

Сделаем несколько замечаний:

а) Рассмотрение повторных нагружений в других направлениях связано с непрерывным использованием ассоциированного закона пластического течения. В зависимости от выбора функции нагружения (2.5) могут быть описаны различные эффекты: вращение кривой нагружения, поперечный эффект Баушингера и т. д.

б) Аналогично может быть рассмотрена плоская задача для несжимаемого пластического материала. В этом случае напряженное и деформированное состояние может быть представлено при помощи векторов

$$\sigma = 1/2 (\sigma_x - \sigma_y) i + \tau_{xy} j, \quad e = 1/2 (e_x - e_y) i + e_{xy} j \quad (2.17)$$

Рассмотрение общего напряженного и деформированного состояния связано с известными трудностями интерпретации.

в) Очевидно, что теория трансляционного упрочнения [2,3] представляет собой частный случай рассмотренных соотношений; при этом функция нагружения будет иметь вид

$$(\tau_x - ce_x)^2 + (\tau_y - ce_y)^2 = k^2 \quad (2.18)$$

или

$$(\tau_x^2 + \tau_y^2) + (e_x^2 + e_y^2) - 2c(\tau_x e_x + \tau_y e_y) = k^2 \quad (2.19)$$

Поступила 28 I 1964

#### ЛИТЕРАТУРА

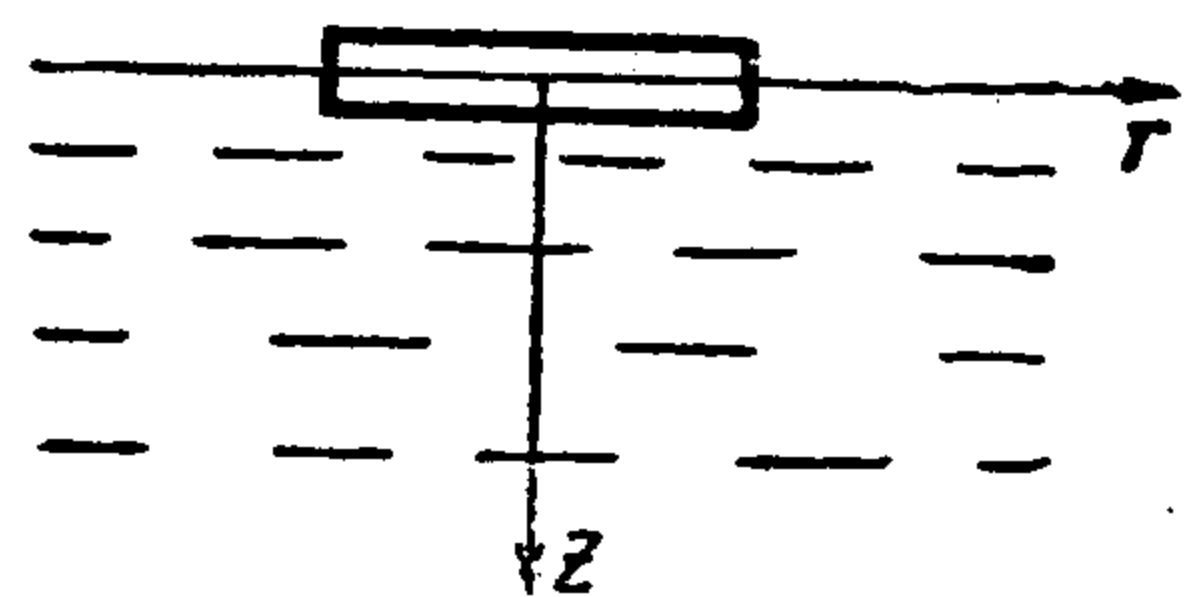
1. Г о л ь д е н б л а т т И. И. Некоторые вопросы механики деформируемых сред. Гостехтеоретиздат, 1955.
2. И ш л и н с к и й А. Ю. Общая теория пластичности с линейным упрочнением. Укр. математ. ж., 1954, т. 6, № 3.
3. К а д а ш е в и ч Ю. И. и Н о в о ж и л о в В. В. Теория пластичности, учитывающая остаточные микронапряжения. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 1.

### УДАР ДИСКА ПО ПОВЕРХНОСТИ ИДЕАЛЬНОЙ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

В. Б. Поручиков (Москва)

Рассматривается осесимметрическая задача об ударе абсолютно жесткого диска по поверхности идеальной сжимаемой жидкости. Эта задача возникает в связи с проблемой входа тупых тел в жидкость, когда в начальный промежуток времени тело испытывает большие перегрузки. В настоящей работе методом интегральных преобразований ищется решение задачи при  $0 \leq t < a/c_0$ . Полученное, до 2-го приближения включительно, асимптотическое решение сравнивается с результатом точного решения плоской задачи [1,2].

§ 1. Пусть в момент  $t = 0$  происходит удар абсолютно жесткого диска радиуса  $a$  по свободной поверхности идеальной сжимаемой жидкости, занимающей нижнее полупространство  $z > 0$  (фиг. 1). Предполагается, что начальная скорость диска  $v_0 \ll c_0$ . Здесь  $c_0$  — скорость звука невозмущенной жидкости. При этих условиях, как нетрудно показать, для начального промежутка времени  $\Delta t \sim a/c_0$ , когда существенна сжимаемость жидкости, задача будет линейной и описывается в цилиндрической системе безразмерных координат  $r_1 z_1$  следующим уравнением и условиями:



Фиг. 1

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r_1^2} + \frac{\partial \varphi}{r_1 \partial r_1} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_1^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} \quad (1.1)$$

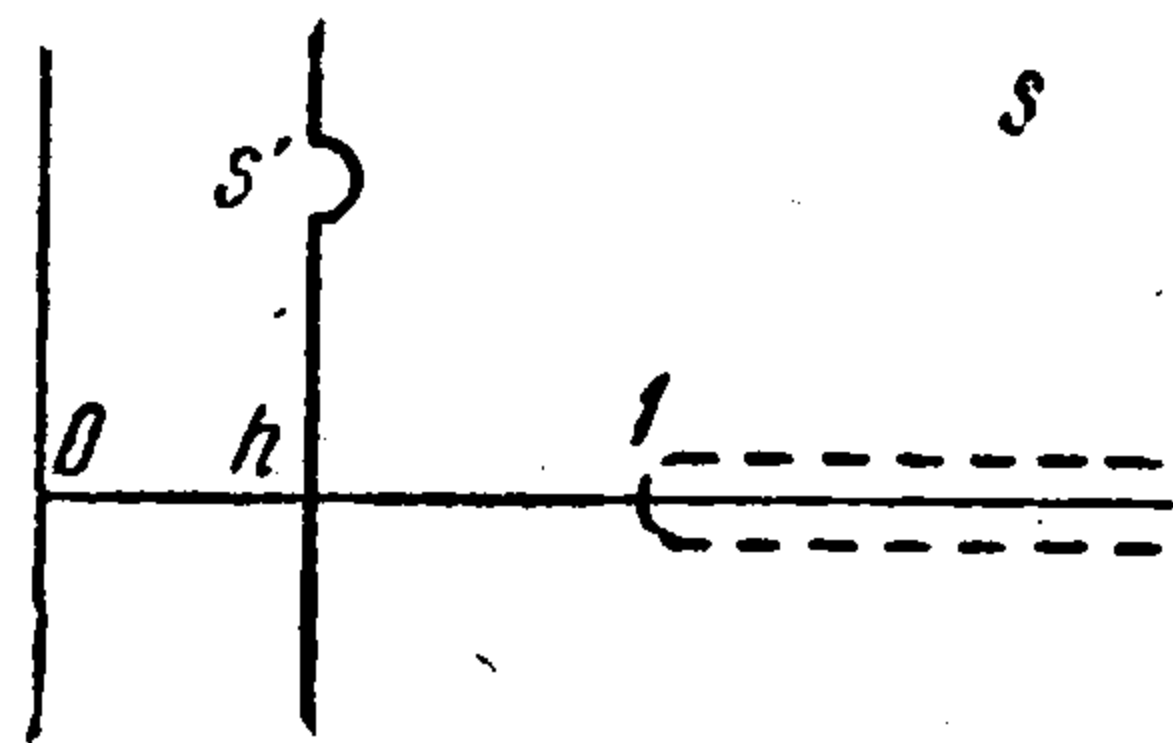
$$\varphi = 0 \quad \text{при } r_1 > 1, \quad z_1 = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z_1} = v(\tau) a \quad \text{при } 0 \leq r_1 < 1, \quad z_1 = 0$$

$$\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = 0 \quad \text{при } \tau = 0, \quad \tau = \frac{c_0 t}{a}, \quad r_1 = \frac{r}{a}, \quad z_1 = \frac{z}{a}$$

Здесь  $\Phi(r_1, z_1, \tau)$  — потенциал возмущенного движения. В дальнейшем индекс 1 у безразмерных независимых переменных опускается.

Такая линейная постановка дает корректное решение во всех точках, кроме малой области у края диска, где из-за разрыва направления скоростей последние должны иметь особенность.

В задаче отыскивается сила, действующая на диск при  $0 \leq \tau < 1$ . Аналогичная плоская задача рассматривалась в [1-2].



Фиг. 2

§ 2. К системе (1.1) применяется преобразование Лапласа [3] по  $\tau$ :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{\partial \Phi}{r \partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = p^2 \Phi \quad (\text{Re } p > 0)$$

$$\Phi_{z=0} = 0 \quad \text{при } r > 1 \quad (2.1)$$

$$[\partial \Phi / \partial z]_{z=0} = V(p) a \quad \text{при } 0 \leq r < 1$$

Далее, применяя к уравнению (2.1) преобразование Ханкеля [3] по  $r$ , нетрудно получить при  $z = 0$ :

$$\int_0^1 \Phi_{z=0} J_0(rx) r dr = - \frac{1}{\sqrt{p^2 + x^2}} \left[ \int_1^\infty \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)_{z=0} J_0(rx) r dr + V(p) a \int_0^1 J_0(rx) r dr \right]$$

В (2.1) и (2.2) приняты обозначения:  $J_n(r)$  — функция Бесселя  $n$ -го порядка.

$$V(p) \doteq v(\tau), \quad \Phi(r, z, p) \doteq \Phi(r, z, \tau)$$

Обратное преобразование Ханкеля для (2.2) при  $p > 1$  дает:

$$\int_1^\infty \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)_{z=0} r dr \int_0^\infty J_0(rx) J_0(\rho x) \frac{x dx}{\sqrt{p^2 + x^2}} = -V(p) a \int_0^\infty J_1(x) J_0(x\rho) \frac{dx}{\sqrt{p^2 + x^2}}$$

Нетрудно показать, что:

$$\int_0^\infty J_0(rx) J_0(x\rho) \frac{x dx}{\sqrt{p^2 + x^2}} = \frac{1}{\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{\alpha(s) s ds}{\sqrt{p^2 - s^2}}$$

$$\int_0^\infty J_1(x) J_0(x\rho) \frac{dx}{\sqrt{p^2 + x^2}} = \frac{1}{\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} K_0(s\rho) I_1(s) \frac{ds}{\sqrt{p^2 - s^2}} \quad (2.4)$$

Здесь  $0 < b < \text{Re } p$ ;  $K_n(x)$  и  $I_n(x)$  — функции Макдональда и Бесселя от мнимого аргумента соответственно  $n$ -го порядка. А ветвь у  $\sqrt{p^2 - s^2}$  выбрана так, что  $\sqrt{p^2 - s^2} > 0$  при  $0 < s < p$ .

$$\alpha(s) = \begin{cases} K_0(sr) I_0(sp) & \text{при } r > \rho \\ K_0(sp) I_0(sr) & \text{при } \rho > r \end{cases}$$

Подставляя выражения (2.4) в (2.3) и делая замену переменной  $s_1 = s/p$  (считая для простоты  $p > 0$ ), получаем:

$$\int_1^\infty \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)_{z=0} r dr \int_{h-i\infty}^{h+i\infty} \frac{\alpha(ps) s ds}{\sqrt{1 - s^2}} = - \frac{a}{p} V(p) \int_{h-i\infty}^{h+i\infty} K_0(s\rho) I_1(sp) \frac{ds}{\sqrt{1 - s^2}} \quad (2.5)$$

Здесь  $0 < h < 1$ , индекс 1 у  $s_1$  опущен.

Теперь нетрудно заметить, что контур интегрирования в (2.5) может быть деформирован вдоль разреза ветви  $\sqrt{1 - s^2}$ , как показано на фиг. 2. Тогда можно применить асимптотические разложения цилиндрических функций для больших значений аргументов [4], сделав одно существенное упрощение. Представим

$$I_n(q) = 1/2 (-i)^n [H_n^{(2)}(qi) + H_n^{(1)}(qi)] \quad (q = sp, spr, spp)$$

Здесь  $H_n^{(j)}(qi)$  — функция Ханкеля  $j$ -го рода  $n$ -го порядка.

Нетрудно заметить, что функция  $H_n^{(1)}(qi)$  дает множитель запаздывания  $\exp(-2q)$  по сравнению с  $H_n^{(2)}(qi)$ . Причем из формы деформированного контура видно, что этот множитель удовлетворяет неравенству  $\exp(-2q) \leq \exp(-2p)$ .

Следовательно, функция  $H_n^{(1)}(qi)$  дает в решении (2.5) вклад в виде вторичных, третичных и т. д. дифракционных волн.

При обратном преобразовании Лапласа эти члены появятся только при  $\tau > 2$ , что исключено по условию задачи. Следовательно, вместо  $I_n(q)$  в (2.5) нужно подставить функцию  $1/2 (-i)^n H_n^{(2)}(qi)$  и использовать ее асимптотику. Тогда нетрудно видеть, что для первого приближения по  $1/p$  получается (если деформировать контур в прежнее положение после применения асимптотики)

$$\int_1^{\infty} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)_{z=0} V \bar{r} dr \int_{h-i\infty}^{h+i\infty} \frac{e^{spr-sp\rho}}{\sqrt{1-s^2}} ds = -\frac{a}{p} V(p) \int_{h-i\infty}^{h+i\infty} \frac{e^{sp-sp\rho}}{s \sqrt{1-s^2}} ds \quad (2.6)$$

Предположим, что

$$\left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)_{z=0} \sim M_0 (\rho - 1)^\beta \quad \text{при } \rho \rightarrow 1, \beta > -1$$

Тогда [5]

$$\psi(s, p) e^{-sp} \sim M_1 s^{-1-\beta} \quad \text{при } s \rightarrow \infty$$

$$\left( \psi(s, p) = \int_1^{\infty} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)_{z=0} e^{spr} V \bar{r} dr \right)$$

Применяя метод Винера — Хопфа к уравнению (2.6), получим

$$\int_{h-i\infty}^{h+i\infty} \left[ \frac{\psi(s, p)}{\sqrt{1-s}} e^{-sp} + \frac{V(p) a}{ps \sqrt{1-s}} \right] \frac{ds}{s-s'} = 0 \quad (2.7)$$

Пользуясь тем, что левый член в скобках подынтегрального выражения (2.7) является аналитической функцией в полуплоскости  $\text{Re } s < 1$ , из (2.7) легко получить

$$\psi(s, p) = V(p) \frac{a}{ps} (\sqrt{1-s} - 1) e^{sp} \quad (2.8)$$

Если искать второе приближение  $\psi(s, p)$  по  $1/p$ , то вместо (2.6) нужно взять

$$\int_1^{\infty} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)_{z=0} V \bar{r} dr \int_{h-i\infty}^{h+i\infty} \frac{e^{spr-sp\rho}}{\sqrt{1-s^2}} ds = -\frac{a}{p} V(p) \int_{h-i\infty}^{h+i\infty} \frac{e^{sp-sp\rho}}{s \sqrt{1-s^2}} \left( 1 - \frac{3}{8ps} - \frac{1}{8psp} \right) ds \quad (2.9)$$

Следует отметить, что в подынтегральном выражении левой части (2.9) в члене  $1 + \gamma$  опущена величина  $\gamma$

$$\left( \gamma = \frac{1}{8psr} - \frac{1}{8psp} \right)$$

Это сделано по следующей причине. Чтобы найти член второго приближения, нужно умножить обе части полного уравнения (2.9) на  $\exp(s'p)$ , проинтегрировать по  $\rho$  от 1 до бесконечности и определить второй член в асимптотическом разложении левой части по степеням  $1/p$ . Оказывается, что величина  $\gamma$  не влияет на этот член, она связана с членами более высокого порядка. Это легко показать, если подставить  $[\partial \Phi / \partial z]_{z=0}$ , найденную из (2.8), в левую часть полного уравнения (2.9). Тогда результат интегрирования членов, связанных с  $\gamma$ , даст величину третьего порядка в разложении по  $1/p$ .

Итак, после повторения для (2.9) всех рассуждений, аналогичных случаю первого приближения, получим:

$$\psi(s, p) = e^{sp} a \frac{V(p)}{ps} \left[ \sqrt{1-s} - 1 + \frac{1}{2sp} (1 - \sqrt{1-s}) - \frac{1}{4p} \sqrt{1-s} \right] \quad (2.10)$$

Из (2.10) нетрудно получить:

$$\int_1^{\infty} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)_{z=0} r dr = \frac{a}{p} V(p) \left[ -\frac{1}{2} + \frac{1}{8p} + O(p^{-2}) \right] \quad (2.11)$$

Тогда из (2.2) и (2.11) получается

$$\int_0^1 \Phi_{z=0} r dr = \frac{a}{p} V(p) \left[ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2p} - \frac{1}{8p^2} + O(p^{-3}) \right]$$

$$F(\tau) = -2\pi a \rho_0 c_0 \int_0^1 \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} \right)_{z=0} r dr \approx \pi a^2 \rho_0 c_0 \left[ v(\tau) - \int_0^{\tau} v(x) dx + \frac{1}{4} \int_0^{\tau} v(x) (\tau - x) dx \right]$$

Если диск обладает большой массой, то можно при  $0 \leq \tau < 1$  положить  $v(\tau) = v_0$ .

Тогда с точностью до  $O(\tau^3)$  получается

$$F(\tau) = \pi a^2 \rho_0 c_0 v_0 (1 - \tau + \frac{1}{8}\tau^2) \quad (2.12)$$

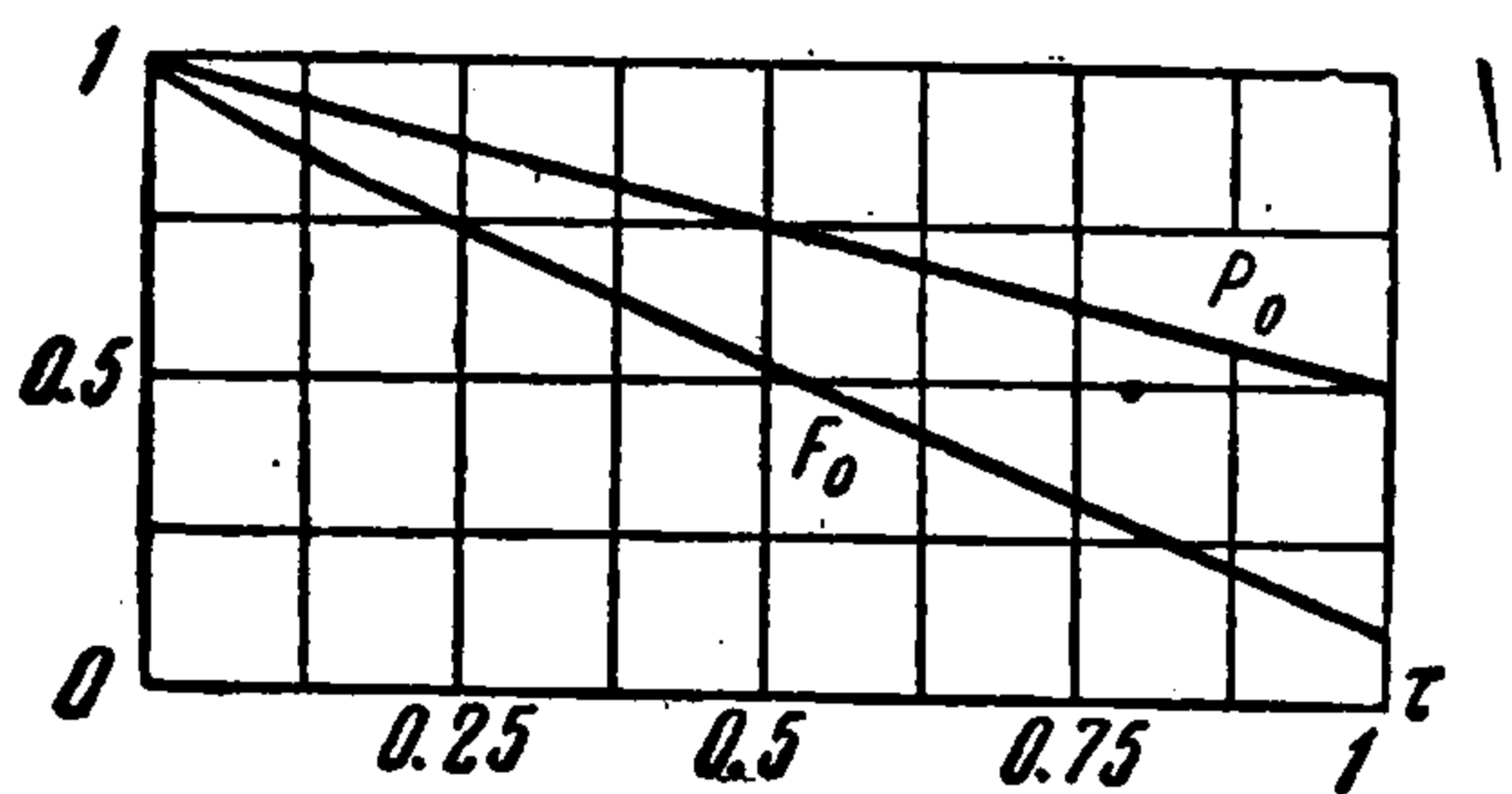
Из плоской задачи [1] легко получить силу, действующую на пластинку

$$P(\tau_1) = \rho_0 c_0 v_0 l (1 - \frac{1}{2}\tau_1) \quad (2.13)$$

$$(\tau_1 = 2c_0 t / l) \quad (l - \text{длина пластинки})$$

Графики безразмерных функций

$$F_0(\tau) = \frac{F(\tau)}{\pi a^2 \rho_0 c_0 v_0}, \quad P_0(\tau_1) = \frac{P(\tau_1)}{\rho_0 c_0 v_0 l}$$



Фиг. 3

приведены на фиг. 3, причем индекс 1 у переменной  $\tau_1$  опущен.

Из фиг. 3 можно заключить, что уже в первом приближении по времени сила, действующая на диск, значительно меньше силы, действующей на пластинку. Так как в первом приближении по времени решение осесимметрической задачи должно совпадать с плоским решением, полученный результат для силы легко объясняется разницей интегрирования одного и того же решения по поверхности пластины и диска. Это легко проверить, воспользовавшись решением плоской задачи [1]. Член второго приближения уже нельзя получить из решения плоской задачи.

Для подтверждения полученных выводов остается привести решение осесимметрической задачи  $[\partial \Phi / \partial z]_{z=0}$  до второго приближения включительно и сравнить его с плоским решением:

$$\left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)_{z=0} = \frac{v_0}{\pi \sqrt{r}} \left[ \left( 2 - \frac{\tau}{2} \right) \arccos \left( \frac{r-1}{\tau} \right)^{1/2} - 2 \left( \frac{\tau}{r-1} - 1 \right)^{1/2} - \frac{\tau - 4r + 4}{3 \sqrt{r-1}} \times \right. \\ \left. \times \sqrt{\tau - r + 1} + \frac{1}{2} (\tau + 2r - 2) \arccos \left( \frac{\tau}{r-1} - 1 \right)^{1/2} \right] \quad \text{при } 1 < r < 1 + \tau$$

$$\left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)_{z=0} = 0 \quad \text{при } 1 + \tau < r$$

Если  $\tau \rightarrow 0$ , так чтобы величина  $(r-1)/\tau$  была постоянной, то остается только первое приближение, совпадающее с решением задачи [2].

$$\left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)_{z=0} \sim \frac{2v_0}{\pi} \left[ \arccos \left( \frac{r-1}{\tau} \right)^{1/2} - \left( \frac{\tau}{r-1} - 1 \right)^{1/2} \right] \quad (2.14)$$

Поступила 23 IV 1964

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Г а л и н Л. А. Удар по твердому телу, находящемуся на поверхности сжимаемой жидкости. ПММ, 1947, т. 11, вып. 5.
2. Ф л и т м а н Л. М. Об одной смешанной краевой задаче для волнового уравнения. ПММ, 1958, т. 22, вып. 6.
3. Д и т к и н В. А., П р у д н и к о в А. П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. Физматгиз, 1961.
4. Г р а д ш т е й н И. С., Р ы ж и к И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, 1963.
5. Н о б л Б. Метод Винера—Хопфа. Изд. иностр. лит., 1962.