

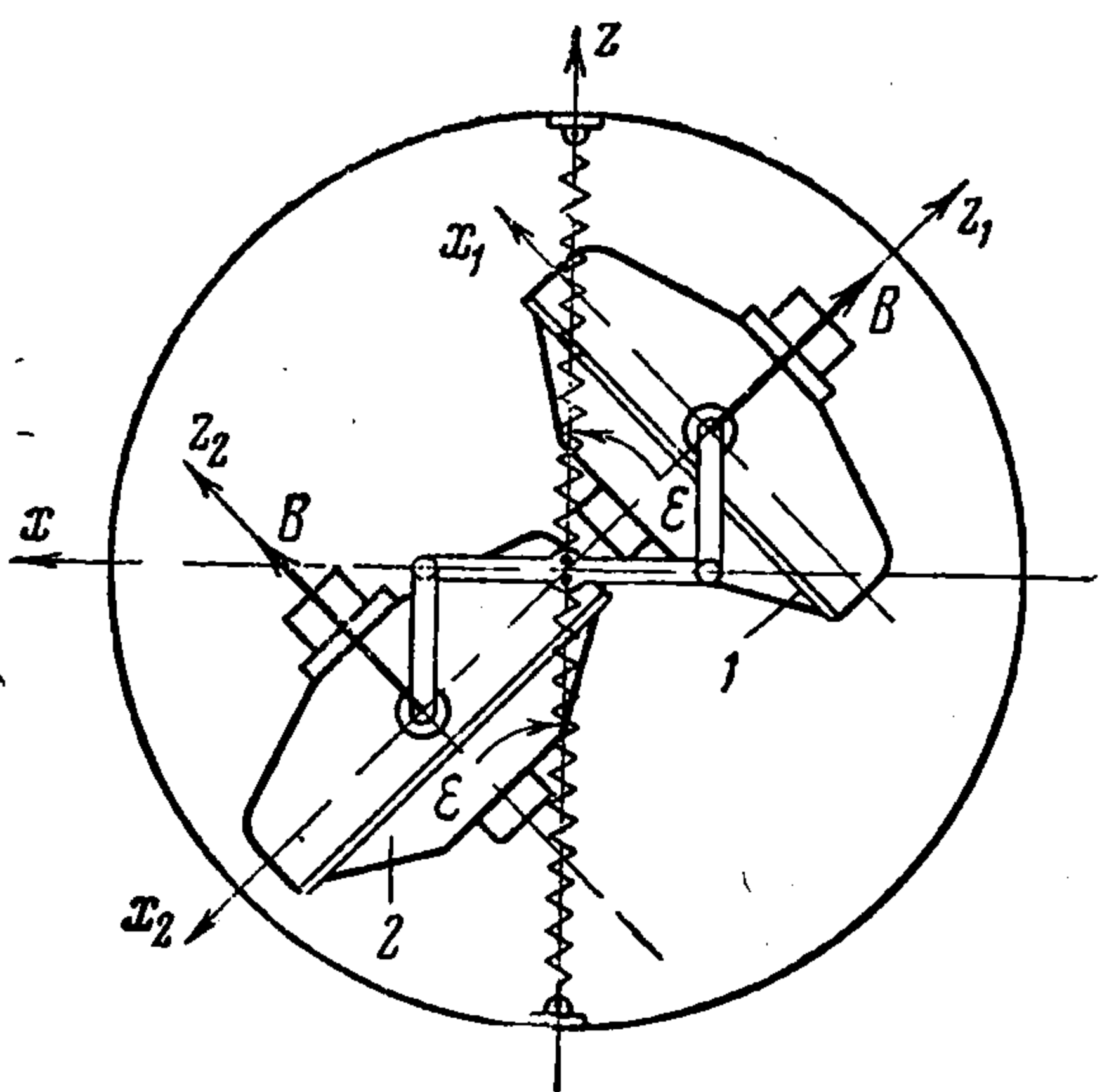
К ТЕОРИИ ГИРОСКОПИЧЕСКОГО КОМПАСА

Я. Н. Ройтенберг

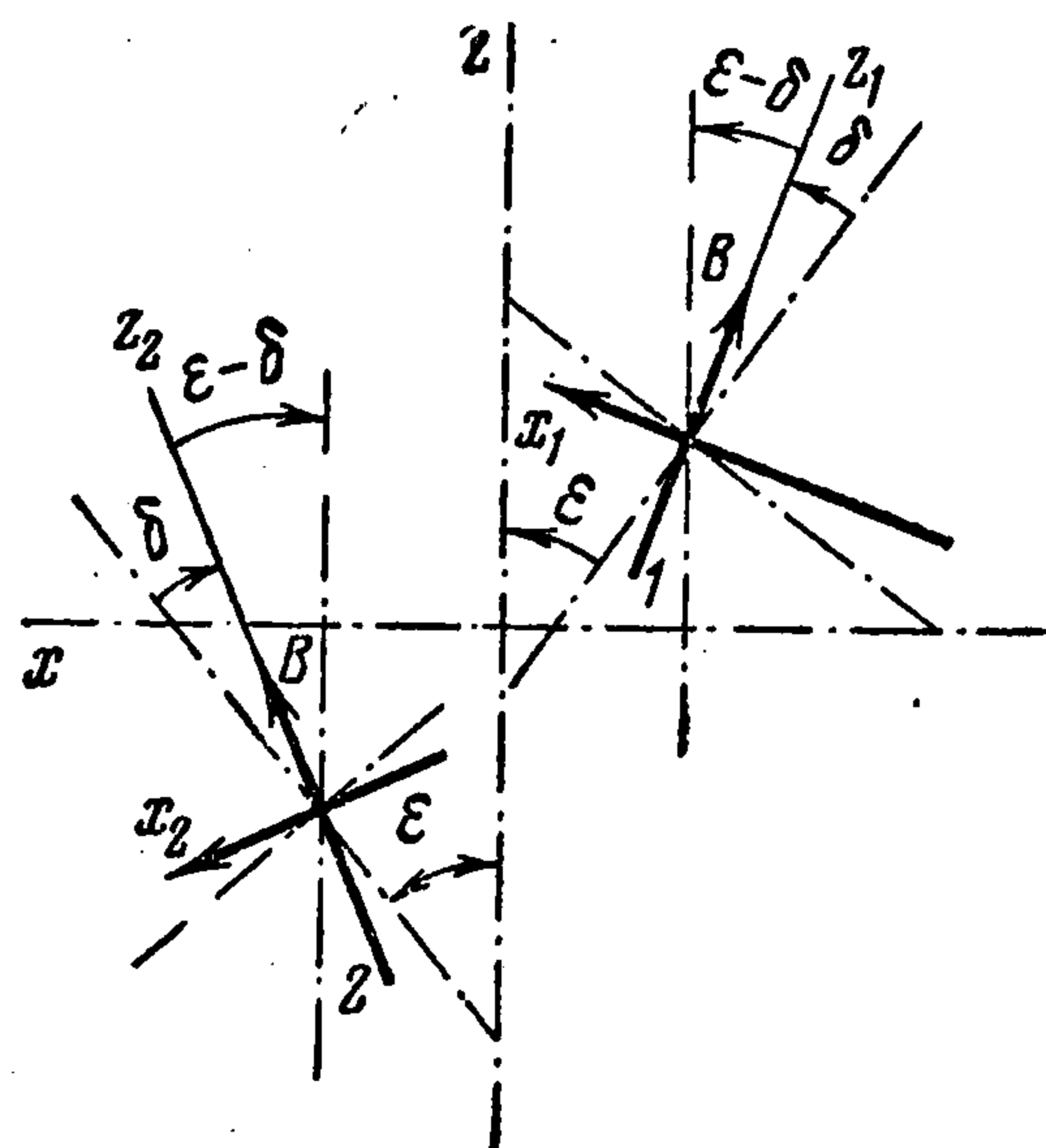
(Москва)

В настоящей статье изучается движение двухроторного гироскопического компаса. Рассмотрены собственные колебания гироскопического компаса и его баллистические девиации, возникающие при маневрировании корабля. Изучено также движение недемпфированного гироскопического компаса под воздействием случайных сил.

1. Уравнения движения двухроторного гироскопического компаса относительно географической системы отсчета. Двухроторный гироскопический компас [1, 2] представляет собой погруженную в жидкость сферу, называемую гиросферой, внутри которой установлено два гироскопа (фиг. 1). Оси роторов гироскопов горизонтальны. Оси кожухов гироскопов



Фиг. 1

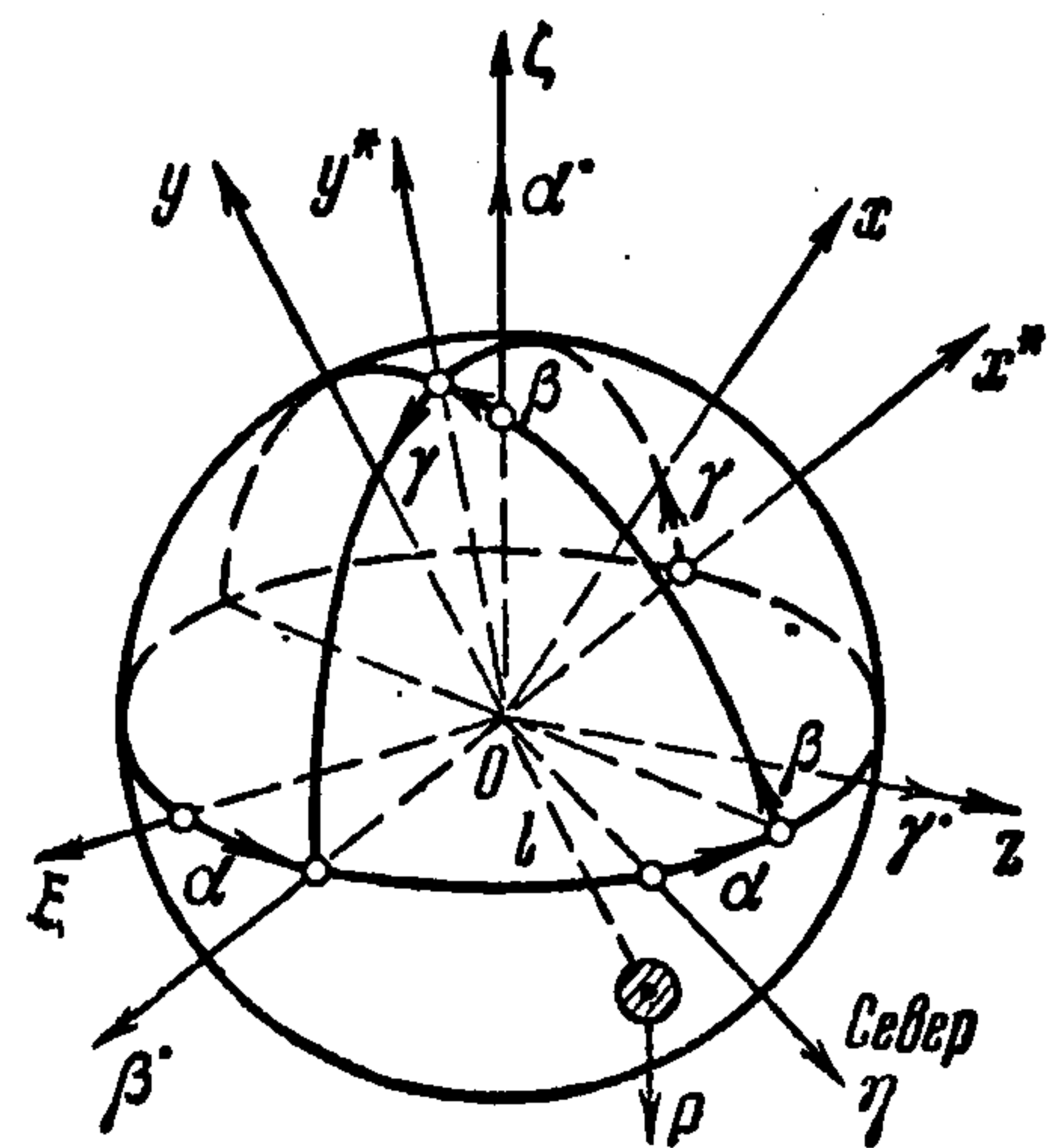


Фиг. 2

расположены вертикально и могут поворачиваться относительно гиросферы в подшипниках, укрепленных на внутренней поверхности гиросферы. Оси кожухов обоих гироскопов связаны между собой при помощи четырехзвенного механизма — антипараллелограмма. Поэтому поворот обоих гироскопов вокруг осей их кожухов совершается в противоположные стороны на равные по величине углы. Среднее звено антипараллелограмма связано с внутренней поверхностью гиросферы при помощи двух пружин, стремящихся удержать кожухи гироскопов в положении, указанном на фиг. 1. Координатные оси x , y , z (фиг. 1, 2) жестко связаны с гиросферой. Начало координат O совпадает с геометрическим центром гиросферы. Плоскость xz , в которой расположены оси роторов гироскопов, назовем экваториальной плоскостью гиросферы. По нормали к этой плоскости направлена вверх ось y . Параллельно биссектрисе угла, образованного осями роторов гироскопов, направлена ось z . Ось x перпендикулярна к осям y и z и образует вместе с ними правый ортогональный трехгранник xuz .

Центр тяжести гиросферы вместе со всеми установленными внутри нее элементами расположен на оси y ниже геометрического центра гиросферы.

Положение осей роторов гироскопов 1 и 2 относительно гиросферы можно определить углом δ поворота гироскопа 1 вокруг оси его кожуха (фиг. 2). С каждым из гироскопов 1 и 2 свяжем координатные оси x_i, y_i, z_i ($i = 1, 2$) с началом координат в центре тяжести соответственного гироскопа. Ось z_i направим по оси ротора гироскопа, ось y_i — вверх по оси кожуха гироскопа; направление оси x_i , перпендикулярной осям y_i и z_i , выбирается так, чтобы трехгранник $x_i y_i z_i$ был правым. Заметим, что оси кожухов гироскопов y_1 и y_2 и ось y гиросферы параллельны. Через ε на фиг. 1 обозначен угол, который составляет ось z_1 ротора гироскопа 1 с осью z гиросферы в начальном положении, когда пружины расположены вдоль оси z гиросферы. Координатные оси x_i, y_i, z_i ($i = 1, 2$) представляют собой оси Резаля гироскопов 1 и 2 соответственно.



Фиг. 3

В качестве системы ориентировки (отсчета) выберем координатную систему $\xi\eta\zeta$, начало O которой совпадает с геометрическим центром гиросферы, а оси ξ, η, ζ ориентированы следующим образом: ось ζ направлена по радиусу земного шара, а оси ξ и η расположены в плоскости, касательной к поверхности земного шара и направлены: ось ξ — на восток, а ось η — на север.

Положение гиросферы относительно координатной системы $\xi\eta\zeta$ определяется углами Эйлера α, β, γ (фиг. 3), из которых α — угол поворота

Таблица 1

	ξ	η	ζ
x^*	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	0
y^*	$\sin \alpha \sin \beta$	$-\cos \alpha \sin \beta$	$\cos \beta$
z	$-\sin \alpha \cos \beta$	$\cos \alpha \cos \beta$	$\sin \beta$

вокруг оси ζ , β — угол поворота вокруг лежащей в горизонтальной плоскости оси x^* (вектор угловой скорости β' направлен по отрицательному направлению оси x^*), а γ — угол поворота гиросферы вокруг ее оси z .

В табл. 1 приведены значения косинусов углов между осями x^*, y^*, z (x^* — линия узлов, y^* — поперечная ось) и осями ξ, η, ζ .

Так как между единичными векторами координатных осей x, y и x^*, y^* имеют место зависимости

$$x^0 = x^{*0} \cos \gamma + y^{*0} \sin \gamma, \quad y^0 = -x^{*0} \sin \gamma + y^{*0} \cos \gamma \quad (1.1)$$

то косинусы углов между осями x, y, z и осями ξ, η, ζ будут иметь приведенные в табл. 2 значения.

Значения косинусов углов между осями x, z гиросферы и осями Резаля x_i, z_i ($i = 1, 2$) гироскопов (фиг. 2) приведены в табл. 3.

Таблица 2

	ξ	η	ζ
x	$-\cos \alpha \cos \gamma + \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$	$-\sin \alpha \cos \gamma - \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma$	$\cos \beta \sin \gamma$
y	$\cos \alpha \sin \gamma + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma$	$\sin \alpha \sin \gamma - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma$	$\cos \beta \cos \gamma$
z	$-\sin \alpha \cos \beta$	$\cos \alpha \cos \beta$	$\sin \beta$

Вычислим теперь мгновенную угловую скорость гиросферы и мгновен-

Таблица 3

	x_1	z_1	x_2	z_2
x	$\cos (\varepsilon - \delta)$	$-\sin (\varepsilon - \delta)$	$\cos (\varepsilon - \delta)$	$\sin (\varepsilon - \delta)$
z	$\sin (\varepsilon - \delta)$	$\cos (\varepsilon - \delta)$	$-\sin (\varepsilon - \delta)$	$\cos (\varepsilon - \delta)$

ную угловую скорость каждого из гироскопов. Координатный трехгранник $\xi\eta\zeta$ (система отсчета), ориентированный, как указано выше,

географически, вследствие вращения земного шара и движения корабля по поверхности земного шара обладает мгновенной угловой скоростью u , проекции которой на оси ξ, η, ζ будут

$$u_1 = -\frac{v_N}{R}, \quad u_2 = U \cos \varphi + \frac{v_E}{R}, \quad u_3 = U \sin \varphi + \frac{v_E}{R} \operatorname{tg} \varphi \quad (1.2)$$

Здесь U — угловая скорость суточного вращения земного шара, φ — широта местонахождения корабля, v_E и v_N — восточная и северная составляющие скорости корабля, R — радиус земного шара.

Проекции мгновенной угловой скорости гиросферы на ее оси x, y, z обозначим через p, q, r соответственно. Эти величины будут следующими

$$\begin{aligned} p &= \alpha \cos \beta \sin \gamma - \beta \cos \gamma + u_1 (-\cos \alpha \cos \gamma + \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma) + \\ &+ u_2 (-\sin \alpha \cos \gamma - \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma) + u_3 \cos \beta \sin \gamma \\ q &= \alpha \cos \beta \cos \gamma + \beta \sin \gamma + u_1 (\cos \alpha \sin \gamma + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma) + \\ &+ u_2 (\sin \alpha \sin \gamma - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma) + u_3 \cos \beta \cos \gamma \\ r &= \alpha \sin \beta + \gamma - u_1 \sin \alpha \cos \beta + u_2 \cos \alpha \cos \beta + u_3 \sin \beta \end{aligned} \quad (1.3)$$

Проекции мгновенной угловой скорости каждого из гироскопов на его оси Резаля x_i, y_i, z_i обозначим соответственно через p_i, q_i, r_i ($i = 1, 2$).

Эти величины определяются выражениями

$$\begin{aligned} p_1 &= p \cos (\varepsilon - \delta) + r \sin (\varepsilon - \delta), & q_1 &= q + \delta \\ r_1 &= -p \sin (\varepsilon - \delta) + r \cos (\varepsilon - \delta) + \varphi_1 \\ p_2 &= p \cos (\varepsilon - \delta) - r \sin (\varepsilon - \delta), & q_2 &= q - \delta \\ r_2 &= p \sin (\varepsilon - \delta) + r \cos (\varepsilon - \delta) + \varphi_2 \end{aligned} \quad (1.4)$$

где φ_1 и φ_2 — угловые скорости собственного вращения гироскопов 1 и 2 соответственно. Углы $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varphi_1$ и φ_2 примем в качестве обобщенных координат рассматриваемой системы.

Уравнения движения системы можно составить при помощи второй методы Лагранжа. При этом ограничимся изучением прецессионного движения системы и пренебрежем ее нутационными колебаниями. Послед-

нее эквивалентно предположению, что кинетический момент всей системы равен геометрической сумме кинетических моментов гироскопов, а кинетический момент каждого из гироскопов направлен по его оси собственного вращения

$$G_i \approx C_1 r_i z_i^0 \quad (i = 1, 2) \quad (1.5)$$

В этих предположениях кинетическая энергия системы в ее движении относительно точки опоры O будет определяться следующим приближенным выражением:

$$T \approx \frac{1}{2} C_1 (r_1^2 + r_2^2) \quad (1.6)$$

Здесь через C_1 обозначен момент инерции ротора гироскопа относительно его оси собственного вращения.

Вокруг осей собственного вращения гироскопов действует момент сил сопротивления и активный вращающий момент. Предполагая, что суммарный момент сил относительно оси собственного вращения каждого из гироскопов $Q_{\varphi_i} \equiv 0$ ($i = 1, 2$), и учитывая, что согласно (1.6), (1.4) и (1.3)

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi_i} = C_1 r_i, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_i} = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (1.7)$$

получим из уравнений Лагранжа второго рода следующие соотношения

$$C_1 r_i = \text{const} \quad (i = 1, 2) \quad (1.8)$$

Собственные моменты гироскопов 1 и 2 обозначим так:

$$C_1 r_1 = B_1, \quad C_1 r_2 = B_2 \quad (1.9)$$

Величина r_i ($i = 1, 2$), согласно (1.4), определяется главным образом значением угловой скорости собственного вращения гироскопа $\dot{\varphi}_i$, так как последняя очень велика — порядка 2000 сек^{-1} . При $\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2$ разность $r_2 - r_1 = 2p \sin(\varepsilon - \delta)$ ничтожно мала по сравнению с r_1 и r_2 . Поэтому, согласно (1.4), можно принять, что $r_1 \approx r_2$, откуда следует равенство собственных моментов обоих гироскопов

$$B_1 \approx B_2 = B \quad (1.10)$$

Перейдем теперь к составлению уравнений Лагранжа для нециклических координат $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Согласно (1.3), (1.4), (1.6), частные производные от кинетической энергии T по обобщенным скоростям равны

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha} = 2B \cos(\varepsilon - \delta) \sin \beta, \quad \frac{\partial T}{\partial \beta} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \gamma} = 2B \cos(\varepsilon - \delta), \quad \frac{\partial T}{\partial \delta} = 0 \quad (1.11)$$

Частные производные от кинетической энергии T по обобщенным координатам имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \alpha} &= 2B (-u_1 \cos \alpha \cos \beta - u_2 \sin \alpha \cos \beta) \cos(\varepsilon - \delta) \\ \frac{\partial T}{\partial \beta} &= 2B (\alpha' \cos \beta + u_1 \sin \alpha \sin \beta - \\ &- u_2 \cos \alpha \sin \beta + u_3 \cos \beta) \cos(\varepsilon - \delta), \quad \frac{\partial T}{\partial \gamma} = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial \delta} &= 2B (\alpha' \sin \beta + \gamma' - u_1 \sin \alpha \cos \beta + u_2 \cos \alpha \cos \beta + u_3 \sin \beta) \sin(\varepsilon - \delta) \end{aligned} \quad (1.12)$$

При вычислении кинетической энергии системы (1.6) было учтено лишь вращение координатного трехгранника $\xi\eta\zeta$ вокруг начала координат,

но не учитывалось движение начала координат. Поэтому к числу внешних сил, приложенных к системе, надо добавить приложенную к центру тяжести гиросферы силу инерции $-mW$, где m — масса гиросферы со всеми установленными внутри нее элементами, а W — ускорение начала координатных осей $\xi\eta\zeta$, т. е. ускорение точки опоры гироскопического компаса. Мгновенная скорость точки опоры гироскопа

$$v = (RU \cos \varphi + v_E) \xi^0 + v_N \eta^0 + v_\zeta \zeta^0 \quad (1.13)$$

Здесь через v_ζ обозначена вертикальная составляющая скорости корабля. Обычно принимается, что $v_\zeta = 0$. Однако в некоторых случаях, например, в условиях движения корабля на волнении, необходимо учитывать, что $v_\zeta = R\dot{\varphi}$, где под R подразумевается расстояние от точки опоры гироскопа до центра земного шара.

Учитывая, что $\dot{\varphi} = v_N / R$, можно, в соответствии с (1.13), составляющие W_1, W_2, W_3 ускорения точки опоры гироскопа по осям ξ, η, ζ , вращающегося с угловой скоростью ω координатного трехгранника $\xi\eta\zeta$, представить в виде

$$\begin{aligned} W_1 &= v_E \dot{\varphi} - 2v_N U \sin \varphi - \frac{v_E v_N}{R} \operatorname{tg} \varphi + 2v_\zeta U \cos \varphi + \frac{v_E v_\zeta}{R} \\ W_2 &= v_N \dot{\varphi} + RU^2 \sin \varphi \cos \varphi + 2v_E U \sin \varphi + \frac{v_E^2}{R} \operatorname{tg} \varphi + \frac{v_N v_\zeta}{R} \\ W_3 &= v_\zeta \dot{\varphi} - 2v_E U \cos \varphi - RU^2 \cos^2 \varphi - \frac{v_E^2}{R} - \frac{v_N^2}{R} \end{aligned} \quad (1.14)$$

В случае, когда $v_\zeta \equiv 0$, выражения (1.14) принимают вид

$$\begin{aligned} W_1 &= v_E \dot{\varphi} - 2v_N U \sin \varphi - \frac{v_E v_N}{R} \operatorname{tg} \varphi \\ W_2 &= v_N \dot{\varphi} + RU^2 \sin \varphi \cos \varphi + 2v_E U \sin \varphi + \frac{v_E^2}{R} \operatorname{tg} \varphi, \quad W_3 = -\frac{V^2}{R} \end{aligned} \quad (1.15)$$

где

$$V = \sqrt{(RU \cos \varphi + v_E)^2 + v_N^2} \quad (1.16)$$

Равнодействующая силы земного тяготения P и силы инерции $-mW$ приложена в центре тяжести гиросферы и может быть представлена так:

$$N = -mW_1 \xi^0 - mW_2 \eta^0 - (P + mW_3) \zeta^0 \quad (1.17)$$

Соответствующие результирующей силе N обобщенные силы по координатам α, β, γ представляют собой частные производные по этим координатам от функции Π_1 , имеющей вид [3]

$$\Pi_1 = -mW_1 \xi_c - mW_2 \eta_c - (P + mW_3) \zeta_c \quad (1.18)$$

где ξ_c, η_c, ζ_c — координаты центра тяжести гиросферы. Учитывая, что центр тяжести гиросферы лежит на оси y , на расстоянии $-l$ от начала координат, можно при помощи табл. 2 определить значения ξ_c, η_c, ζ_c .

Подставляя эти значения в выражение (1.18), приведем его к виду

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= lmW_1 (\cos \alpha \sin \gamma + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma) + \\ &+ lmW_2 (\sin \alpha \sin \gamma - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma) + l(P + mW_3) \cos \beta \cos \gamma \end{aligned} \quad (1.19)$$

Потенциальная энергия пружин, связывающих среднее звено антипараллелограмма с корпусом гиросферы, имеет вид

$$- \Pi_2 = \frac{1}{2} c_1 (\Delta L)^2 \quad (1.20)$$

где c_1 — жесткость, а ΔL — деформация пружин. Из фиг. 4 видно, что

$$\Delta L = \sqrt{L^2 + \rho^2 \sin^2 \delta} - L_0 = h + \frac{\rho^2 \sin^2 \delta}{2L} - \frac{1}{8} \frac{\rho^4 \sin^4 \delta}{L^3} + \dots \quad (1.21)$$

где L_0 — длина свободной пружины, $L - L_0 = h$ — первоначальный натяг пружины.

Подставляя значение ΔL в выражение (1.20), получим следующее выражение для потенциальной энергии пружин

$$- \Pi_2 = \frac{1}{2} c_1 \left(h^2 + \frac{1}{L} h \rho^2 \sin^2 \delta + \dots \right) \quad (1.22)$$

где невыписанные члены содержат $\sin \delta$ не ниже, чем в четвертой степени, и в дальнейшем отбрасываются. Обозначая

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 \quad (1.23)$$

получим для обобщенных сил, соответствующих обобщенным координатам $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, следующие выражения:

$$\begin{aligned} Q_\alpha &= \partial \Pi / \partial \alpha = lm W_1 (-\sin \alpha \sin \gamma + \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma) + \\ &\quad + lm W_2 (\cos \alpha \sin \gamma + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma) \\ Q_\beta &= \partial \Pi / \partial \beta = lm W_1 \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma - \\ &\quad - lm W_2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - l (P + mW_3) \sin \beta \cos \gamma \\ Q_\gamma &= \partial \Pi / \partial \gamma = lm W_1 (\cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma) + \\ &\quad + lm W_2 (\sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma) - l (P + mW_3) \cos \beta \sin \gamma \\ Q_\delta &= \partial \Pi / \partial \delta = -\kappa \sin \delta \cos \delta \quad (\kappa = L^{-1} c_1 h \rho^2) \end{aligned} \quad (1.24)$$

Учитывая (1.11), (1.12), (1.24), получим уравнения движения компаса относительно осей ξ, η, ζ , ориентированных географически:

$$\begin{aligned} [2B \cos (\varepsilon - \delta) \sin \beta]' + 2B (u_1 \cos \alpha \cos \beta + \\ + u_2 \sin \alpha \cos \beta) \cos (\varepsilon - \delta) &= lm W_1 (-\sin \alpha \sin \gamma + \\ + \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma) + lm W_2 (\cos \alpha \sin \gamma + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma) + M_\zeta^* \\ 2B [\alpha' \cos \beta + u_1 \sin \alpha \sin \beta - u_2 \cos \alpha \sin \beta + \\ + u_3 \cos \beta] \cos (\varepsilon - \delta) &= -lm W_1 \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \\ + lm W_2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma + l (P + mW_3) \sin \beta \cos \gamma + M_{x^*}^* \\ [2B \cos (\varepsilon - \delta)]' &= lm W_1 (\cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma) + \\ + lm W_2 (\sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma) - l (P + mW_3) \cos \beta \sin \gamma + M_z^* \\ 2B (\alpha' \sin \beta + \gamma' - u_1 \sin \alpha \cos \beta + u_2 \cos \alpha \cos \beta + \\ + u_3 \sin \beta) \sin (\varepsilon - \delta) &= \kappa \sin \delta \cos \delta - M_{y_1}^* \end{aligned} \quad (1.25)$$

Здесь точки у букв и скобок означают производные по времени; W_i и u_i ($i = 1, 2, 3$) определены выражениями (1.14) и (1.2); через M_ζ^* , $M_{x^*}^*$, M_z^* , $M_{y_1}^*$ обозначены моменты относительно осей всех остальных, не учтенных (1.24), сил, которые могут быть приложены к системе.

2. Уравнения движения гироскопического компаса относительно системы отсчета, связанной с направлением абсолютной скорости корабля. Движение гироскопических приборов относительно системы отсчета, связанной с направлением абсолютной скорости корабля, впервые изучалось в работах А. Ю. Ишлинского [4,5]. Пусть $\xi_0 \eta_0 \zeta$ — система координат, ориентированная так, что одна из горизонтальных осей (ось ξ_0) направлена по вектору V абсолютной скорости корабля (предполагается, что вертикальная составляющая скорости корабля $v_\zeta \equiv 0$). Ось ζ , как и в п. 1, направлена вверх по радиусу земного шара.

Координатные оси ξ_0, η_0 (фиг. 5) повернуты относительно осей ξ, η на угол σ , определяемый из соотношений

$$\sin \sigma = v_N / V \quad (2.1)$$

$$\cos \sigma = (RU \cos \varphi + v_E) / V$$

Положение гиросферы относительно системы отсчета $\xi_0 \eta_0 \zeta$ определяется углами Эйлера α_1, β, γ , из которых

$$\alpha_1 = \alpha - \sigma \quad (2.2)$$

а углы β и γ вводятся так же, как в п. 1.

Проекция мгновенной угловой скорости трехгранника $\xi_0 \eta_0 \zeta$ на оси ξ_0, η_0, ζ будут

$$u_1^\circ = 0, \quad u_2^\circ = V/R, \quad u_3^\circ = \Omega \quad (2.3)$$

$$\Omega = U \sin \varphi + (v_E / R) \operatorname{tg} \varphi + \sigma \quad (2.4)$$

Проекция ускорения точки опоры гироскопа на оси ξ_0, η_0, ζ равны

$$W_1^\circ = V', \quad W_2^\circ = V\Omega, \quad W_3^\circ = -V^2/R \quad (2.5)$$

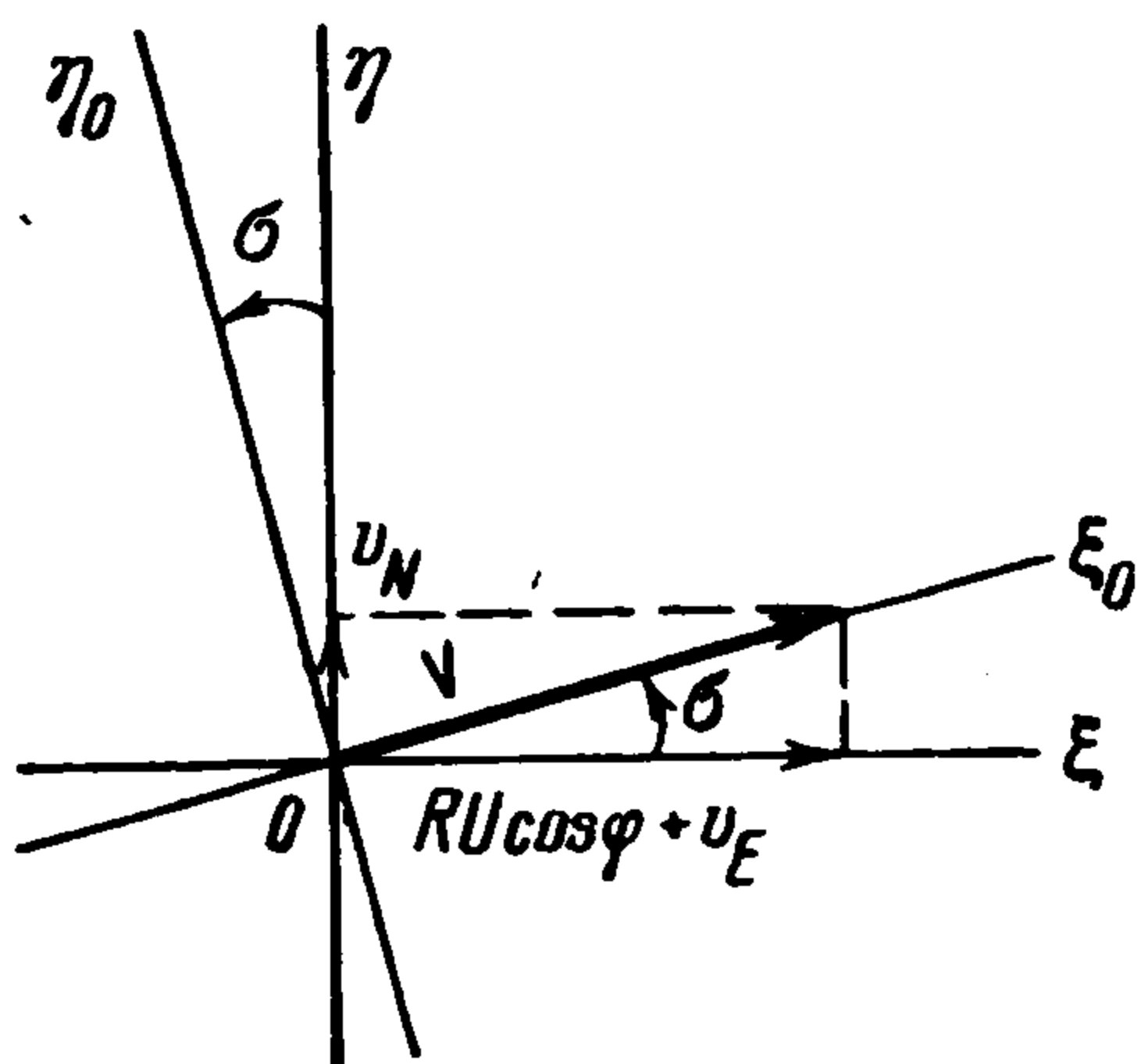
Подставляя в уравнения (1.25) вместо u_i и W_i ($i = 1, 2, 3$) величины (2.3) и (2.5), получим систему уравнений, описывающую движение гироскопического компаса относительно координатных осей ξ_0, η_0, ζ

$$\begin{aligned} [2B \cos(\varepsilon - \delta) \sin \beta]' + 2B \cos(\varepsilon - \delta) (V/R) \sin \alpha_1 \cos \beta &= \\ = lm V (-\sin \alpha_1 \sin \gamma + \cos \alpha_1 \sin \beta \cos \gamma) + \\ + lm V \Omega (\cos \alpha_1 \sin \gamma + \sin \alpha_1 \sin \beta \cos \gamma) + M_\zeta^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2B \cos(\varepsilon - \delta) [\alpha_1' \cos \beta - (V/R) \cos \alpha_1 \sin \beta + \Omega \cos \beta] &= \\ = -lm V \sin \alpha_1 \cos \beta \cos \gamma + lm V \Omega \cos \alpha_1 \cos \beta \cos \gamma + \\ + l (P - mV^2/R) \sin \beta \cos \gamma + M_{x^*}^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [2B \cos(\varepsilon - \delta)]' = lm V (\cos \alpha_1 \cos \gamma - \sin \alpha_1 \sin \beta \sin \gamma) + \\ + lm V \Omega (\sin \alpha_1 \cos \gamma + \cos \alpha_1 \sin \beta \sin \gamma) - \\ - l (P - mV^2/R) \cos \beta \sin \gamma + M_z^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2B \sin(\varepsilon - \delta) [\alpha_1' \sin \beta + \gamma' + (V/R) \cos \alpha_1 \cos \beta + \\ + \Omega \sin \beta] = \kappa \sin \delta \cos \delta - M_{y_1}^* \end{aligned} \quad (2.6)$$



Фиг. 5

Уравнения движения гироскопического компаса относительно осей, связанных с направлением абсолютной скорости корабля, полученные в работе А. Ю. Ишлинского [4] при помощи теоремы о кинетическом моменте, имеют в принятых здесь обозначениях следующий вид:

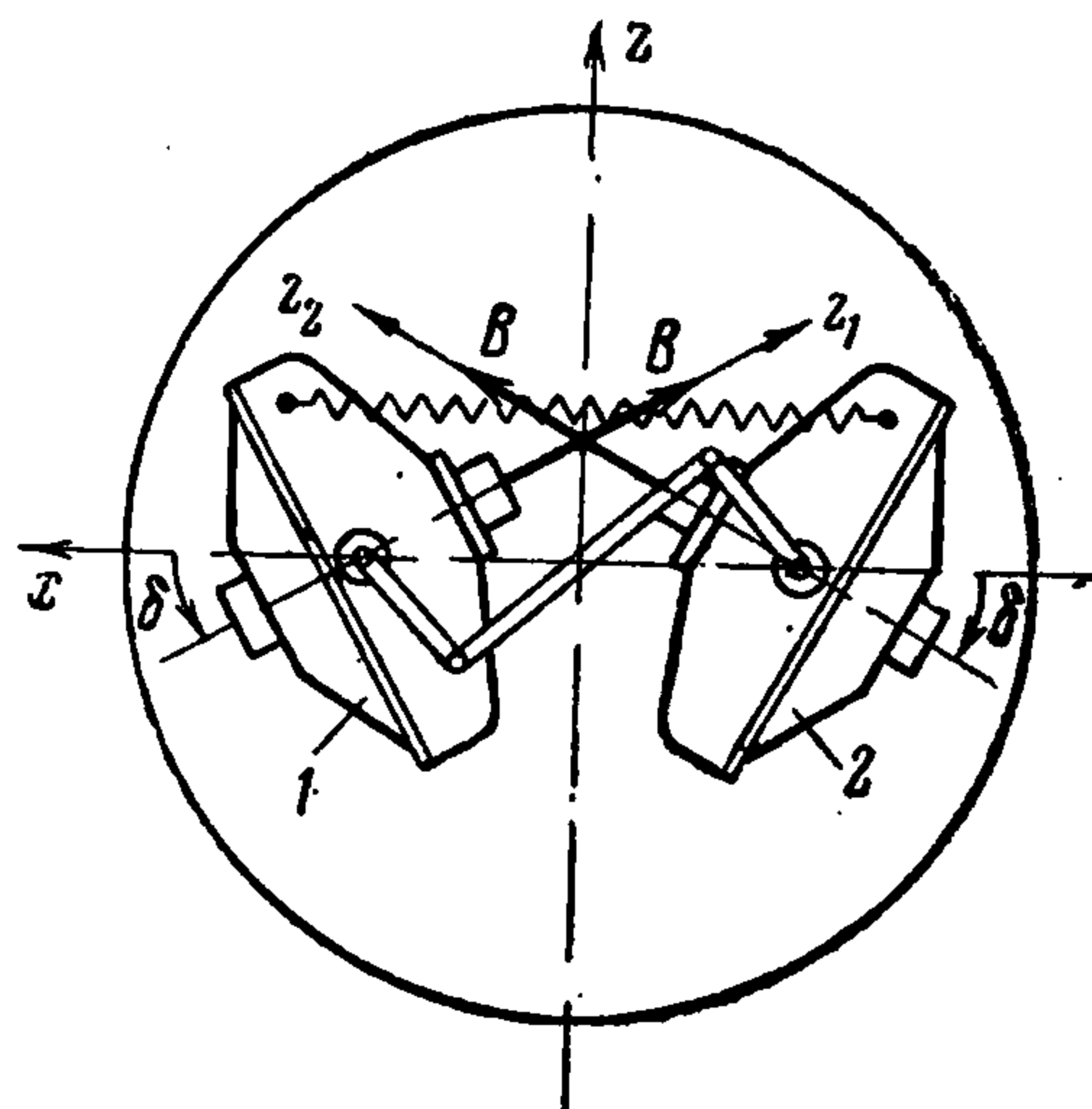
$$\begin{aligned}
 2B \cos(\varepsilon - \delta) [-(V/R) (\sin \alpha_1 \sin \gamma - \cos \alpha_1 \sin \beta \cos \gamma) - (\alpha_1' + \Omega) \cos \beta \cos \gamma - \beta' \sin \gamma] &= \\
 &= lmV \sin \alpha_1 \cos \beta - lmV \Omega \cos \alpha_1 \cos \beta - l (P - mV^2/R) \sin \beta - M_x^* \\
 2B \cos(\varepsilon - \delta) [(V/R) (\sin \alpha_1 \cos \gamma + \cos \alpha_1 \sin \beta \sin \gamma) - (\alpha_1' + \Omega) \cos \beta \sin \gamma + \beta' \cos \gamma] &= M_y^* \\
 [2B \cos(\varepsilon - \delta)]' &= lmV (\cos \alpha_1 \cos \gamma - \sin \alpha_1 \sin \beta \sin \gamma) + lmV \Omega (\sin \alpha_1 \cos \gamma + \\
 &+ \cos \alpha_1 \sin \beta \sin \gamma) - l (P - mV^2/R) \cos \beta \sin \gamma + M_z^* \\
 2B \sin(\varepsilon - \delta) [(V/R) (\cos \alpha_1 \cos \beta + (\alpha_1' + \Omega) \sin \beta) + \gamma'] &= \kappa \sin \delta \cos \delta - M_{y_1}^* \quad (2.7)
 \end{aligned}$$

Можно показать, что системы дифференциальных уравнений (2.6) и (2.7) получаются одна из другой при помощи соответствующих преобразований. Действительно, умножая первое уравнение системы (2.7) на $-\cos \beta \sin \gamma$, второе — на $\cos \beta \cos \gamma$ и третье — на $\sin \beta$ и складывая эти уравнения, получим первое уравнение системы (2.6). Умножая первое уравнение системы (2.7) на $-\cos \gamma$, а второе — на $-\sin \gamma$ и складывая эти уравнения, получим второе уравнение системы (2.6). Третье и четвертое уравнения системы (2.6) и (2.7) совпадают. Таким образом, системы дифференциальных уравнений (2.6) и (2.7) эквивалентны.

3. Пространственный гироскопический компас. При определенном выборе параметров гиросфера двухроторного гироскопического компаса оказывается стабилизированной в пространстве и может быть применена в качестве чувствительного элемента пространственного гироскопического компаса или гиригоризонткомпаса.

Уравнения движения пространственного гироскопического компаса можно получить из приведенных выше уравнений (1.25), если учесть, что у этого прибора (фиг. 6) оси роторов обоих гироскопов в случае, когда роторы не вращаются, расположены по оси x гиросферы, чему соответствует $\varepsilon = \pi/2$, а жесткость пружины, связывающей между собой кожухи обоих гироскопов, выбирается следующей:

$$\kappa = 4B^2 / lmR \quad (3.1)$$



Фиг. 6

При указанных условиях уравнения (1.25) имеют при любом законе движения корабля следующее частное решение

$$\alpha^\circ = \alpha^*, \quad \beta^\circ = 0, \quad \gamma^\circ = 0, \quad \delta^\circ = \delta^* \quad (3.2)$$

где α^* и δ^* определяются из соотношений

$$\sin \alpha^* = v_N / V, \quad \cos \alpha^* = (RU \cos \varphi + v_E) / V, \quad 2B \sin \delta^* = lmV \quad (3.3)$$

Уравнения малых колебаний относительно положения, определяемого соотношениями (3.2), имеют следующее решение:

$$w_1(t) = w_1(0) \exp \left(-i \int_0^t [v - \Omega(\tau)] d\tau \right), \quad w_2(t) = w_2(0) \exp \left(-i \int_0^t [v + \Omega(\tau)] d\tau \right) \quad (3.4)$$

Здесь

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{V}{R} (\alpha - \alpha^*) + v\gamma + i \left[v\beta + \frac{\Xi}{lm R} (\delta - \delta^*) \right] \\ w_2 &= \frac{V}{R} (\alpha - \alpha^*) - v\gamma + i \left[v\beta - \frac{\Xi}{lm R} (\delta - \delta^*) \right] \end{aligned} \quad (3.5)$$

где

$$v = \sqrt{g/R}, \quad \Xi = \sqrt{4B^2 - (lm V)^2} \quad (3.6)$$

Величина Ω определяется выражением (2.4), которое можно привести к виду

$$\Omega = u_3 + \alpha^* = V^{-2} [(RU \cos \varphi + v_E) W_2 - v_N W_1]$$

Из (3.4) и (3.5) следует, что если в начальный момент времени $t = 0$

$$\alpha(0) = \alpha^*(0), \quad \beta(0) = \gamma(0) = 0, \quad \delta(0) = \delta^*(0) \quad (3.7)$$

то при любом законе маневрирования корабля обобщенные координаты α , β , γ и δ будут изменяться следующим образом:

$$\alpha(t) = \alpha^*(t), \quad \beta(t) = 0, \quad \gamma(t) = 0, \quad \delta(t) = \delta^*(t) \quad (3.8)$$

т.е. единственным отклонением прибора будет отклонение в азимуте $\alpha^*(t)$.

Закон движения пространственного гироскопического компаса при произвольном характере маневрирования корабля, определяемый выражениями (3.4), был найден впервые в работе [4] А. Ю. Ишлинского, в которой исходными приняты уравнения движения гироскопа в форме (2.7).

Пространственный гироскопический компас является высокопрецизионным прибором и требует большой точности изготовления.

Построение гироскопического компаса требовало обеспечения исключительно малых значений моментов сил трения в азимутальном подвесе чувствительного элемента гироскопа, что было в свое время достигнуто у двухроторного гироскопа применением гиросферы, подвешенной в жидкости, а у других гироскопов — введением соответствующих конструктивных мероприятий.

Для построения пространственного гироскопического компаса помимо этого необходимо обеспечить еще достаточную малость моментов сил трения в опорах осей кожухов гироскопов. Это можно проиллюстрировать на следующем примере.

У пространственного гироскопического компаса, построенного фирмой Anschütz [6], собственный момент гироскопа $B = 1.5 \cdot 10^6$ Гсм.сек, вес ротора гироскопа 8,8 кг, диаметр гиросферы 400 мм. На экваторе при $v_E = v_N = 0$ угол δ^* поворота кожуха гироскопа относительно гиросферы будет $\delta_0^* = 26^\circ$. Жесткость пружины в соответствии с (3.1) и (3.3) может быть определена по формуле $\kappa = 2B U / \sin \delta_0^*$, что составляет для рассматриваемого прибора около 500 Гсм. Наличие сил сухого трения в опорах осей кожухов гироскопов вызывает появление зоны застоя, в которой восстанавливающий момент пружины меньше момента сил сухого трения. Из приведенных выше данных следует, что для того чтобы зона застоя гироскопов не превышала одной угловой минуты, необходимо, чтобы момент сил сухого трения был не больше 0,15 Гсм. Вес обоих гироскопов составляет около 20 кг, и обеспечение при таком весе столь малого момента сил трения в опорах осей кожухов гироскопов представляет собой достаточно трудную техническую задачу.

Отклонение α^* гироскопического компаса от направления на север, определяемое соотношениями (3.3), называется его курсовой или скоростной девиацией. Эта девиация вычисляется и исключается из показаний гироскопа.

Как показано выше, пространственный гироскопический компас при любом законе маневрирования корабля не имеет никаких девиаций, помимо скоростной девиации. Это обусловлено выбором параметров прибора согласно (3.1), чем обеспечивается тождественное совпадение вызываемого изменением вектора V приращения скоростной

девиации α^* с добавочным отклонением гиросферы, происходящим под воздействием силы инерции — mW . Реализация условия (3.1), как отмечено, связана с трудностями, вследствие чего у обычных двухроторных гироскопических компасов жесткость κ пружины выбирается в несколько раз большей, чем это требуется согласно (3.1) для пространственного гироскопического компаса. Поэтому при маневрировании корабля гироскопический компас имеет помимо скоростной девиации дополнительные отклонения, обусловленные несовпадением перемещения гиросферы под действием силы инерции — mW с приращением скоростной девиации. Эти отклонения носят название баллистических девиаций.

4. Баллистические девиации гироскопического компаса. Уравнения в вариациях. Переходя к изучению баллистических девиаций гироскопического компаса, введем следующие переменные:

$$x_1 = \alpha - \alpha^*, \quad x_2 = \beta, \quad x_3 = \gamma, \quad x_4 = \delta - \delta^* \quad (4.1)$$

где α^* определяется согласно (3.3), а δ^* удовлетворяет соотношению

$$2B \sin(\varepsilon - \delta^*) \frac{V}{R} = \kappa \sin \delta^* \cos \delta^* \quad (4.2)$$

Заметим, что из (2.2) и (4.1) следует, что $x_1 = \alpha_1$, поскольку, согласно (2.1) и (3.3), имеет место соотношение $\sigma = \alpha^*$.

Дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют переменные x_1, \dots, x_4 , можно получить из уравнений (1.25) или из уравнений (2.6). Ограничиваясь членами первого порядка относительно x_1, \dots, x_4 , будем иметь следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{V}{R} x_1 + x_2 - \frac{lmV}{\Xi_1} \Omega x_3 &= 0 \\ x_1 + \frac{lmV}{\Xi_1} x_1 - \left[\frac{l}{\Xi_1} \left(P - m \frac{V^2}{R} \right) + \frac{V}{R} \right] x_2 + \frac{\Xi_2}{\Xi_1} \Omega x_4 &= \left(\frac{lmV}{\Xi_1} - 1 \right) \Omega \quad (4.3) \\ - \Omega x_1 + \frac{1}{mV} \left(P - m \frac{V^2}{R} \right) x_3 + \frac{\Xi_2}{lmV} x_4 + \frac{\Xi_2}{lmV} x_4 &= \frac{1}{lmV} (lmV - \Xi_1) \\ x_3 + \Omega x_2 - \frac{1}{\Xi_2} \left(\Xi_1 \frac{V}{R} + \kappa \cos 2\delta^* \right) x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Здесь

$$\Xi_1 = 2B \cos(\varepsilon - \delta^*), \quad \Xi_2 = 2B \sin(\varepsilon - \delta^*) \quad (4.4)$$

Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами (4.3) представляют собой уравнения в вариациях.

Решение уравнений (4.3) при нулевых начальных условиях определяет собой баллистические девиации гироскопического компаса. При отличных от нуля начальных условиях, помимо баллистических девиаций, будут еще иметь место собственные колебания гироскопического компаса.

В качестве примера в табл. 4 приведены значения функций $x_i(t)$ ($i=1, \dots, 4$), представляющих собой полученное на электронной вычислительной машине (автор благодарен А. В. Якименко и Л. И. Гусенковой за составление программы вычислений) решение уравнений (4.3) при нулевых начальных условиях для случая правильной циркуляции корабля с изменением курса по закону $\psi(t) = \psi_0 - \omega t$, где $\psi_0 = 90^\circ$, $\omega = 0.01745 \text{ сек.}^{-1}$ при скорости корабля $v = 15 \text{ мсек}^{-1}$, на трех широтах

Таблица 4

t сек	$10^3 x_1$			$10^2 x_2$		
	$\varphi = 60^\circ$	$\varphi = 70^\circ$	$\varphi = 80^\circ$	$\varphi = 60^\circ$	$\varphi = 70^\circ$	$\varphi = 80^\circ$
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
20	1.5708	3.3003	12.1899	-0.0008	-0.0011	-0.0021
40	2.9676	6.2885	23.7681	-0.0052	-0.0059	-0.0105
60	4.0120	8.6225	33.8786	-0.0157	-0.0166	-0.0285
80	4.5392	9.9369	41.1949	-0.0274	-0.0290	-0.0520
100	4.4495	9.9233	43.8920	-0.0217	-0.0271	-0.0588
120	3.7832	8.4944	40.1603	0.0313	0.0162	-0.0061
140	2.7710	5.9707	29.6957	0.1589	0.1275	0.1546
160	1.7939	3.1104	15.4607	0.3649	0.3119	0.4378
180	1.2294	0.8333	2.9742	0.6151	0.5390	0.7878
200	1.2666	-0.2333	-3.5722	0.8444	0.7477	1.0945
220	1.8197	-0.0232	-3.7862	0.9813	0.8710	1.2515
240	2.5914	1.0607	0.1769	0.9894	0.8642	1.2020
260	3.2230	2.4330	5.7661	0.8350	0.7202	0.9473
280	3.4341	3.5743	11.0883	0.5864	0.4675	0.5341
300	3.0994	4.1532	15.0526	0.2965	0.1568	0.0348
320	2.2610	4.0467	17.1944	0.0290	-0.1558	-0.4732
340	1.0962	3.3095	17.4682	-0.1718	-0.4244	-0.9243
360	-0.1368	2.1302	16.0965	-0.2911	-0.6210	-1.2740

t сек	$10^3 x_3$			x_4		
	$\varphi = 60^\circ$	$\varphi = 70^\circ$	$\varphi = 80^\circ$	$\varphi = 60^\circ$	$\varphi = 70^\circ$	$\varphi = 80^\circ$
0	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
20	-0.0324	-0.0186	-0.0122	-0.0049	-0.0037	-0.0029
40	-0.2532	-0.1457	-0.1020	-0.0190	-0.0143	-0.0114
60	-0.8211	-0.4750	-0.3358	-0.0401	-0.0303	-0.0246
80	-1.8392	-1.0714	-0.7677	-0.0647	-0.0495	-0.0410
100	-3.3334	-1.9590	-1.4271	-0.0885	-0.0687	-0.0584
120	-5.2414	-3.1108	-2.3071	-0.1069	-0.0843	-0.0736
140	-7.4133	-4.4462	-3.3496	-0.1156	-0.0932	-0.0833
160	-9.6313	-5.8397	-4.4445	-0.1120	-0.0928	-0.0843
180	-11.6454	-7.1453	-5.4637	-0.0952	-0.0825	-0.0758
200	-13.2191	-8.2281	-6.3094	-0.0670	-0.0636	-0.0592
220	-14.1679	-8.9881	-6.9270	-0.0308	-0.0389	-0.0380
240	-14.3847	-9.3696	-7.2890	0.0086	-0.0119	-0.0154
260	-13.8498	-9.3626	-7.3858	0.0465	0.0139	0.0055
280	-12.6308	-9.0005	-7.2295	0.0784	0.0354	0.0227
300	-10.8722	-8.3555	-6.8584	0.1009	0.0505	0.0347
320	-8.7761	-7.5304	-6.3374	0.1120	0.0578	0.0405
340	-6.5752	-6.6462	-5.7523	0.1111	0.0571	0.0399
360	-4.4991	-5.8253	-5.1999	0.0994	0.0490	0.0333

$\varphi = 60^\circ, 70^\circ, 80^\circ$. Параметры гирокомаса приняты [1] следующими: $\kappa = 140$ Гсм, $2B = 219\,000$ Гсм сек, $lP = 6760$ Гсм. Угол ε определялся из следующего условия $[E_1]_{v=0} = lmR U \cos \varphi$, из которого следует: $\varepsilon = 45.23^\circ$ при $\varphi = 60^\circ$, $\varepsilon = 62.01^\circ$ при $\varphi = 70^\circ$, $\varepsilon = 76.60^\circ$ при $\varphi = 80^\circ$. Из табл. 4 видно что в высоких широтах девиация гирокомаса достигает значительной величины.

Заметим, что из уравнений (4.3) можно получить уравнения в вариациях для пространственного гироскопического компаса. Действительно, при $\varepsilon = \pi/2$ из (3.1) и (4.2) найдем, что

$$\sin \delta^* = lmV / 2B \quad (4.5)$$

и, следовательно, для пространственного гироскопического компаса

$$E_1 = lmV, \quad E_2 = E = \sqrt{4B^2 - (lmV)^2} \quad (4.6)$$

При этом, как нетрудно видеть, имеют место следующие соотношения:

$$\frac{l}{\Xi_1} \left(P - m \frac{V^2}{R} \right) + \frac{V}{R} = \frac{P}{mV}, \quad \frac{\Xi_2 \dot{}}{lmV} = -\frac{lmV}{\Xi_2}$$

$$\frac{1}{\Xi_2} \left(\Xi_1 \frac{V}{R} + \kappa \cos 2\delta^* \right) = \frac{\Xi_2}{lmR} \quad (4.7)$$

В соответствии с (4.6) правые части уравнений (4.3) обращаются в нуль и уравнения в вариациях для пространственного гироскопического компаса будут однородными дифференциальными уравнениями.

5. Гироскопический компас на неподвижном основании. В случае, когда гироскопический компас установлен на неподвижном относительно Земли основании $v_E = v_N = 0$, $\varphi = \text{const}$. При этом будем иметь

$$V = RU \cos \varphi, \quad \alpha^* = 0; \quad \Omega = U \sin \varphi \quad (5.1)$$

Соотношение (4.2), из которого определяется δ^* , принимает здесь вид

$$2B \sin(\varepsilon - \delta^*) U \cos \varphi = \kappa \sin \delta^* \cos \delta^* \quad (5.2)$$

В соответствии с (4.3) уравнения в вариациях теперь будут

$$U \cos \varphi x_1 + x_2 \dot{} - \frac{lm RU \cos \varphi}{\Xi_1} U \sin \varphi x_3 = 0$$

$$x_1 \dot{} - \left[\frac{l}{\Xi_1} (P - mRU^2 \cos^2 \varphi) + U \cos \varphi \right] x_2 + \frac{\Xi_2}{\Xi_1} U \sin \varphi x_4 =$$

$$= \left(\frac{lm RU \cos \varphi}{\Xi_1} - 1 \right) U \sin \varphi \quad (5.3)$$

$$- U \sin \varphi x_1 + \frac{P - mRU^2 \cos^2 \varphi}{mRU \cos \varphi} x_3 + \frac{\Xi_2}{lm RU \cos \varphi} x_4 \dot{} = 0$$

$$x_3 \dot{} + U \sin \varphi x_2 - \frac{1}{\Xi_2} (\Xi_1 U \cos \varphi + \kappa \cos 2\delta^*) x_4 = 0$$

где Ξ_1 и Ξ_2 определены выражениями (4.4).

Обычно у гироскопических компасов, чтобы хоть приблизительно удовлетворить соотношению (4.5), которое автоматически выполняется у пространственного гироскопического компаса при любом законе маневрирования корабля и обеспечивает отсутствие у него баллистических девиаций, выбирают параметры так, чтобы на неподвижном основании

$$\Xi_1 = lm RU \cos \varphi \quad (5.4)$$

Условие (5.4) обеспечивается различными конструктивными методами у разных типов гироскопических компасов.

При выполнении условия (5.4) будет иметь место соотношение

$$\frac{l}{\Xi_1} (P - mRU^2 \cos^2 \varphi) + U \cos \varphi = P / mRU \cos \varphi \quad (5.5)$$

Введем теперь новые переменные

$$X_1 = U \cos \varphi x_1, \quad X_2 = x_2, \quad X_3 = x_3, \quad X_4 = (\Xi_2 / \Xi_1) U \cos \varphi x_4 \quad (5.6)$$

Обозначая

$$\mu^2 = lP\Xi_2^{-2} (\kappa \cos 2\delta^* + lmRU^2 \cos^2 \varphi) \quad (5.7)$$

и полагая

$$P - mRU^2 \cos^2 \varphi \approx P \approx mg \quad (5.8)$$

можно привести уравнения в вариациях (5.3) к следующему виду:

$$\begin{aligned} X_1 + X_2' - \Omega X_3 &= 0, & -\Omega X_1 + v^2 X_3 + X_4' &= 0 \\ X_1' - v^2 X_2 + \Omega X_4 &= 0, & \Omega X_2 + X_3' - \frac{\mu^2}{v^2} X_4 &= 0 \end{aligned} \quad (5.9)$$

Заметим, что для пространственного гироскопического компаса соотношение (5.2) принимает вид

$$2B \cos \delta^* U \cos \varphi = (4B^2/lmR) \sin \delta^* \cos \delta^* \quad (5.10)$$

Отсюда следует, что

$$2B \sin \delta^* = lmR U \cos \varphi \quad (5.11)$$

При этом из (3.1) и (5.11) найдем, что

$$\kappa \cos 2\delta^* = (lmR)^{-1} [4B^2 - 2(lmR U \cos \varphi)^2] \quad (5.12)$$

Подставляя в (5.7) найденное для $\kappa \cos 2\delta^*$ выражение (5.12) и учитывая, что, согласно (5.11), при $\varepsilon = \pi/2$ имеет место соотношение

$$E_2 = 2B \cos \delta^* = \sqrt{4B^2 - (lmR U \cos \varphi)^2}$$

найдем, что у пространственного гироскопического компаса

$$\mu^2 = v^2 \quad (5.13)$$

Характеристическое уравнение системы дифференциальных уравнений (5.9) имеет следующий вид:

$$\lambda^4 + (v^2 + \mu^2 + 2\Omega^2) \lambda^2 + v^2 \mu^2 - (v^2 + \mu^2) \Omega^2 + \Omega^4 = 0 \quad (5.14)$$

Корни уравнения (5.14) будут чисто мнимыми. Обозначим их так:

$$\lambda_1, \lambda_2 = \pm i\omega_1, \quad \lambda_3, \lambda_4 = \pm i\omega_2 \quad (5.15)$$

При $\mu = v$, т. е. для пространственного гироскопического компаса

$$\omega_1 = v - \Omega, \quad \omega_2 = v + \Omega \quad (5.16)$$

что согласуется с приведенными выше (3.4) результатами.

В случае, когда $\mu \gg v$, что имеет место у обычных гироскопических компасов, можно получить для ω_1 и ω_2 приближенные выражения:

$$\omega_1 \approx \left[1 - \frac{\mu^2 + 3v^2}{2v^2(\mu^2 - v^2)} \Omega^2 \right] v \approx v, \quad \omega_2 \approx \left[1 + \frac{3\mu^2 + v^2}{2\mu^2(\mu^2 - v^2)} \Omega^2 \right] \mu \approx \mu \quad (5.17)$$

Перейдем к построению решения системы дифференциальных уравнений (5.9). Для большей общности рассмотрим систему неоднородных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} X_1' - v^2 X_2 + \Omega X_4 &= y_1(t), & \Omega X_2 + X_3' - \frac{\mu^2}{v^2} X_4 &= y_3(t) \\ X_1 + X_2' - \Omega X_3 &= y_2(t), & -\Omega X_1 + v^2 X_3 + X_4' &= y_4(t) \end{aligned} \quad (5.18)$$

Здесь функции $y_j(t)$ ($j = 1, \dots, 4$) определяются внешними силами, приложенными к системе. При $y_j(t) \equiv 0$ ($j = 1, \dots, 4$) система дифференциальных уравнений (5.18) совпадает с системой уравнений (5.9), описывающей собственные колебания гироскопического компаса.

В исходных уравнениях (1.25) и (2.6) обобщенные внешние силы, приложенные к системе, обозначены через M_ζ^* , M_{x^*} , M_z^* и $M_{y_1}^*$ соответственно. Как нетрудно проверить, входящие в уравнения (5.18) функций

$y_j(t)$ ($j = 1, \dots, 4$) связаны с обобщенными внешними силами следующими зависимостями:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \frac{1}{lm R} M_{x^{**}}, & y_2(t) &= \frac{1}{lm RU \cos \varphi} M_{y^{**}} \\ y_3(t) &= -\frac{1}{E_2} M_{y_1^*}, & y_4(t) &= \frac{1}{lm \cdot R} M_{z^*} \end{aligned} \quad (5.19)$$

Здесь $M_{y^{**}}$ — момент внешних сил относительно оси y^* , который, соответствии с табл. 1, удовлетворяет соотношению

$$M_{y^{**}} \cos \beta + M_{z^*} \sin \beta = M_{\zeta^*} \quad (5.20)$$

Вводя матрицы

$$f(D) = \begin{vmatrix} D & -v^2 & 0 & \Omega \\ 1 & D & -\Omega & 0 \\ 0 & \Omega & D & -\frac{\mu^2}{v^2} \\ -\Omega & 0 & v^2 & D \end{vmatrix}, \quad X = \begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{vmatrix}, \quad y(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \\ y_4(t) \end{vmatrix} \quad (5.21)$$

где $D = d/dt$, заменим систему скалярных дифференциальных уравнений (5.18) матричным уравнением

$$f(D) X = y(t) \quad (5.22)$$

Определитель матрицы $f(D)$, в соответствии с (5.15), запишем так:

$$\Delta(D) = (D^2 + \omega_1^2)(D^2 + \omega_2^2) \quad (5.23)$$

Обозначая через $F(D)$ присоединенную матрицу для матрицы $f(D)$, можно представить общее решение системы уравнений (5.18) в виде

$$\begin{aligned} X_j(t) &= -\frac{1}{e_1} \left\{ \sum_{k=1}^4 \operatorname{Re} [iF_{jk}(i\omega_1)] X_k(0) \cos \omega_1 t - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k=1}^4 \operatorname{Im} [iF_{jk}(i\omega_1)] X_k(0) \sin \omega_1 t \right\} + \frac{1}{e_2} \left\{ \sum_{k=1}^4 \operatorname{Re} [iF_{jk}(i\omega_2)] X_k(0) \cos \omega_2 t - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k=1}^4 \operatorname{Im} [iF_{jk}(i\omega_2)] X_k(0) \sin \omega_2 t \right\} + \int_0^t \sum_{k=1}^4 N_{jk}(t-\tau) y_k(\tau) d\tau \quad (j=1, \dots, 4) \end{aligned} \quad (5.24)$$

где

$$e_s = \omega_s (\omega_2^2 - \omega_1^2) \quad (s = 1, 2) \quad (5.25)$$

а $N_{jk}(t)$ — элементы матричной функции веса $N(t) = \|N_{jk}(t)\|$ для системы уравнений (5.18). Функции $N_{jk}(t)$ имеют следующий вид:

$$N_{jk}(t) = -\frac{1}{e_1} \operatorname{Re} [iF_{jk}(i\omega_1) e^{i\omega_1 t}] + \frac{1}{e_2} \operatorname{Re} [iF_{jk}(i\omega_2) e^{i\omega_2 t}] \quad (j, k=1, \dots, 4) \quad (5.26)$$

Через $iF_{jk}(i\omega_s)$ ($s = 1, 2$) обозначены элементы матрицы $i[F(D)]_{D=i\omega_s}$, которая приводится ниже:

$$iF(i\omega_s) = \begin{vmatrix} A_{11}^{(s)} & iA_{12}^{(s)} & A_{13}^{(s)} & iA_{14}^{(s)} \\ iA_{21}^{(s)} & A_{22}^{(s)} & iA_{23}^{(s)} & A_{24}^{(s)} \\ A_{31}^{(s)} & iA_{32}^{(s)} & A_{33}^{(s)} & iA_{34}^{(s)} \\ iA_{41}^{(s)} & A_{42}^{(s)} & iA_{43}^{(s)} & A_{44}^{(s)} \end{vmatrix} \quad (5.27)$$

где

$$\begin{aligned}
 A_{11}^{(s)} &= \omega_s^3 - (\mu^2 + \Omega^2) \omega_s, & A_{12}^{(s)} &= -v^2 \omega_s^2 - \Omega^2 v^2 + \mu^2 v^2 \\
 A_{21}^{(s)} &= \omega_s^2 + \Omega^2 \mu^2 / v^2 - \mu^2, & A_{22}^{(s)} &= A_{11}^{(s)} \\
 A_{31}^{(s)} &= -(\Omega + \Omega \mu^2 / v^2) \omega_s, & A_{32}^{(s)} &= \Omega \omega_s^2 + \Omega \mu^2 - \Omega^3 \\
 A_{41}^{(s)} &= -\Omega \omega_s^2 - \Omega v^2 + \Omega^3, & A_{42}^{(s)} &= -2\Omega v^2 \omega_s \\
 A_{13}^{(s)} &= A_{42}^{(s)}, & A_{23}^{(s)} &= A_{41}^{(s)}, & A_{14}^{(s)} &= A_{32}^{(s)}, & A_{24}^{(s)} &= A_{31}^{(s)} \\
 A_{33}^{(s)} &= \omega_s^3 - (v^2 + \Omega^2) \omega_s, & A_{34}^{(s)} &= -\omega_s^2 \mu^2 / v^2 - \Omega^2 + \mu^2 \\
 A_{43}^{(s)} &= v^2 \omega_s^2 + \Omega^2 v^2 - v^4, & A_{44}^{(s)} &= A_{33}^{(s)}
 \end{aligned}
 \tag{5.28}$$

Представляет интерес преобразование уравнений (5.18) к нормальным координатам. Для определения нормальных координат необходимо предварительно представить матрицу $F(i\omega_s) = [F(D)]_{D=i\omega_s}$ в виде произведения матрицы-столбца на матрицу-строку

$$F(i\omega_s) = K(i\omega_s) I(i\omega_s) \quad (s = 1, 2) \tag{5.29}$$

Указанные матрицы, как видно из (5.27), можно принять следующими:

$$K(i\omega_s) = \begin{Bmatrix} K_1 \\ \dots \\ K_4 \end{Bmatrix}, \quad I(i\omega_s) = \|I_1 \dots I_4\| \tag{5.30}$$

где

$$\begin{aligned}
 K_1 &= \frac{1}{2}, & K_2 &= i \frac{\omega_s^2 + v^2 - \Omega^2}{4v^2 \omega_s} \\
 K_3 &= \frac{-\omega_s^2 + v^2 + \Omega^2}{4\Omega v^2}, & K_4 &= i \frac{-\omega_s^2 + v^2 - \Omega^2}{4\Omega \omega_s} \\
 I_1 &= 2i [-\omega_s^3 + (\mu^2 + \Omega^2) \omega_s], & I_2 &= 2v^2 (-\omega_s^2 + \Omega^2 + \mu^2) \\
 I_3 &= 4i\Omega v^2 \omega_s, & I_4 &= 2\Omega (\omega_s^2 + \mu^2 - \Omega^2)
 \end{aligned}
 \tag{5.31}$$

Исходные координаты X_1, \dots, X_4 будут связаны с нормальными координатами $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2$ следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}
 X_1 &= \frac{1}{2} \xi_1 + \frac{1}{2} \xi_2 \\
 X_2 &= \frac{\omega_1^2 + v^2 - \Omega^2}{4v^2 \omega_1} \eta_1 + \frac{\omega_2^2 + v^2 - \Omega^2}{4v^2 \omega_2} \eta_2 \\
 X_3 &= \frac{-\omega_1^2 + v^2 + \Omega^2}{4\Omega v^2} \xi_1 + \frac{-\omega_2^2 + v^2 + \Omega^2}{4\Omega v^2} \xi_2 \\
 X_4 &= \frac{-\omega_1^2 + v^2 - \Omega^2}{4\Omega \omega_1} \eta_1 + \frac{-\omega_2^2 + v^2 - \Omega^2}{4\Omega \omega_2} \eta_2
 \end{aligned}
 \tag{5.32}$$

При этом, как нетрудно получить из (5.32),

$$\begin{aligned}
 \xi_1 &= \frac{2(\omega_2^2 - v^2 - \Omega^2) X_1 + 4\Omega v^2 X_3}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \\
 \eta_1 &= \frac{2(-\omega_2^2 + v^2 - \Omega^2) v^2 \omega_1 X_2 + 2(-\omega_2^2 - v^2 + \Omega^2) \Omega \omega_1 X_4}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)(v^2 - \Omega^2)} \\
 \xi_2 &= \frac{2(-\omega_1^2 + v^2 + \Omega^2) X_1 - 4\Omega v^2 X_3}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \\
 \eta_2 &= \frac{2(\omega_1^2 - v^2 + \Omega^2) v^2 \omega_2 X_2 + 2(\omega_1^2 + v^2 - \Omega^2) \Omega \omega_2 X_4}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)(v^2 - \Omega^2)}
 \end{aligned}
 \tag{5.33}$$

Дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют нормальные координаты, будут следующими:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_1}{dt} - \omega_1 \eta_1 &= \frac{2(-\omega_1^2 + \mu^2 + \Omega^2)}{\omega_2^2 - \omega_1^2} y_1(t) + \frac{4\Omega v^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} y_3(t) \\ \frac{d\eta_1}{dt} + \omega_1 \xi_1 &= \frac{2v^2(-\omega_1^2 - \Omega^2 + \mu^2)}{\omega_1(\omega_2^2 - \omega_1^2)} y_2(t) + \frac{2\Omega(\omega_1^2 + \mu^2 - \Omega^2)}{\omega_1(\omega_2^2 - \omega_1^2)} y_4(t) \\ \frac{d\xi_2}{dt} - \omega_2 \eta_2 &= \frac{2(\omega_2^2 - \mu^2 - \Omega^2)}{\omega_2^2 - \omega_1^2} y_1(t) - \frac{4\Omega v^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} y_3(t) \\ \frac{d\eta_2}{dt} + \omega_2 \xi_2 &= \frac{2v^2(\omega_2^2 + \Omega^2 - \mu^2)}{\omega_2(\omega_2^2 - \omega_1^2)} y_2(t) - \frac{2\Omega(\omega_2^2 + \mu^2 - \Omega^2)}{\omega_2(\omega_2^2 - \omega_1^2)} y_4(t) \end{aligned} \quad (5.34)$$

Заметим, что при подстановке значений (5.16), которые принимают ω_1 и ω_2 у пространственного гироскопического компаса, выражения (5.33) принимают вид

$$\xi_1 = X_1 + vX_3, \quad \eta_1 = vX_2 + X_4; \quad \xi_2 = X_1 - vX_3, \quad \eta_2 = vX_2 - X_4 \quad (5.35)$$

При этом ξ_i, η_i ($i = 1, 2$) будут удовлетворять дифференциальным уравнениям, которые можно получить из уравнений (5.34), если подставить в них вместо ω_1 и ω_2 значения (5.16). Эти уравнения будут:

$$\begin{aligned} \xi_1' - (v - \Omega) \eta_1 &= y_1(t) + vy_3(t), & \xi_2' - (v + \Omega) \eta_2 &= y_1(t) - vy_3(t) \\ \eta_1' + (v - \Omega) \xi_1 &= vy_2(t) + y_4(t), & \eta_2' + (v + \Omega) \xi_2 &= vy_2(t) - y_4(t) \end{aligned} \quad (5.36)$$

6. Воздействие случайных сил на недемпфированный гироскопический компас. При нулевых начальных условиях закон движения гироскопического компаса, находящегося под воздействием внешних сил, в соответствии с (5.24) будет следующим:

$$X_j(t) = \sum_{k=1}^4 \int_0^t N_{jk}(t - \tau) y_k(\tau) d\tau \quad (j = 1, \dots, 4) \quad (6.1)$$

где внешние силы $y_k(t)$ определены выражениями (5.19). Пусть

$$M_{x^*} = M_{y^*} = M_{z^*} = 0 \quad (6.2)$$

а M_z^* представляет собой некоторый стационарный случайный процесс с нулевым средним значением. При этом, согласно (5.19),

$$y_\rho(t) \equiv 0 \quad (\rho = 1, 2, 3), \quad y_4(t) = \frac{1}{\ln R} M_z^* \quad (6.3)$$

Выражения (6.1) принимают теперь вид

$$X_j(t) = \int_0^t N_{j4}(t - \tau) y_4(\tau) d\tau \quad (j = 1, \dots, 4) \quad (6.4)$$

В соответствии с (5.26), входящие в (6.4) элементы матричной функции веса $N_{j4}(t)$ ($j = 1, \dots, 4$) можно представить в следующем виде: (6.5)

$$\begin{aligned} N_{14}(t) &= a_{14} \sin \omega_1 t - b_{14} \sin \omega_2 t, & N_{24}(t) &= -a_{24} \cos \omega_1 t + b_{24} \cos \omega_2 t \\ N_{34}(t) &= a_{34} \sin \omega_1 t - b_{34} \sin \omega_2 t, & N_{44}(t) &= -a_{44} \cos \omega_1 t + b_{44} \cos \omega_2 t \end{aligned}$$

где

$$a_{j4} = \frac{1}{e_1} A_{j4}^{(1)}, \quad b_{j4} = \frac{1}{e_2} A_{j4}^{(2)} \quad (j = 1, \dots, 4) \quad (6.6)$$

а $A_{j4}^{(s)}$ и e_s ($j = 1, \dots, 4; s = 1, 2$) определены выражениями (5.28) и (5.25).

Математическое ожидание случайного процесса $X_j(t)$ ($j = 1, \dots, 4$) равно нулю.

Дисперсия $X_j(t)$ ($j = 1, \dots, 4$) определяется выражением

$$D_j(t) = \int_0^t \int_0^t N_{j4}(t-\tau) N_{j4}(t-\sigma) K_{44}(\tau-\sigma) d\tau d\sigma \quad (j = 1, \dots, 4) \quad (6.7)$$

где $K_{44}(\tau-\sigma)$ — корреляционная функция стационарного случайного процесса $y_4(\tau)$.

Для гауссовского случайного процесса типа белого шума

$$K_{44}(\tau-\sigma) = G\delta(\tau-\sigma) \quad (6.8)$$

где $\delta(\tau-\sigma)$ — дельта-функция Дирака. При этом выражение (6.7) в соответствии с (6.5) принимает вид

$$D_j(t) = G \left\{ \frac{a_{j4}^2 + b_{j4}^2}{2} t - \frac{a_{j4}b_{j4}}{\omega_1 - \omega_2} \sin(\omega_1 - \omega_2)t + \right. \\ \left. + (-1)^j \left[\frac{a_{j4}^2}{4\omega_1} \sin 2\omega_1 t + \frac{b_{j4}^2}{4\omega_2} \sin 2\omega_2 t - \frac{a_{j4}b_{j4}}{\omega_1 + \omega_2} \sin(\omega_1 + \omega_2)t \right] \right\} \quad (j = 1, \dots, 4) \quad (6.9)$$

Выражение (6.9) дисперсии углов, определяющих погрешности гироскопического компаса, содержит слагаемое, возрастающее с течением времени по линейному закону. Для достаточно больших значений t это слагаемое может достичь значительной величины и будет определять собой величину дисперсии.

Отметим что закон изменения во времени дисперсии сигнала на выходе недемпфированной системы был изучен для систем второго порядка А. А. Свешниковым[7].

Возрастание дисперсии с течением времени вызвано отсутствием демпфирования у рассматриваемого здесь гироскопического компаса. Указанное обстоятельство может явиться причиной ограничения промежутка времени, на который у гироскопического компаса выключается демпфирующее устройство.

Поступила 2 I 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. G e s k e l e r I. W. Kreiselkompass und Schiffsmanöver. Ingenieur-Archiv, Band IV, Hefte 1, 2, Berlin, 1933.
2. Б у л г а к о в Б. В. Прикладная теория гироскопов. Гостехиздат, 1939.
3. А п п е л ь П. Теоретическая механика, т. II. Физматгиз, 1960, стр. 313.
4. И ш л и н с к и й А. Ю. К теории гироскопического маятника. ПММ, 1956, т. XX, вып. 4.
5. И ш л и н с к и й А. Ю. К теории гироскопического маятника. ПММ, 1957, т. XXI, вып. I.
6. К у д р е в и ч Б. И. Гироскопический компас Аншютца. Записки по гидрографии, 1933, № 4.
7. С в е ш н и к о в А. А. Поведение динамической системы второго порядка без демпфирования под воздействием случайных процессов. Изв. АН СССР, ОТН, Энергетика и автоматика, 1962, № 5.