливо квазистационарное приближение: жидкость будет вращаться как твердое тело с однородной угловой скоростью (1.1), равной скорости границ. В неподвижной системе отсчета скорость жидкости

$$\mathbf{v}_0 = \Omega(t) \times \mathbf{r} \quad (1.3)$$

Рассмотрим малые возмущения нестационарного вращения жидкости (1.3). В системе отсчета, вращающейся вместе с жидкостью с угловой скоростью  $\Omega(t)$ , уравнения малых возмущений имеют вид (центробежная сила  $\Omega \times (\mathbf{r} \times \Omega)$  и сила инерции, связанная с неравномерностью вращения системы отсчета  $\mathbf{r} \times \dot{\Omega}$ , выпадают в силу уравнения для невозмущенного движения)

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} - 2(\Omega \times \mathbf{v}), \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (1.4)$$

где  $\mathbf{v}$  и  $p$  — возмущения скорости и давления.

2. Рассмотрим сначала бесконечный слой жидкости, ограниченный плоскостями  $z = \pm h$  и вращающийся вокруг оси  $z$ . Применяя к уравнению (1.4) операции  $\text{rot}$  и  $\text{rot rot}$  и спроектировав полученные уравнения на ось вращения  $z$ , получим систему уравнений для  $z$ -составляющих скорости  $v_z$  и вихря скорости  $F = \text{rot}_z v$

$$\frac{\partial F}{\partial t} - 2\Omega(t) \frac{\partial v_z}{\partial z} = \nu \Delta F, \quad \frac{\partial}{\partial t} \Delta v_z + 2\Omega(t) \frac{\partial F}{\partial z} = \nu \Delta \Delta v_z \quad (2.1)$$

Из системы (2.1) можно исключить  $F$  и получить уравнение, содержащее только  $v_z$ ; в предположении (1.2) оно приводится к виду

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \Delta\right)^2 \Delta v_z = -4\Omega^2(t) \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \quad (2.2)$$

Уравнение (2.2) допускает простое точное решение в случае, когда возмущения скорости удовлетворяют условиям на свободных границах

$$v_z = v_z'' = v_z''' = 0 \quad \text{при } z = \pm h \quad (2.3)$$

(штрихом обозначено дифференцирование по  $z$ ). Положим

$$v_z = v(t) \exp[i(k_1 x + k_2 y)] \begin{cases} \cos[1/2(n+1)\pi z/h] & (n=0, 2, 4, \dots) \\ \sin[1/2(n+1)\pi z/h] & (n=1, 3, 5, \dots) \end{cases} \quad (2.4)$$

Подставляя (2.4) в (2.2), получим

$$v'' + 2\nu\kappa^2 v' + \nu^2 \kappa^4 \left[1 + \frac{(n+1)^2 \pi^2}{\nu^2 \kappa^6 h^2} \Omega^2(t)\right] v = 0 \quad (2.5)$$

$$\kappa^2 = k_1^2 + k_2^2 + 1/4 (n+1)^2 \pi^2 / h^2$$

Выбрав за единицу времени величину  $1/\nu\kappa^2$ , уравнение (2.5) приведем к виду

$$v'' + 2v' + [1 + (T_1 + T_2 \sin p_* t)^2] v = 0 \quad (2.6)$$

$$T_1 = \frac{(n+1)\pi}{\nu\kappa^3 h} \Omega_1, \quad T_2 = \frac{(n+1)\pi}{\nu\kappa^3 h} \Omega_2, \quad p_* = \frac{\omega_0}{\nu\kappa^2} \quad (2.7)$$

Здесь  $p_*$  — безразмерная частота модуляции,  $T_1$  и  $T_2$  — безразмерные параметры, определяющие среднюю угловую скорость и амплитуду модуляции; соответствующие числа Тэйлора равны  $T_1^2$  и  $T_2^2$ .

Рассмотрим теперь плоский бесконечный слой с твердыми границами. В этом случае граничные условия таковы:

$$v_z = v_z' = F = 0 \quad \text{при } z = \pm h \quad (2.8)$$

При этих граничных условиях методом Галеркина можно получить эффективное приближенное решение. Положим

$$v_z = \exp[i(k_1 x + k_2 y)] \sum_i v_i(t) p_i(z), \quad F = \exp[i(k_1 x + k_2 y)] \sum_i f_i(t) q_i(z)$$

где функции  $p_i(z)$  и  $q_i(z)$  удовлетворяют граничным условиям

$$p_i = p_i' = q_i = 0 \quad \text{при } z = \pm h \quad (2.10)$$

Функции  $v_i(t)$  и  $f_i(t)$  в (2.9) рассматриваются как коэффициенты разложения  $v_z$  и  $F$  по системе координатных функций. Эти коэффициенты определяются из обычных условий метода Галеркина. При этом получается система уравнений первого порядка с периодическими коэффициентами для  $v_i(t)$  и  $f_i(t)$ .

Система (2.1) имеет решения «четного» и «нечетного» типа: «четному» решению соответствует четная функция  $v_z(z)$  и нечетная  $F(z)$ ; «нечетному» решению — наоборот. Существует бесконечная последовательность решений того и другого типа; нас будут интересовать только первые решения из этих последовательностей (в случае свободных границ этим первым решениям соответствовали номера  $n = 0, 1$  в (2.4)).

Рассмотрим «четное» решение. Оставляя в первом приближении по одному слагаемому в суммах (2.9), выберем в качестве функций  $p(z)$  и  $q(z)$  полиномы, удовлетворяющие условиям (2.10) и дополнительному условию  $q''(\pm h) = 0$ , вытекающему из уравнения (2.1)

$$p(z) = (1 - \zeta^2)^2, \quad q(z) = \zeta(1 - \zeta^2)(7 - 3\zeta^2) \quad (\zeta = z/h) \quad (2.11)$$

Условия Галеркина приводят к системе уравнений для  $v(t)$  и  $f(t)$ . Исключая из нее  $f(t)$  получим

$$v'' + 2\varepsilon v' + [1 + (T_1 + T_2 \sin p_* t)^2] v = 0 \quad (2.12)$$

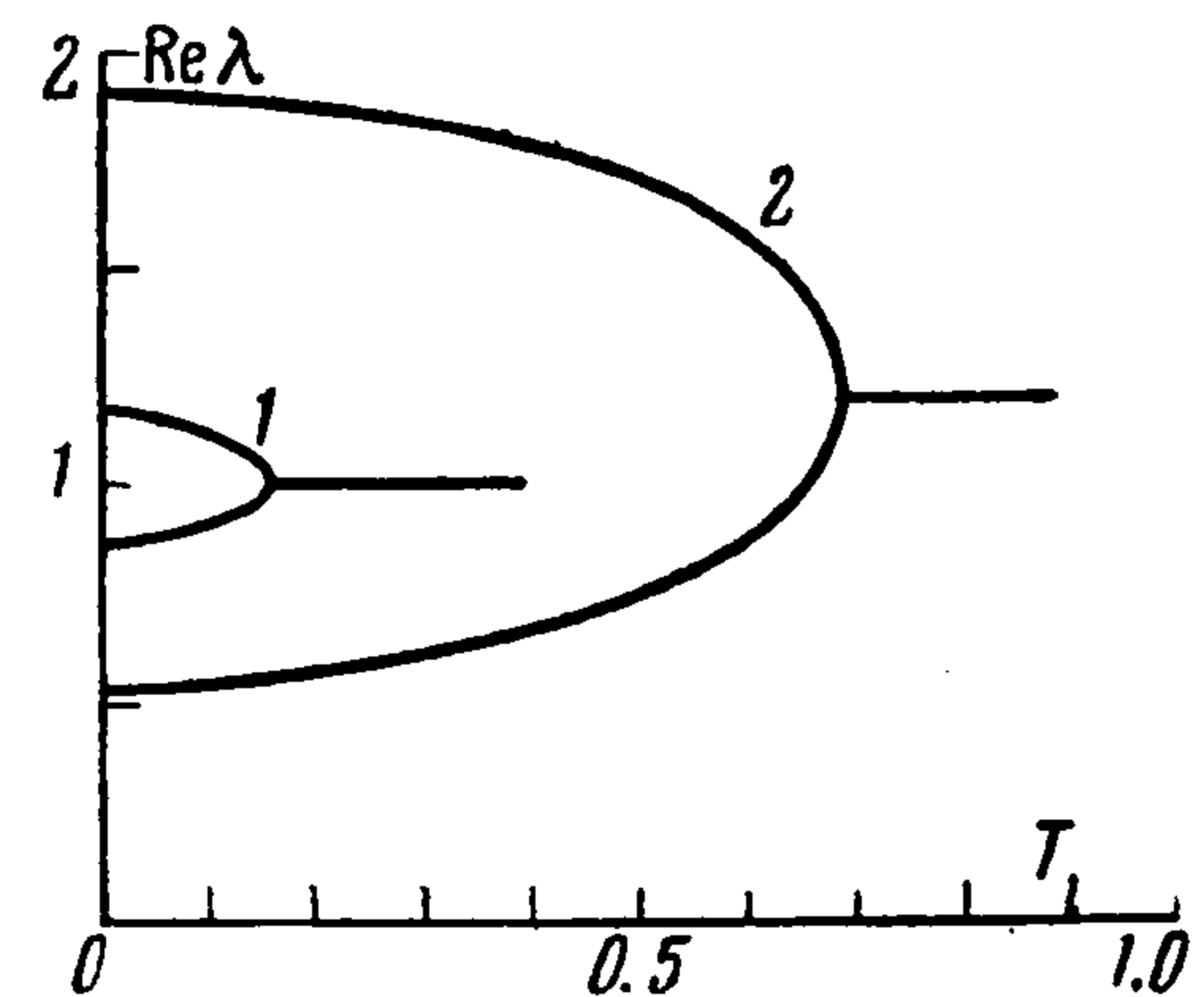
Здесь выбрана единица времени

$$\frac{1}{\nu \kappa^2} \left( \kappa^2 = \frac{99 + 10k^2}{10h^2 \sqrt{P}}, \quad k^2 = (k_1^2 + k_2^2) h^2 \right)$$

и введены обозначения

$$P = \frac{(3 + k^2)(99 + 10k^2)}{5(63 + 12k^2 + 2k^4)}, \quad 2\varepsilon = \frac{1 + P}{\sqrt{P}}$$

$$T_{1,2} = \frac{3}{5\nu \kappa^2} \left( \frac{33}{3 + k^2} \right)^{1/2} \Omega_{1,2}$$



Фиг. 1

Для нахождения первого «нечетного» решения выберем полиномы

$$p(z) = \zeta(1 - \zeta^2)^2, \quad q(z) = (1 - \zeta^2)(5 - \zeta^2) \quad (2.13)$$

Метод Галеркина снова приводит к уравнению вида (2.12), где теперь

$$\kappa^2 = \frac{153 + 62k^2}{62h^2 \sqrt{P}}, \quad P = \frac{(153 + 62k^2)(11 + k^2)}{31(495 + 44k^2 + 2k^4)}, \quad T_{1,2} = \frac{4}{\nu \kappa^2} \left[ \frac{11}{31(11 + k^2)} \right]^{1/2} \Omega_{1,2}$$

Уравнение (2.12) отличается от (2.6) лишь значением коэффициента затухания  $\varepsilon$ . В случае свободных границ  $\varepsilon = 1$ ; в случае твердых границ  $\varepsilon \geq 1$  и зависит от волнового числа  $k$ .

Итак, исследование границ устойчивости сводится к нахождению условий существования периодических решений уравнения (2.12).

3. Рассмотрим равномерное вращение без модуляции ( $T_2 = 0$ ). Тогда поведение возмущений определяется уравнением с постоянными коэффициентами, и существуют частные решения вида  $e^{-\lambda t}$ , где

$$\lambda_{\pm} = \varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - 1 - T_1^2} = \frac{1 + P}{2\sqrt{P}} \pm \left( \frac{(1 - P)^2}{4P} - T_1^2 \right)^{1/2} \quad (3.1)$$

Отсюда следует, что всегда  $\text{Re } \lambda_{\pm} > 0$ , т. е. возмущения затухают при всех  $T_1$ . Если  $T_1 < T_{1*}$ , где  $T_{1*}^2 = 1/4 P^{-1} (1 - P)^2$ , то оба декремента вещественны, т. е. возмущения затухают монотонно, причем при  $T_1 = T_{1*}$  оба декремента совпадают:  $\lambda_+ = \lambda_-$ . При  $T_1 > T_{1*}$  декременты  $\lambda_+$  и  $\lambda_-$  становятся комплексно сопряженными: возмущения затухают, осциллируя с частотой  $\pm (T_1^2 - T_{1*}^2)^{1/2}$ .

Для иллюстрации на фиг. 1 изображены четыре нижних декремента в зависимости от  $T_1$  для  $k = 2$ . Кривые 1 и 2 относятся соответственно к «четным» и «нечетным» решениям. При  $T_1 = 0$  значения декрементов практически не отличаются от точных значений, которые в этом случае легко находятся. В случае свободных границ  $\varepsilon = 1$  и  $T_{1*} = 0$ , т. е. возмущения имеют колебательный характер уже при сколь угодно малой скорости вращения (это обстоятельство связано с тем, что в случае свободных границ спектр декрементов  $\lambda_{\pm}$  оказывается при  $T_1 = 0$  вырожденным).

4. При построении областей устойчивости уравнения (2.12), как и в работе [1], заменим синусоидальную модуляцию прямоугольной, т. е. вместо модулирующей функции  $\sin p_* t$  будем рассматривать периодическую функцию, равную на полупериодах постоянным значениям  $\pm 1$ . Тогда можно написать общее решение уравнения (2.12) на каждом полупериоде. Условия непрерывности и периодизма функции и первой производной определяют нетривиальное периодическое решение (2.12), если между параметрами уравнения выполнено соотношение

$$\cos \frac{\alpha}{p} \cos \frac{\beta}{p} - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2\alpha\beta} \sin \frac{\alpha}{p} \sin \frac{\beta}{p} = \pm \operatorname{ch} \frac{2\varepsilon}{p} \quad \left(p = \frac{p_*}{\pi}\right) \quad (4.1)$$

$$\alpha = \sqrt{1 - \varepsilon^2 + (T_1 + T_2)^2}, \quad \beta = \sqrt{1 - \varepsilon^2 + (T_1 - T_2)^2}$$

Соотношение (4.1) позволяет, например, при фиксированных значениях средней скорости вращения и волнового числа (т. е. при фиксированных  $T_1$  и  $\varepsilon$ ) найти области устойчивых и неустойчивых значений амплитуды и частоты модуляции  $T_2$  и  $p$ . Уравнение (4.1) определяет границы этих областей (удобно рассматривать эти области на плоскости координат  $\sqrt{T_2}, p^{-1}$ ; причем знаки «плюс» и «минус» в правой части (4.1) соответствуют «целым» и «полуцелым» периодическим решениям.

Рассмотрим области неустойчивости при  $\varepsilon = 1$ . В этом случае существует пороговое значение средней скорости вращения. Если  $T_1 < 1/2\pi$ , то вращение устойчиво при всех частотах и амплитудах модуляции. При  $T_1 > 1/2\pi$  появляются области неустойчивости (на фиг. 2 для примера изображены эти области для  $T_1 = 6$ ; области неустойчивости заштрихованы). По мере увеличения  $T_1$  (т. е. средней скорости вращения) число областей неустойчивости увеличивается. Эти области вытянуты вдоль асимптотических линий

$$2T_2/p = m\pi \quad (m = 1, 2, 3 \dots) \quad (4.2)$$

(всем нечетным  $m$  соответствует знак «минус» в (4.1), всем четным — «плюс»). Каждая область зарождается при определенном пороговом значении  $T_1$  в виде точки на плоскости  $(T_2, p)$ .

При пороговом значении  $T_1 = 1/2\pi$  зарождается область  $m=1$  (крайняя слева на фиг. 2); координаты точки зарождения:  $1/p = 0$ ,  $T_2 = \infty$ .

Приведем также пороговые значения  $T_1$  и координаты точек зарождения двух следующих областей неустойчивости:

$$m = 2 \{T_1 = 2.7, 1/p = 0.70, T_2 = 4.2\}$$

$$m = 3 \{T_1 = 3.6; 1/p = 0.97, T_2 = 4.5\}$$

При больших  $m$  новые области неустойчивости возникают при  $T_2 \approx T_1$ ; пороговые параметры определяются соотношениями

$$\operatorname{ch} \frac{2}{p} = (2m - 1) \frac{\pi}{4}, \quad T_1 = p \operatorname{ch} \frac{2}{p} \quad (4.3)$$

Таким образом, при больших  $T_1$  существует полоса неустойчивости, состоящая из чередующихся областей. Резонансным значением амплитуды является  $T_2 = T_1$ . Низкочастотная граница полосы неустойчивости определяется соотношениями (4.3), из которых видно, что максимальное значение  $1/p$  монотонно растет с ростом  $T_1$ , т. е. при быстром вращении параметрическая неустойчивость может быть возбуждена модуляциями низкой частоты. По амплитуде существует абсолютный порог: при значении  $T_2 < 1/2\pi$  вращение устойчиво при всех  $T_1$ .

Кроме указанных областей неустойчивости, образующих основную полосу, существуют еще узкие области, лежащие на тех же асимптотических линиях (4.2), но соответствующие более высоким значениям амплитуды  $T_2$ . Эти области возникают при более высоких  $T_1$ , чем соответствующие области нижней полосы. Число этих областей возрастает с ростом  $m$ . Одна из таких областей ( $m = 3$ ) видна на фиг. 2.

Увеличение параметра трения  $\varepsilon$  приводит, как и следует ожидать, к повышению устойчивости. Области неустойчивости сдвигаются в сторону больших амплитуд  $T_2$ ; появление новых областей неустойчивости происходит при более высоких значениях  $T_1$ . Приведем формулы для порогового значения параметра  $T_1$  и резонансного значения амплитуды  $T_2$ , определяющего положение основной полосы неустойчивости:

$$T_1 = 1/2 \pi \sqrt{\varepsilon^2 + 2\pi^{-2} (\varepsilon^2 - 1)}, \quad T_2 = T_1 + \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \quad (4.4)$$

Обсужденные особенности спектра неустойчивости, по-видимому, сохраняются и в случае синусоидальной модуляции. Области неустойчивости в этом случае можно найти методом Фурье. Для первой ( $m = 1$ ) области параметрического резонанса

$$v = A_1 \sin 1/2 p_* t + B_1 \cos 1/2 p_* t + A_3 \sin 3/2 p_* t + B_3 \cos 3/2 p_* t + \dots \quad (4.5)$$

Ограничиваясь основной гармоникой частоты  $1/2 p_*$ , получим уравнение границы области неустойчивости

$$T_2^2 = 1/2 p_*^2 - 2 \pm \sqrt{2p_*^2 (T_1^2 - 2\varepsilon^2) - 4T_1^4 - 8T_1^2} \quad (4.6)$$

Из (4.6) находим пороговое значение  $T_1 = \varepsilon \sqrt{2}$ . Отсюда для  $\varepsilon = 1$  получаем  $T_1 = \sqrt{2}$ , вместо  $T_1 = 1/2 \pi$  в случае прямоугольной модуляции.

5. Метод расчета, примененный в п. 2 к плоскому слою с твердыми границами, может быть использован и для исследования параметрического возбуждения неустойчивости твердого вращения в полостях другой формы. Первые приближения метода Галеркина приводят при этом к уравнению (2.12) с соответствующими значениями параметров. Приведем результаты расчета для цилиндра и тонкого цилиндрического слоя, вращающихся относительно оси (тонкий цилиндрический слой, по-видимому, наиболее интересен с точки зрения эксперимента).

Полагая возмущения аксиально-симметричными и зависящими от координаты  $z$  по закону  $e^{ik_1 z}$ , получим уравнения для составляющих скорости  $v_r$  и  $v_\varphi$  возмущения ( $r, \varphi, z$  — цилиндрические координаты)

$$Dv_r' + 2\Omega(t)k_1^2 v_\varphi = \nu D^2 v_r \quad \left( D = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} - k_1^2 \right) \quad (5.1)$$

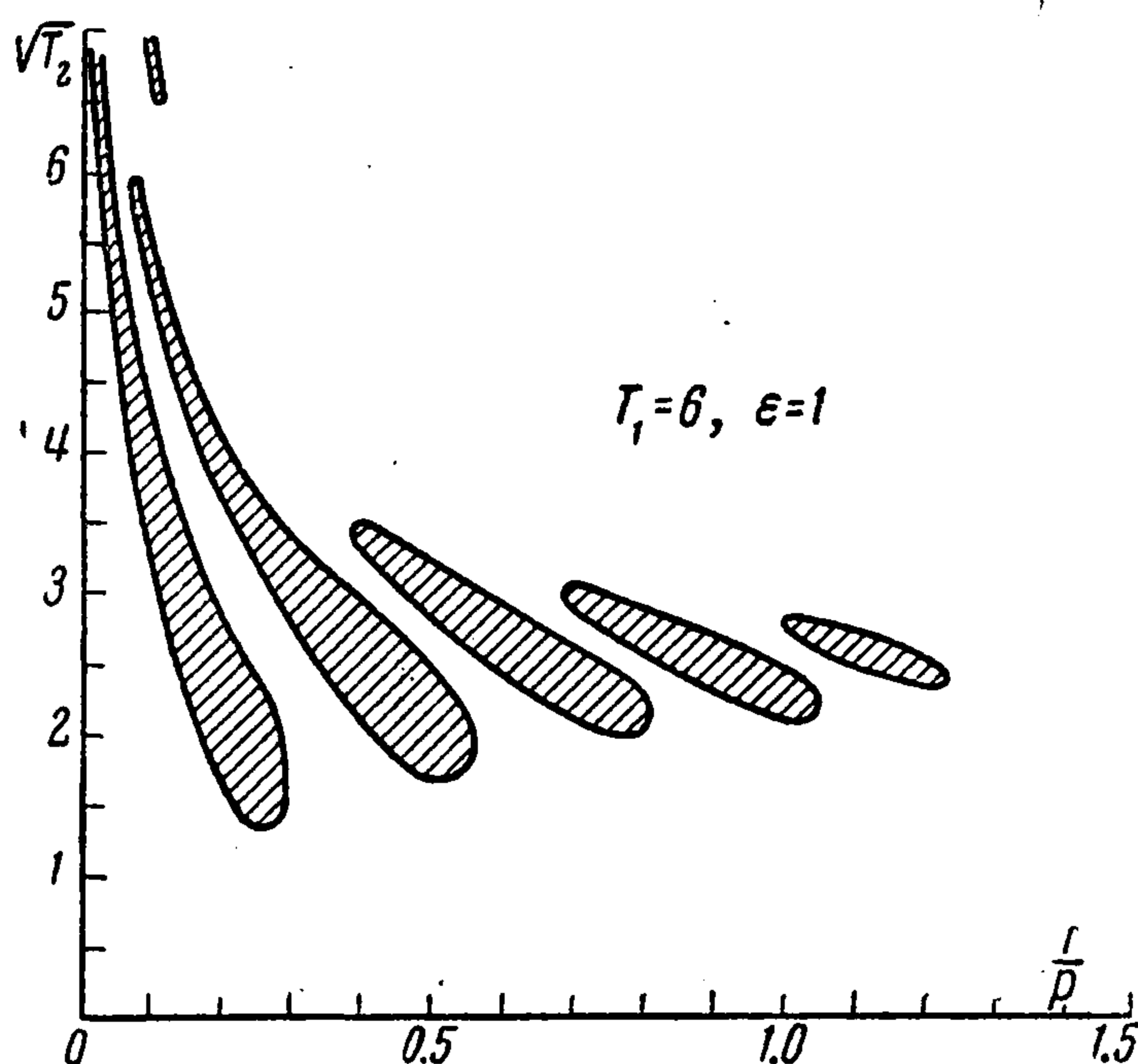
$$v_\varphi' + 2\Omega(t)v_r = \nu Dv_\varphi \quad (5.2)$$

На твердой границе  $v_r = v_r' = v_\varphi = 0$ . При аппроксимации полезно учитывать дополнительное условие  $Dv_\varphi = 0$ , вытекающее из (5.2).

В случае цилиндра радиуса  $R$  скорости аппроксимируем так:

$$v_r = v(t) \zeta (1 - \zeta^2)^2, \quad v_\varphi = f(t) (1 - \zeta^2) (2\zeta - \zeta^3) \quad (\zeta = r/R) \quad (5.3)$$

Для функции  $v(t)$  получается уравнение (2.12) с параметрами



Фиг. 2

$$\kappa^2 = \frac{440 + 31k^2}{31R^2 \sqrt{P}}$$

$$P = \frac{(33 + 2k^2)(440 + 31k^2)}{62(396 + 33k^2 + k^4)}$$

$$k = k_1 R$$

$$T_{1,2} = \frac{38k\Omega_{1,2}}{\nu\kappa^2 [186(33 + 2k^2)]^{1/2}}$$

Рассмотрим еще тонкий цилиндрический слой толщины  $2h = R_2 - R_1$ ; внутренний и внешний радиусы  $R_1$  и  $R_2$  близки,  $h \ll R_1$ . В операторе  $D$ , входящем в (5.1), (5.2), можно пренебречь кривизной

$$D = \frac{\partial^2}{\partial r^2} - k_1^2$$

Введем безразмерную координату  $\zeta$ , отсчитываемую от середины слоя

$$\zeta = h^{-1} [r - 1/2 (R_1 + R_2)]$$

и аппроксимируем компоненты скорости (четное возмущение)

$$v_r = v(t) (1 - \zeta^2)^2, \quad v_\varphi = f(t) (1 - \zeta^2) (5 - \zeta^2) \quad (5.4)$$

Параметры уравнения (2.12) теперь таковы:

$$\kappa^2 = \frac{153 + 62k^2}{62h^2 \sqrt{P}}, \quad P = \frac{(3 + k^2)(153 + 62k^2)}{31(63 + 12k^2 + 2k^4)}, \quad T_{1,2} = \frac{11k\Omega_{1,2}}{\nu\kappa^2 [31(3 + k^2)]^{1/2}}, \quad k = k_1 h$$

Поступила 19 V 1964

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гершун Г. З., Жуховицкий Е. М. О параметрическом возбуждении конвективной неустойчивости. ПММ, 1963, т. 27, вып. 5.
2. Donnelly R. J., Reif F., Suhl H. Enhancement of hydrodynamic stability by modulation. Phys. Rev. Letters, 1962, v. 9, No. 9, p. 363.
3. Сорокин В. С. Нелинейные явления в замкнутых потоках вблизи критических чисел Рейнольдса. ПММ, 1961, т. 25, вып. 2.  
Schultz-Grunow F. Stabilität einer rotierenden Flüssigkeit. ZAMM, 1963, v. 43, No. 9, S. 411.