Прикладная математика и механика. Том 28, 1964

К ЗАДАЧЕ О СТАБИЛИЗАЦИИ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

М. С. Габриелян, Н. Н. Красовский

(Ереван, Свердловск)

Исследуется задача о стабилизации механической системы дополнительными силами в окрестности положения равновесия [1-3]. Рассматривается проблема стабилизации и управления воздействиями, зависящими от скоростей. Устанавливается связь задачи о стабилизации диссипативными силами [2] с проблемой аналитического конструирования оптимального регулятора [4] и со свойствами управляемости и наблюдаемости системы [5,6] по соответствующей координате [3]. Изучается влияние диссипативных и гироскопических сил на управляемость, наблюдаемость и стабилизируемость. В приложении к консервативной механической системе дается формулировка правила максимина [6-8], определяющего в линейном приближении оптимальное управление u с наименьшей интенсивностью $\rho^*[u]$.

§ 1. Рассмотрим голономную механическую систему, движение которой описывается уравнениями

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i'} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i\,(t, q_1, \ldots, q_n, u) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

где q_i — криволинейные координаты, T — кинетическая энергия, Q_i — обобщенные силы, u — управляющее воздействие. Величину u в уравнениях (1.1) будем считать скаляром.

Пусть система (1.1) обладает решением $q_i = 0$ при $u \equiv 0$. Предположим, что линейное приближение (1.1) стационарное и имеет вид

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j'' = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} q_j + b_i u \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.2}$$

Здесь a_{ij}, b_{ij}, b_i — постоянные, форма $\Sigma\, a_{ij} q_i q_j$ определенно-положительна, $b_{ij} = b_{ji}$. Такую систему, в соответствии с общей терминологией, будем называть консервативной.

Не ограничивая общности, будем считать, что кинетическая энергия в первом приближении

$$T^0 = {}^1/_2\, \Sigma\, a_{ij} q_i' q_j'$$

имеет вид суммы квадратов скоростей

$$T^0 = {}^1/_2\, (q_1'^2 + \ldots + q_n'^2)$$

и среди чисел b_i в уравнениях (1.2) отлично от нуля лишь одно число $b_1 = 1$. Этого всегда можно добиться линейной заменой переменных q_i и u. В соответствии с этим будем говорить, что система подвержена управлению по первой координате.

Будем обозначать, как правило, строчными латинскими буквами векторы-столбцы. Символом * будем обозначать транспонирование.

Рассмотрим задачу об аналитическом конструировании регулятора [4].

Задача 1.1. Найти функцию

$$u = l^* q' = l_1 q_1' + l_2 q_2' + \ldots + l_n q_n' \tag{1.3}$$

зависящую только от скоростей и такую, чтобы движение $q_i = 0$ было асимптотически устойчивым [9] в силу уравнений (1.2), (1.3) и чтобы при этом на движениях $q_i(t)$, $u(t)$ системы (1.2), (1.3) минимизировался функционал

$$J = \int_0^\infty \omega(z, u)\, dt = \int_0^\infty \Big(\sum_{ij=1}^{2n} c_{ij} z_i z_j + d u^2 \Big) dt = \min \tag{1.4}$$

Здесь $d > 0$, $\Sigma c_{ij} z_i z_j$ — знакоположительная форма, $z_{2i-1} = q_i'$, $z_{2i} = q_i$. Приведем систему (1.2) к нормальным координатам [1]

$$y_i'' = \lambda_i y_i + e_i u \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.5}$$

Здесь λ_i, e_i определяются из уравнений

$$|B - \lambda E| = 0, \qquad e_i = s_{1i}$$

$$\sum_{k=1}^n (b_{jk} - \delta_{jk} \lambda_i) s_{ki} = 0 \quad (i, j = 1, \ldots, n,\ \delta_{ii} = 0,\ \delta_{ij} = 0,\ i \neq j)$$

причем векторы $s_i = \{s_{ki}\}$ $(k = 1, \ldots, n)$ суть взаимно ортогональные собственные векторы матрицы $B = \| b_{ij} \|$.

Уравнения (1.5) заменяем системой

$$x'_{2i-1} = \lambda_{2i-1} x_{2i} + s_{1,\, 2i-1} u, \qquad x'_{2i} = x_{2i-1} \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.6}$$

Функционал (1.4) в координатах x_i примет вид

$$J = \int_0^\infty \Big(\sum_{ij=1}^{2n} d_{ij} x_i x_j + d u^2 \Big) dt \tag{1.7}$$

Искомое стабилизирующее воздействие

$$u = p_1 x_1 + p_3 x_3 + \ldots + p_{2n-1} x_{2n-1} \tag{1.8}$$

и оптимальная функция Ляпунова

$$V = \sum_{ij=1}^{2n} A_{ij} x_i x_j \tag{1.9}$$

которая определяет это воздействие, удовлетворяют уравнениям Ляпунова — Беллмана [4,10]

$$\sum_{i\,j=1}^{2n} d_{ij} x_i x_j + d u^2 + \sum_{k=1}^n (\lambda_{2k-1} x_{2k} + s_{12k-1} u) \frac{\partial V}{\partial x_{2k-1}} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_{2k}} x_{2k-1} = 0 \tag{1.10}$$

$$2du + \sum_{k=1}^n s_{12k-1} \frac{\partial V}{\partial x_{2k-1}} = 0$$

Подставляя (1.8), (1.9) в (1.10) и приравняв нулю коэффициенты при одинаковых членах $x_i x_j$, для чисел p'_{2k-1} и A_{ij} получим уравнения

$$\sum_{i=1}^{n} A_{2k,\,2i-1} s_{1,\,2i-1} = 0 \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{1.11}$$

$$\sum_{i=1}^{n} A_{2k-1,\,2i-1}\, s_{1,\,2i-1} + dp_{2k-1} = 0 \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{1.12}$$

$$d_{2k-1,\,2p-1} + dp_{2k-1}\, p_{2p-1} + p_{2k-1} \sum_{i=1}^{n} A_{2i-1,\,2p-1}\, s_{1,\,2i-1} +$$

$$+ p_{2p-1} \sum_{i=1}^{n} A_{2i-1,\,2k-1}\, s_{1,\,2i-1} + A_{2k-1,\,2p} + A_{2p-1,\,2k} = 0 \qquad (k,\ p = 1, \ldots, n) \tag{1.13}$$

$$d_{2p,\,2k-1} + \lambda_{2p-1} A_{2k-1,\,2p-1} + A_{2k,2p} = 0 \qquad (k,\ p = 1, \ldots, n) \tag{1.14}$$

$$d_{2p,2k} + \lambda_{2p-1} A_{2k,\,2p-1} + \lambda_{2k-1} A_{2p,\,2k-1} = 0 \qquad (k,\ p = 1, \ldots, n) \tag{1.15}$$

Обсудим класс таких задач, для которых оптимальную функцию V (1.9) можно строить в виде суммы двух слагаемых, одно из которых зависит лишь от координат, а другое лишь от скоростей. Тогда $A_{2k,\,2p-1} = 0$.

Справедливо равенство $V(x^\circ) = J^\circ(x^\circ)$, где $J^\circ(x^\circ)$ — минимальное значение функционала (1.7), рассматриваемое как функция от начального состояния системы $x(0) = x^\circ$. Следовательно, обсуждаем класс таких задач 1.1, для которых минимальное значение функционала J° в функции от начального состояния системы распадается на два слагаемых, одно из которых зависит лишь от начальных координат $q_{i0} = q_i^{(0)}$, а другое — лишь от начальных скоростей $q'_{i0} = q'^{(0)}_i$.

Предположим, что система (1.1) вполне управляема воздействием u в линейном приближении [5,11], и, следовательно, [3] выполняются следующие условия:

$$\lambda_{2i-1} \neq \lambda_{2j-1}, \qquad s_{1,\,2i-1} \neq 0 \qquad (i,\ j = 1, \ldots, n;\ i \neq j) \tag{1.16}$$

При сделанных предположениях из уравнений (1.11) — (1.15) следует, что должны выполняться равенства

$$\sum_{ij=1}^{2n} d_{ij} x_i x_j + du^2 = 2d \Big(\sum_{k=1}^{n} p_{2k-1} x_{2k-1}\Big)^2, \qquad p_{2k-1} = \mp \frac{\sqrt{d_{2k-1,\,2k-1}}}{d} \tag{1.17}$$

$$A_{2k,2k} = -\lambda_{2k-1} A_{2k-1,\,2k-1}, \quad A_{2k-1,\,2k-1} = \pm \frac{\sqrt{dd_{2k-1,\,2k-1}}}{s_{1,\,2k-1}} \qquad \binom{k,\ p = 1, \ldots, n}{k \neq p}$$

$$A_{2k,\,2p} = A_{2k-1,\,2p-1} = 0 \qquad (k,\ p = 1, \ldots, n;\ k \neq p) \tag{1.18}$$

(знак перед радикалом в (1.18) выбирается так, чтобы $A_{2k-1,\,2k-1} > 0$).

Обсудим достаточные условия для разрешимости задачи 1.1 при наших предположениях. Функция V определенная (1.9), должна быть определенно-положительной, т. е. необходимы неравенства

$$\lambda_{2k-1} < 0 \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{1.19}$$

Это означает, что исходная система (1.2) при отсутствии управления должна быть устойчивой. Выполнение условия (1.19) достаточно, чтобы функция V была определенно-положительной.

Определенно-положительная функция V, имеющая знакоотрицательную производную $dV / dt = -\omega (z, u)$, будет обеспечивать [12] асимптотическую устойчивость движения $x_i = 0$, если на поверхности

$$\frac{dV}{dt} = -2\left(\sum_{k=1}^{n} p_{2k-1}x_{2k-1}\right)^2$$

не содержится целых полутраекторий системы (1.6), (1.8), кроме положения равновесия $x_j \equiv 0$. Для этого достаточно потребовать, чтобы линейные формы

$$\frac{d^k}{dt^k}\left(\sum_{i=1}^{n} p_{2i-1}x_{2i-1}\right) \qquad (k = 0, 1, \ldots, 2n - 1)$$

составленные в силу (1.6), (1.8), были линейно независимы. Отсюда выводятся достаточные условия асимптотической устойчивости системы (1.6) (1.8), подобно тому как это сделано в статье [2]. Однако условия теоремы [12] целесообразно рассмотреть здесь и с другой точки зрения, связывающей эту теорему со свойством наблюдаемости рассматриваемой системы.

Пусть в силу системы уравнений

$$dx / dt = Ax + bu \qquad (u = p^*x, x = \{x_1, \ldots, x_m\}) \tag{1.20}$$

некоторая функция Ляпунова — квадратичная форма $V(x)$ — имеет знакоотрицательную производную

$$dV / dt = -\mu (x) - du^2 \tag{1.21}$$

где $\mu (x)$ — знакоположительная форма переменных x_i. Множество точек x, где $\mu (x)=0$, образует линейное подпространство пространства $\{x_i\}$. Обозначим это подпространство символом N. Наряду с системой (1.20) рассмотрим однородную систему

$$dx / dt = Ax \tag{1.22}$$

для которой будем рассматривать задачу о наблюдении величины $\eta (T) = r^*x (T)$ по величине $\xi (t) = u (t) = p^*x (t)$ для $0 \leqslant t \leqslant T$, т. е. задачу об операции [13, 6, 3]

$$\eta (T) = \int_0^T \xi (\tau) \varphi (\tau) d\tau \tag{1.23}$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1.1. Пусть можно указать определенно-положительную функцию $V(x)$, имеющую знакоотрицательную производную (1.21) в силу уравнения (1.20). Если при этом для системы (1.22) задача (1.23) о наблюдении величины $\eta(T) = r^*x(T)$ по величине $\xi(t) = u(t) = p^*x(t)$ разрешима для всех векторов r из подпространства N, то движение $x = 0$ асимптотически устойчиво в силу уравнений (1.20).

В самом деле, рассмотрим движение $x (t)$, отличное от $x (t) \equiv 0$ и такое, на котором $dV / dt \equiv 0$. Согласно (1.21), это возможно лишь при условиях $u [x (t)] \equiv 0$ и $\mu [x (t)] \equiv 0$, т. е., во всяком случае, лишь при условии залегания движения $x (t)$ в подпространстве N при всех $t \geqslant 0$. Поскольку $x (t) \not\equiv 0$, то в некоторый момент $t = T$ имеем $x (T) = r \neq 0$ и $r \in N$. При этом $r^*x (T) = r^2 > 0$. По условию леммы величина $\eta (T)$ наблюдаема по величине $u (t)$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$. Согласно [6], эта наблюдаемость возможна лишь при условии, что $u (t) \not\equiv 0$, если $\eta (T) \neq 0$. Полученное противоречие ($u (t) \equiv 0$ и $u (t) \not\equiv 0$) показывает, что не существует движений $x (t)$, отличных от $x (t) \equiv 0$, где было бы $dV / dt \equiv 0$. Согласно [12], движение $x = 0$ системы (1.20) асимптотически устойчиво. Это доказывает лемму.

Примечание 1.1. Величина $\eta = r^* x(T)$ наблюдаема по величине $\xi = p^* x(t)$ если вектор r^* лежит в подпространстве W, порожденном векторами $p^*, p^*A, \ldots, p^*A^{n-1}$. Следовательно, для асимптотической устойчивости системы (1.20), имеющей определенно-положительную функцию $V(x)$ со знакоотрицательной производной (1.21), достаточно, чтобы линейное подпространство N, где $\mu(x) = 0$, содержалось в подпространстве W.

Асимптотическая устойчивость будет обеспечена, если система (1.6) при $u \equiv 0$ окажется вполне наблюдаемой по величине Σp_{2k-1}, x_{2k-1}. Для этого достаточно [3], чтобы выполнялись условия (1.16), (1.19) и

$$p_{2k-1} \neq 0 \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{1.24}$$

Итак, справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. 1.1. Пусть выполнены условия (1.16), (1.19) и форма $\Sigma d_{ij} x_i x_j$ в минимизируемом функционале (1.7) имеет вид

$$\sum_{ij=1}^{n} d_{ij} x_i x_j = \Big(\sum_{k=1}^{n} f_{2k-1}\, x_{2k-1}\Big)^2 = (f^* x)^2 \tag{1.25}$$

причем все $f_{2k-1} \neq 0$. Тогда задача 1.1 имеет решение $u = p^* x$ (1.8), оптимально стабилизирующее систему (1.6). При этом $p_{2k-1} = d^{-1/2} f_{2k-1}$, и после замены $u(t) = p^* x(t)$ подынтегральная функция ω в минимизируемом функционале принимает вид $\omega = 2d(p^* x)^2$.

Теорема 1.1.2. Если ограничиться лишь задачами, где минимальное значение функционала $J^\circ = \min J$, рассматриваемое как функция от начального состояния системы q_{i0}, q'_{i0}, представляется в виде суммы двух слагаемых, одно из которых зависит лишь от координат q_{i0}, а другое — лишь от скоростей q_{i0}', то задача о стабилизации разрешима лишь при условиях (1.16), (1.19) и (1.25), т. е. эти условия являются тогда и необходимыми условиями разрешимости задачи.

§ 2. Обсудим связь полученных выводов с задачей о стабилизации системы диссипативными силами [2].

Итак, пусть система (1.5) при $u \equiv 0$ устойчива, т. е. $\lambda_i < 0$ ($i = 1, \ldots, n$). Тогда, согласно [3], положения равновесия $y_i = 0$ можно сделать асимптотически устойчивым за счет выбора силы $u(y, y')$ произвольной природы тогда и только тогда, когда выполняются условия управляемости (1.16). Силу $u(y, y')$ можно определить при этих условиях из решения задачи об аналитическом конструировании оптимального регулятора [4], минимизирующего величину (1.4). Выберем величину J в соответствии с результатами § 1 в виде

$$J = \int_0^\infty \omega(x, u)\, dt = \int_0^\infty \Big[\Big(\sum_{i=1}^{n} s_{1,2i-1} x_{2i-1}\Big)^2 + u^2\Big] dt \tag{2.1}$$

Оптимальная функция Ляпунова $V(x)$ и оптимальное управление $u^\circ(x)$, удовлетворяющие уравнению Ляпунова — Беллмана

$$\min_u \Big(\frac{dV}{dt} + \omega(x, u)\Big) = 0 \tag{2.2}$$

как следует из § 1, имеют вид

$$V(x) = \sum_{i=1}^{n} (x_{2i-1}^2 - \lambda_{2i-1} x_{2i}^2), \qquad u^\circ(x) = -\sum_{i=1}^{n} s_{1,2i-1} x_{2i-1} \tag{2.3}$$

причем при $u = u^\circ$ имеем в силу уравнений (1.6)

$$\frac{dV}{dt} = -2\left(\sum_{i=1}^{n} s_{12i-1}x_{2i-1}\right)^2 \qquad (2.4)$$

При условиях (1.16), (1.19) система (1.6) (2.4) удовлетворяет условиям леммы 1.1, т. е., действительно, функция Ляпунова $V(x)$ (2.3),(2.4) гарантирует асимптотическую устойчивость равновесия $x_i = 0$. Но величины $s_{1,2i-1}u^\circ$ в уравнениях (1.5) можно рассматривать как обобщенные диссипативные силы X_i, порожденные функцией Релея [14]

$$2R = \left(\sum_{i=1}^{n} s_{1,2i-1}x_{2i-1}\right)^2 \qquad (2.5)$$

При этом оптимальная функция Ляпунова $V(x)$ равна удвоенной энергии системы

$$H = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_{2i-1}^2 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_{2i-1}x_{2i}^2\right)$$

В координатах q_i, q_i', описываемых уравнениями (1.2), имеем

$$2R = (q_1')^2, \qquad Q_1 = u^\circ = -q_1'$$

Следовательно, если предполагаем, что система (1.1) управляется в линейном приближении воздействием по координате q_1, то придем к выводу, что при условиях (1.16), (1.19) возможна стабилизация системы (1.2) диссипативной силой $u^\circ = -\partial R / \partial q_1$, порожденной частичной диссипацией $R(q)$ по координате q_1. (Условия управляемости (1.16) означают, в частности, что обобщенная сила Q не совпадает по направлению ни с одной канонической осью x_i.)

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.1. Устойчивая система (1.2), которая подвержена управлению u по первой координате q_1, может быть стабилизирована до асимптотической устойчивости силой $u(q, q')$ произвольной природы тогда и только тогда, когда возможна стабилизация этой системы лишь диссипативной силой $u(q_1') = -\partial R / \partial q_1'$. Поэтому условия стабилизации диссипативной силой [2] совпадают с общими условиями полной управляемости и стабилизируемости системы [3]. При этом диссипативную силу $u(q_1')$ можно истолковать как решение задачи об аналитическом конструировании оптимального регулятора u, минимизирующего величину

$$J = \int_0^\infty [q_1'^2 + u^2(t)]\,dt = \int_0^\infty [2R(q_1') + u^2(t)]\,dt \qquad (2.6)$$

Минимальное значение J° величины J (2.6) равно при этом удвоенному количеству энергии

$$J^\circ = \int_0^\infty 4R\,[q_1'(t)]\,dt$$

рассеянному на затухающем движении оптимальной системы.

Переход от задачи 1.1 для системы первого приближения (1.2) к аналогичной задаче для полной нелинейной системы (когда нелинейные члены имеют равномерно по t высший порядок малости) при условиях (1.16) осуществляется на основании общих результатов [15–17]. На этом переходе поэтому здесь подробно останавливаться не будем.

Отметим лишь, что консервативная, стационарная система обладает интегралом энергии, а на движениях управляемой системы

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_1'} - \frac{\partial T}{\partial q_1} = \frac{\partial \Pi}{\partial q_1} + u, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i'} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \qquad (i = 2, \ldots, n) \tag{2.7}$$

производная полной энергии системы H с учетом нелинейных членов удовлетворяет условию

$$dH / dt = q_1' u \quad \text{или} \quad dH / dt = -2R \quad \text{при } u = -\partial R / \partial q_1', \quad 2R = q_1'^2$$

Поэтому утверждение теоремы 2.1 сохраняет свою силу и в нелинейном случае.

Следовательно, решение задачи об аналитическом конструировании оптимального регулятора

$$\int_0^\infty [2R(q_1') + u^2(t)]\, dt = \min \qquad (2R = q_1'^2)$$

и в нелинейном случае (2.7) определяется оптимальной функцией Ляпунова

$$V(q, q') = 2H(q, q')$$

равной удвоенной полной энергии, причем $u^\circ = -\partial R / \partial q_1'$.

§ 3. Рассмотрим влияние диссипативных сил на управляемость и наблюдаемость консервативных механических систем в окрестности положения равновесия. Предположим, что система (1.6) не вполне управляема воздействием u. Это значит, что не выполнены условия (1.16), т. е. среди λ_i есть равные, или некоторые из чисел s_{1i} равны нулю.

Рассмотрим частный случай, когда $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = \lambda \neq 0$. Следовательно, рассмотрим систему

$$x'_{2i-1} = \lambda x_{2i} + \alpha_i u, \qquad x'_{2i} = x_{2i-1} \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{3.1}$$

где, по крайней мере, одно из чисел $\alpha_i \neq 0$. Выясним вопрос о существовании таких диссипативных сил, когда система (3.1) становится вполне управляемой воздействием u. Для положительного решения этого вопроса достаточно показать, что возможно подобрать знакоположительную функцию

$$2R = -\sum_{ij=1}^{n} \gamma_{ij} x_{2i-1} x_{2j-1} \tag{3.2}$$

такую, чтобы система

$$x'_{2i-1} = \lambda x_{2i} - \frac{\partial R}{\partial x_{2i-1}} + \alpha_i u, \qquad x'_{2i} = x_{2i-1} \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{3.3}$$

стала вполне управляемой воздействием u. В данном случае диссипативные силы, делающие систему (3.1) вполне управляемой, можно найти следующим образом. Систему (3.1) можно всегда преобразовать к виду

$$z'_{2i-1} = \lambda z_{2i} + \beta_i u, \qquad z'_{2i} = z_{2i-1} \qquad (\beta_i \neq 0, \quad i = 1, \ldots, n) \tag{3.4}$$

Выберем функцию R в форме

$$2R = \sum_{i=1}^{n} \mu_i z^2_{2i-1}$$

Тогда система (3.4) принимает вид

$$z'_{2i-1} = \lambda z_{2i} - \mu_i z_{2i-1} + \beta_i u, \qquad z'_{2i} = z_{2i-1} \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{3.5}$$

Можно проверить, что система (3.5) вполне управляема, если $\mu_i \neq \mu_j$, т. е. здесь всегда можно подобрать диссипативные силы, которые делают систему вполне управляемой.

§ 4. Пример. Рассмотрим простой иллюстрационный пример. Пусть материальная точка движется по поверхности $z = f(x, y)$. Координатная система (x, y, z) ортогональная, ось z направлена вертикально вверх, а x и y — по главным направлениям поверхности в точке O, которую предполагаем точкой экстремума функции $z = f(x, y)$. Допустим, что отклонение материальной точки от положения равновесия (0, 0, 0) и скорость ее движения — малые величины. Предполагаем, что материальная точка движется под действием силы тяжести и управляющего воздействия u, которое имеет неизменное горизонтальное направление. Уравнения движения точки в первом приближении имеют вид

$$x'' = \lambda_1 x_1 + \alpha_1 u, \qquad y'' = \lambda_2 y + \alpha_2 u \tag{4.1}$$

а) если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2 \neq 0$, то система (4.1) вполне управляема, т. е. система вполне управляема и стабилизируема воздействием u, если точка O поверхности $z = f(x, y)$ не шаровая точка и управляющее воздействие не направлено по главным направлениям поверхности в точке;

б) если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$, т. е. если точка O — шаровая, то система (4.1) не вполне управляема и при $\lambda > 0$ нестабилизируема. Из § 3 следует, что в последнем случае при наложении неравномерного трения система становится вполне управляемой и стабилизируемой управлением u, если направление управляющего воздействия u не совпадает с главными осями эллипса трения. Здесь под названием «эллипс трения» понимается кривая $R = c^2$, где $R(x', y')$ — диссипативная функция.

Обсудим, какую роль играют гироскопические силы в задачах управления, наблюдения и стабилизации. Известно [1], что консервативная неустойчивая система может быть в ряде случаев стабилизирована до устойчивой (не асимптотически) системы наложением подходящих гироскопических сил. Эта устойчивость при наложении диссипативных сил разрушается [1]. Оказывается, что аналогичную полезную роль играют гироскопические силы и по отношению к управляемым системам. Именно, в ряде случаев подходящим выбором гироскопических сил можно улучшить качество управляемости, наблюдаемости и стабилизируемости консервативной механической системы в окрестности положения равновесия.

§ 5. Рассмотрим частный случай, когда в (1.6) $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = \lambda$, и хотя бы одно из чисел $s_{1i} \neq 0$. Тогда систему (1.6) можно привести к виду

$$x_1' = \lambda x_2 + u, \qquad x_2' = x_1, \qquad x'_{2i-1} = \lambda x_{2i}, \qquad x'_{2i} = x_{2i-1} \qquad (i = 2, \ldots, n) \tag{5.1}$$

Система (5.1) не вполне управляема управляющим воздействием u, однако можно указать такие гироскопические силы, при наличии которых система становится вполне управляемой.

Действительно, легко проверить, что система

$$x_1' = \lambda x_2 + \omega_1 x_3 + u, \qquad x_2' = x_1 \tag{5.2}$$

$$x'_{2i-1} = \lambda x_{2i} + \omega_i x_{2i+1} - \omega_{i-1} x_{2i-3}, \qquad x'_{2i} = x_{2i-1} \qquad (i = 2, \ldots, n, \ \omega_n = 0)$$

вполне управляема управляющим воздействием u, если

$$\lambda \neq 0, \qquad \omega_i \neq 0 \qquad (i = 1, \ldots, n-1)$$

Рассмотрим пример, когда не все λ равны. Пусть имеем маятник с двумя степенями свободы, движущийся в окрестности верхнего неустойчивого положения равновесия, и подверженный управляющей горизонтальной силе, лежащей в горизонтальной плоскости $\{z, y\}$, причем примем, что уравнения первого приближения имеют вид

$$x'' = \lambda_1 x, \qquad y'' = \lambda_2 y + u \tag{5.3}$$

где x, y — координаты центра массы m, жестко насаженной на стержень, который не вращается вокруг своей продольной оси.

Эта система не вполне управляема воздействием u по y, и, следовательно, положение $x = y = 0$ не может быть стабилизировано никаким выбором $u\,(x, x', y, y')$. Точно так же эта система не является вполне наблюдаемой по координате y. Допустим, однако, что масса m сосредоточена в маховике, вращающемся с угловой скоростью ω вокруг продольной оси стержня. Тогда в уравнениях (5.1) появляются дополнительные члены, обусловленные гироскопическим эффектом. Пусть в таком случае уравнения движения в первом приближении принимают вид

$$x_1' = x_2, \qquad x_2' = \lambda_1 x_1 + \omega x_4, \qquad x_3' = x_4, \qquad x_4' = \lambda_2 x_3 - \omega x_2 + u \tag{5.4}$$

Нетрудно проверить, что при $\lambda_1 \neq 0$, $\omega \neq 0$ система (5.4) вполне управляема силой u, а следовательно, получающаяся механическая система может быть теперь и стабилизирована до асимптотической устойчивости силой $u\,(x, x', y, y')$. Система (5.4) будет также и наблюдаемой (например, по величине $x_3\,(t)$).

Таким образом, из вышесказанного видно, что неуправляемую и нестабилизируемую данным воздействием систему можно сделать управляемой и стабилизируемой этим же воздействием, если дополнительно наложить подходящие гироскопические силы.

Отметим, однако, одну интересную особенность, которая отличает свойство стабилизируемости управлением u исходной устойчивой консервативной системы от того свойства стабилизируемости, которое приобретает неуправляемая сначала неустойчивая консервативная система, становящаяся устойчивой и стабилизируемой за счет гироскопических сил. Это свойство тесно связано с аналогичной картиной в случае неуправляемых систем. Именно, в § 1, 2 показано, что консервативная, устойчивая (не асимптотически) система может быть стабилизирована до асимптотической устойчивости силой, выбранной в классе сил, любой природы тогда и только тогда, когда это можно сделать, лишь ограничиваясь классом диссипативных сил. Напротив, если первоначально неустойчивую и не вполне управляемую воздействием u консервативную систему наложением гироскопических сил сделаем устойчивой (не асимптотически) и управляемой воздействием u, то это означает, что ее можно сделать асимптотически устойчивой лишь за счет выбора силы $u\,(q, q')$ достаточно общей природы, но при этом уже нельзя ограничиваться лишь классом диссипативных сил. Более того, только диссипативными силами не только нельзя стабилизировать систему до асимптотической устойчивости, но эти диссипативные силы даже будут разрушать уже достигнутую за счет гироскопических сил неасимптотическую устойчивость.

§ 6. В заключение рассмотрим, как в случае консервативной механической системы (1.2) трансформируется условие максимина [6, 7], которое определяет воздействие u, приводящее систему в заданное состояние $q_i = 0$, $q_i' = 0$ с наименьшей возможной затратой интенсивности $\rho^*(u)$.

Рассмотрим задачу лишь в линейном приближении. Кроме того, для упрощения выкладок рассмотрим не задачу о приведении системы из заданной точки q_{i0}, q_{i0}' в положение равновесия $q_i = 0$, $q_i' = 0$, а напротив, задачу о приведении системы из точки $q_i = 0$, $q_i' = 0$ в точку q_{i0}, q_{i0}'. Очевидно, решение одной задачи получается из решения другой задачи заменой времени t на $-t$.

Рассмотрим систему, описываемую уравнениями

$$q_1'' = \sum_{j=1}^{n} b_{1j}q_j + u, \qquad q_i'' = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}q_j \qquad (i = 2,\ldots, n) \tag{6.1}$$

Задача состоит в следующем.

Задача 6.1. Заданы отрезок времени $0 \leqslant t \leqslant T$ и начальное (α) и конечное (ω) состояния системы

$$q_i(0) = q_{i\alpha} = 0, \quad q_i'(0) = q_{i\alpha}' = 0, \qquad q_i(T) = q_{i\omega}, \quad q_i'(T) = q_{i\omega}'$$

Требуется найти управление $u(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$, которое переводит систему (6.1) из состояния α в состояние ω и имеет наименьшую возможную интенсивность $\rho^*(u)$.

Вид зависимости $\rho^*(u)$, определяющий оценку интенсивности затраченного усилия u, предполагается заданным. Предполагается также, что зависимость $\rho^*(u)$ соответствует определению нормы линейной операции

$$\varphi = \int_0^T \xi(t)\, u(t)\, dt \tag{6.2}$$

рассматриваемой на каком-либо функциональном пространстве $\{\xi(t),\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$, где задана норма $\rho(\xi)$. Тогда

$$\rho^*(u) = \sup\left[\int_0^T \xi(\tau)\, u(\tau)\, d\tau \text{ при } \rho(\xi) = 1\right]$$

Будем предполагать, что система (6.1) вполне управляема, и, следовательно, задача 6.1 разрешима при любых краевых условиях α и ω.

Согласно [6,7], для решения задачи 6.1 следует рассмотреть то движение $y^\circ(\tau)$ $(0 \leqslant \tau \leqslant T)$ системы, сопряженной с (6.1), которое имеет наименьшую возможную интенсивность

$$\min_y \rho(b^* y^\circ) = \alpha \tag{6.3}$$

при краевом условии $(q^*(T)\, y(T) = 1)$. Тогда искомое оптимальное управление $u^\circ(t)$, решающее задачу 6.1, определится из условия максимальности операции (6.2) на $\xi^* = b^* y^\circ$, т. е. из условия

$$\int_0^T \xi^\circ(\tau)\, u^\circ(\tau)\, d\tau = \max_u \left[\int_0^T \xi^\circ(\tau)\, u(\tau)\, d\tau\right] \tag{6.4}$$

при условии $\rho^*(u) = 1/\alpha$. Условие (6.4) — это условие принципа максимума [18], условие (6.3) — это условие минимума [7], которое в условиях принципа максимума выделяет тот вектор $\psi = y$, который обеспечивает приведение системы именно в заданное состояние $q(T) = q_0$. (Здесь b — $2n$-вектор-столбец $b = \{0, 1, \ldots, 0\}$, q — $2n$-вектор $\{q_1, q_1', \ldots, q_n, q_n'\}$).

Перейдем в уравнениях (6.1) к нормальным координатам x_i, которые перенумеруем здесь несколько иначе, чем в (1.6). Именно, в этом параграфе будем считать, что скорость имеет больший индекс, чем соответствующая координата.

Следовательно, символы x_{2k-1} будут обозначать координаты, символы x_{2k} означают скорости. Тогда система (6.1) приводится к уравнениям

$$x'_{2k-1} = x_{2k}, \qquad x_{2k}' = \lambda_k x_{2k-1} + p_{2k} u \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{6.5}$$

Краевые условия задачи принимают вид $x(0) = x^{(\alpha)} = 0$, $x(T) = x^{(\omega)}$, где $2n$-мерный вектор $x^{(\omega)}$ связан с $2n$-мерным вектором $q^{(\omega)}$ линейным преобразованием.

Система уравнений, сопряженная к системе (6.5) (при $u = 0$), имеет вид

$$y'_{2k-1} = -\lambda_k y_{2k}, \qquad y_{2k}' = -y_{2k-1} \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{6.6}$$

После переименования переменных $y_{2k} = z_{2k-1}$, $y_{2k-1} = z_{2k}$ и после изменения направления измерения времени, т. е. после замены $t = T - \tau$, получим из (6.6) уравнения

$$z'_{2k-1} = z_{2k}, \qquad z_{2k}' = \lambda_k z_{2k-1} \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{6.7}$$

совпадающие с основной частью системы (6.5). Обозначим через $z^{(\omega)}$ вектор, получающийся из вектора $x^{(\omega)}$ при той нумерации координат, которая связывает векторы y и z; символом l обозначим вектор $l = \{p_2, 0, \ldots, p_{2n}, 0\}$, получающийся из вектора $p = \{0, p_2, \ldots, 0, p_{2n}\}$ аналогичной перенумерацией координат.

Найдем движение $z(t)$ системы (6.7), удовлетворяющее краевому условию $([z^{(\omega)}]^* z(0)) = 1$ и такое, для которого сигнал $\xi(t) = (l^* z(t))$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$ имеет наименьшую возможную интенсивность $\rho(\xi) = \min$. Тогда искомый сигнал $y(\tau)$, определяющий оптимальное управление $u(t)$ по условиям максимина (6.3), (6.4) связан с вектором $z(t)$ соотношениями

$$y_{2k}(\tau) = z_{2k-1}(T - \tau), \qquad y_{2k-1}(\tau) = z_{2k}(T - \tau)$$

Итак, приходим к следующему выводу.

Теорема 6.1. **Оптимальное управление $u^\circ(t)$, решающее задачу 6.1 об управлении для механической консервативной системы, определяется условиями максимина (6.3), (6.4), где вектор $y(\tau)$ описывает движение той же самой системы (при $u \equiv 0$), но при замене координат скоростями, а скоростей координатами и при измененном на обратное течении времени ($\tau = T - t$).**

Поступила 18 V 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Гостехиздат, 1955.
2. Пожарицкий Г. К. Об асимптотической устойчивости систем с диссипацией. ПММ, 1961, т. 25, вып. 4.
3. Габриелян М. С. О стабилизации неустойчивых движений механических систем. ПММ, 1964, т. 28, вып. 3.
4. Летов А. М. Аналитическое конструирование регуляторов. Автоматика и телемаханика, 1961, т. 22, № 4.
5. Kalman R. E. New Methods and Results in Linear Prediction and Filtering Theory. RIAS Technical Report, 1961, вып. 1.
6. Красовский Н. Н. К теории управляемости и наблюдаемости линейных динамических систем. ПММ, 1964, т. 28, вып. 1.
7. Красовский Н. Н. Об одной задаче оптимального регулирования. ПММ, 1957, т. 21, вып. 5.
8. Красовский Н. Н. Об одной задаче оптимального регулирования нелинейных систем. ПММ, 1959, т. 23, вып. 2.
9. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Гостехиздат, 1950.
10. Беллман Р., Гликсберг И., Гросс О. Некоторые вопросы математической теории процессов управления. Изд. иностр. лит., 1962.
11. Красовский Н. Н. О стабилизации неустойчивых движений дополнительными силами при неполной обратной связи. ПММ, 1963, т. 27, вып. 4.
12. Барбашин Е. А., Красовский Н. Н. Об устойчивости движения в целом. Докл. АН СССР, 1952, т. 36, № 3.
13. Калман Р. Е. Об общей теории систем управления. Тр. I Конгресса ИФАК, т. 1. Изд-во АН СССР, 1961.
14. Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. Физматгиз, 1960.
15. Альбрехт Э. Г. Об оптимальной стабилизации нелинейных систем. ПММ, 1961, т. 25, вып. 5.
16. Альбрехт Э. Г. К теории аналитического конструирования регуляторов. Тезисы докл. межвузовской конференции по устойчивости движения и аналитической механике. Изд. Казанск. авиац. ин-та, 1962.
17. Зубов В. И. К теории аналитического построения регуляторов. Автоматика и телемеханика, 1963, т. 24, № 8.
18. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. Физматгиз, 1961.