

ры области D от Λ не зависят. Эта оценка тоже не может быть улучшена. Отсюда следует, что по мере удаления от отверстий ошибка в смещениях, вообще говоря, логарифмически возрастает.

Автор благодарен Г. И. Баренблатту и С. С. Григоряну за внимание к работе и ценное обсуждение, а также А. Л. Гольденвейзеру за консультацию и полезные замечания, сделанные при рецензировании работы.

Поступила 8 II 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Л у р ь е А. И. К теории толстых плит. ПММ, 1942, т. VI, вып. 5 (см. также [8]).
2. Г о л ь д е н в е й з е р А. Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 4.
3. Н и г у л У. К. О применении символического метода А. И. Лурье к анализу напряженных состояний двумерных теорий упругих плит. ПММ, 1963, т. XXVII, вып. 3.
4. Н и г у л У. К. О приближенном учете краевых эффектов типа Сен-Венана в задачах статики плит. ПММ, 1964, т. 28, вып. 1.
5. Л я в А. Математическая теория упругости. ОНТИ, 1935.
6. В е к у а И. Н. Об одном методе расчета призматических оболочек. Тр. Тбилисск. матем. ин-та им. А. М. Размадзе, 1955, т. XXI.
7. П о н я т о в с к и й В. В. К теории пластин средней толщины. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 2.
8. Л у р ь е А. И. Пространственные задачи теории упругости. Гостехиздат, 1955.

О ФУНКЦИЯХ НАГРУЖЕНИЯ АНИЗОТРОПНО УПРОЧНЯЮЩЕГОСЯ ПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА

Г. И. Быковцев, В. В. Дудукаленко, Д. Д. Ивлев

(Воронеж)

1. Предположим, что функция нагружения упрочняющегося пластического материала полностью определяется напряженным и деформированным состоянием материала

$$f(\sigma_{ij}, e_{ij}^p) = 0 \quad (1.1)$$

где σ_{ij} — компоненты напряженного состояния, e_{ij}^p — компоненты пластической деформации.

Предположим, что данный путь нагружения приводит к определенному деформированному состоянию независимо от ориентации тела относительно некоторой декартовой системы координат x, y, z . Тогда функция нагружения (1.1) может зависеть лишь от инвариантов напряженного и деформированного состояния. Инвариантами напряженного и деформированного состояния будут инварианты тензоров σ_{ij}, e_{ij}^p , а также совместные инварианты этих тензоров.

Известно (например, [1]), что число основных, базисных инвариантов, через которые могут быть выражены все инварианты тензоров σ_{ij}, e_{ij}^p (в том числе и совместные) равно девяти. Это обстоятельство соответствует тому факту, что данное напряженное и деформированное состояние полностью определяется шестью величинами главных компонент напряженного и деформированного состояния, а также тремя независимыми величинами, характеризующими взаимную ориентацию главных направлений тензоров σ_{ij} и e_{ij}^p .

Таким образом, можно записать

$$f(\sigma_i, e_i^p, \alpha, \beta, \gamma) = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.2)$$

где σ_i, e_i^p — главные компоненты тензора напряжений и пластических деформаций; α, β, γ — три величины, например эйлеровы углы, характеризующие взаимную ориентацию главных направлений σ_i и e_i^p .

В качестве базисных могут быть выбраны любые девять независимых инвариантов, например

$$\begin{aligned} & \delta_{ij}\sigma_{ij}, \quad \sigma_{ij}\sigma_{ji}, \quad \sigma_{ij}\sigma_{jk}\sigma_{ki}, \quad \delta_{ij}e_{ij}^p, \quad e_{ij}^p e_{ji}^p \\ & e_{ij}^p e_{jk}^p e_{ki}^p, \quad \sigma_{ij}e_{ij}^p, \quad \sigma_{ij}e_{jk}^p e_{ki}^p, \quad \sigma_{ij}\sigma_{jk}e_{ki}^p \end{aligned} \quad (1.3)$$

где δ_{ij} — составляющие единичного тензора.

2. Рассмотрим некоторые особенности поведения функций нагружения (1.2). Для простоты ограничимся случаем сдвига. Предположим, что отличны от нуля лишь компоненты τ_{xz} , τ_{yz} , e_{xz}^p , e_{yz}^p . В дальнейшем индексы z и p будем опускать.

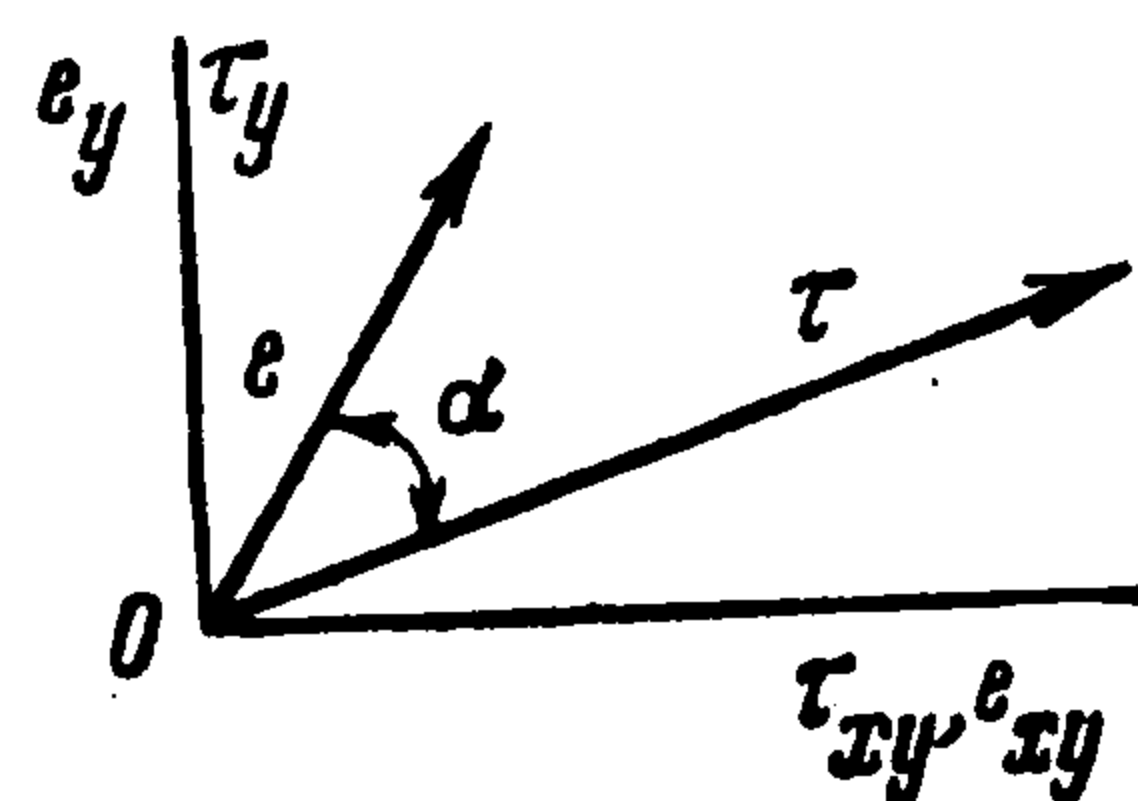
Напряженное и деформированное состояние при сдвиге можно представить при помощи векторов

$$\boldsymbol{\tau} = \tau_x \mathbf{i} + \tau_y \mathbf{j}, \quad \mathbf{e} = e_x \mathbf{i} + e_y \mathbf{j} \quad (2.1)$$

где \mathbf{i} , \mathbf{j} — единичные орты. Инварианты напряженного и деформированного состояния

$$\tau^2 = \tau_x^2 + \tau_y^2, \quad e^2 = e_x^2 + e_y^2 \quad (2.2)$$

$$\alpha = \arctg \frac{\tau_x e_y - \tau_y e_x}{\tau_x e_x + \tau_y e_y} \quad (2.3)$$



Фиг. 1

где α — угол между векторами $\boldsymbol{\tau}$ и \mathbf{e} (фиг. 1).

Вместо угла α удобно использовать один из инвариантов

$$\tau_x e_x + \tau_y e_y, \quad |\tau_x e_y - \tau_y e_x| \quad (2.4)$$

Очевидно, что в качестве базисных можно использовать любые три из инвариантов (2.2), (2.4). Рассмотрим функцию нагружения

$$f(\tau_x^2 + \tau_y^2, e_x^2 + e_y^2, |\tau_x e_y - \tau_y e_x|) = 0 \quad (2.5)$$

Согласно (2.5) любая начальная кривая текучести в плоскости τ_x , τ_y будет окружностью. В самом деле, в начальный момент течения $e_x = e_y = 0$ и условие (2.5) имеет вид

$$f(\tau_x^2 + \tau_y^2, 0, 0) = 0 \quad (2.6)$$

Предположим, что имеет место нагружение $\tau_x \neq 0$, $\tau_y = 0$. Если функция нагружения (2.5) остается симметричной относительно оси τ_x , то $e_x \neq 0$, $e_y = 0$. Зависимость $\tau_x - e_x$ определится из условия (2.5)

$$f(\tau_x^2, e_x^2, 0) = 0 \quad (2.7)$$

Функция нагружения (2.5), соответствующая состоянию $\tau_x \neq 0$, $e_x \neq 0$, $\tau_y = e_y = 0$, имеет вид

$$f(\tau_x^2 + \tau_y^2, e_x^2, |\tau_y e_x|) = 0 \quad (2.8)$$

Предположим, что функция нагружения (2.5) не зависит от инварианта $e_x^2 + e_y^2$

$$f(\tau_x^2 + \tau_y^2, |\tau_x e_y - \tau_y e_x|) = 0 \quad (2.9)$$

Тогда при нагружении $\tau_x \neq 0$, $e_x \neq 0$, $\tau_y = e_y = 0$ выражение (2.9) примет вид $f(\tau_x^2, 0) = 0$, и, следовательно, материал при начальном нагружении не упрочняется в направлении нагружения.

Однако при изменении деформированного состояния функция нагружения (2.9) будет изменяться. В самом деле, функция нагружения (2.9), соответствующая деформированному состоянию $e_x \neq 0$, $e_y = 0$, будет иметь вид

$$f(\tau_x^2 + \tau_y^2, |\tau_y e_x|) = 0 \quad (2.10)$$

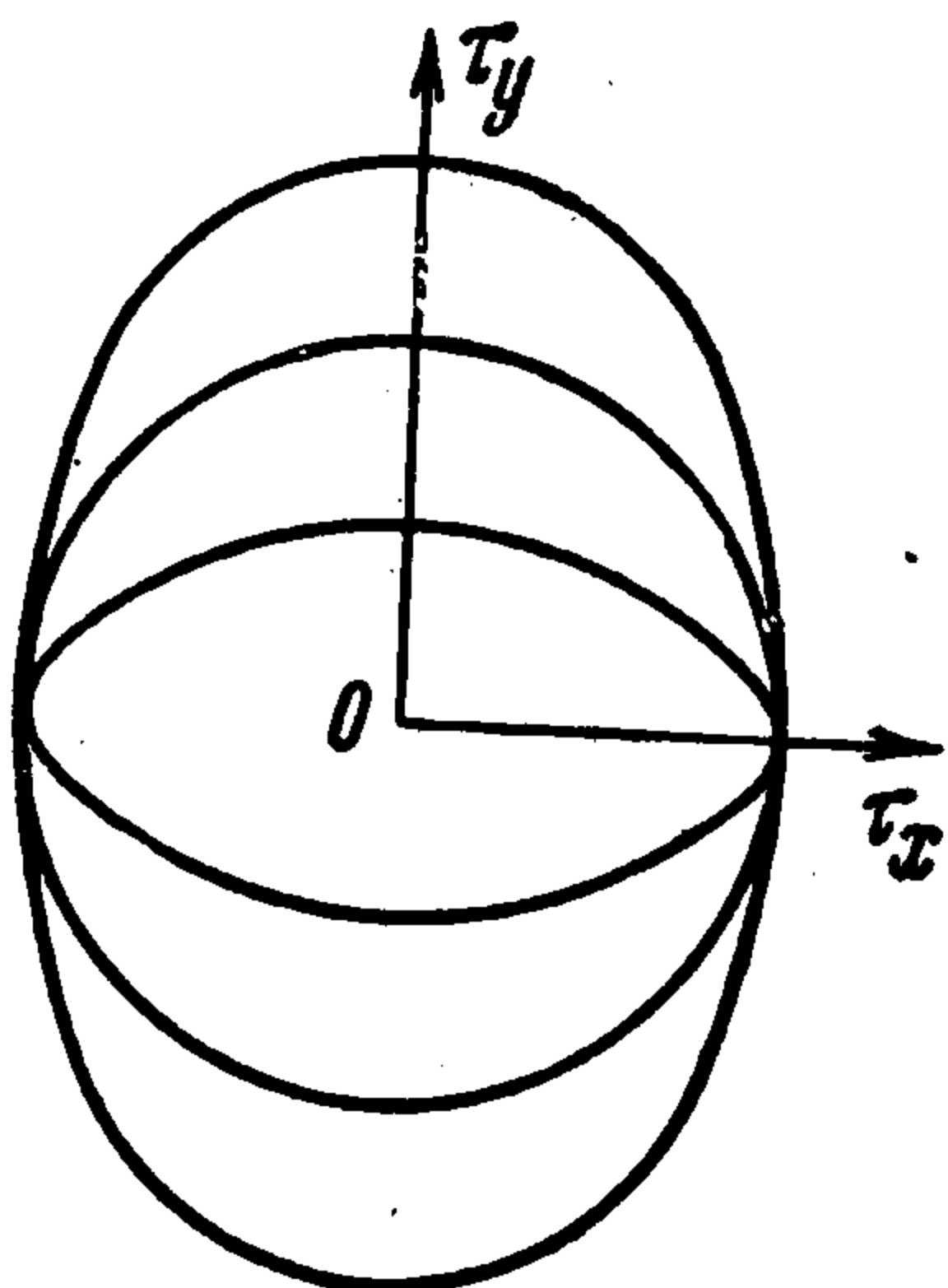
В качестве примера рассмотрим функцию нагружения

$$\tau_x^2 + \tau_y^2 = k^2 \pm c^2 (\tau_x e_y - \tau_y e_x)^2 \quad (k, c = \text{const} > 0) \quad (2.11)$$

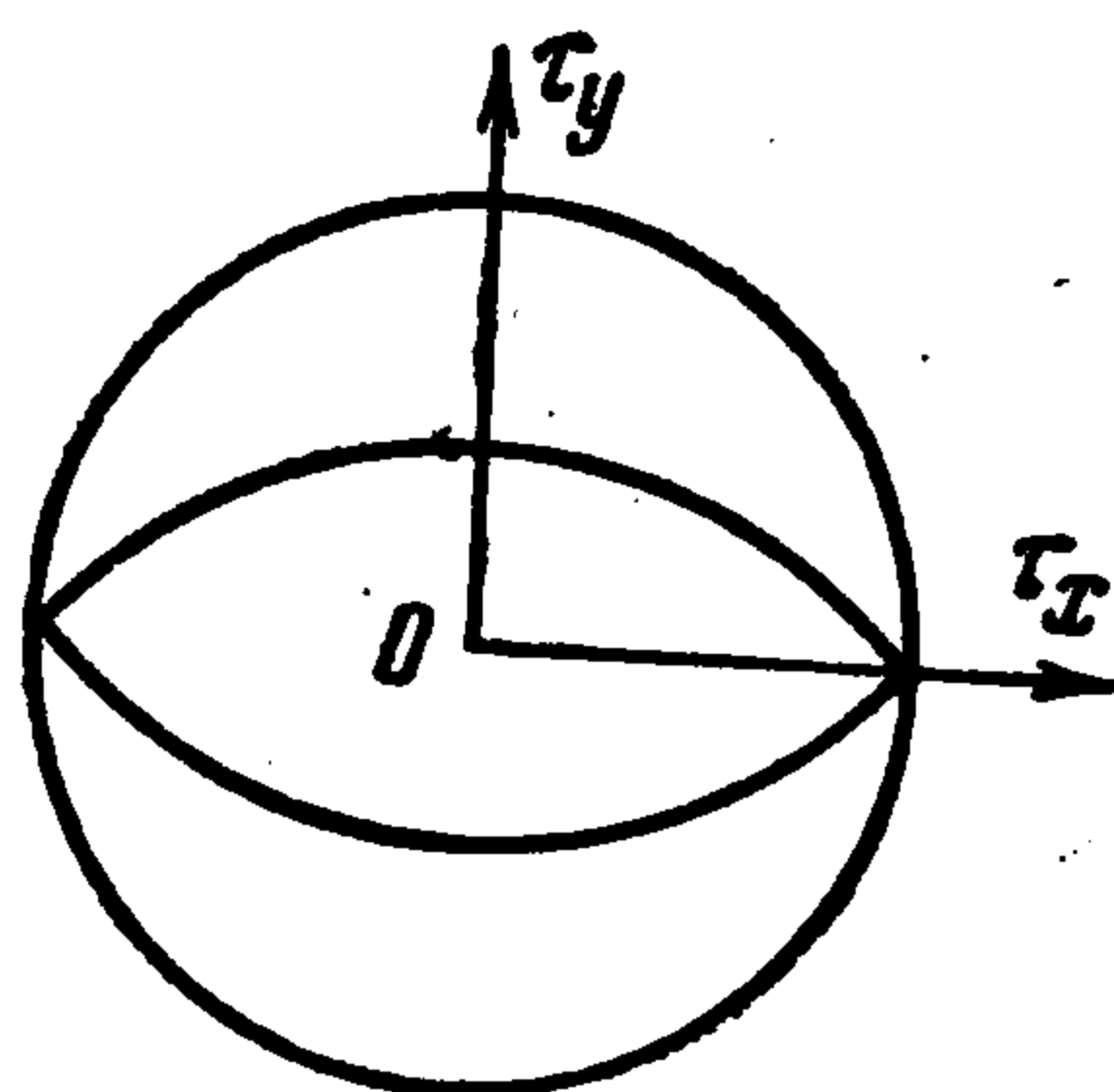
Пусть опять имеет место одноосное нагружение $\tau_x \neq 0$, $e_x \neq 0$, $\tau_y = e_y = 0$. Из (2.11) следует, что $\tau_x = k$, следовательно, материал не упрочняется вдоль направления нагружения, а функция нагружения имеет вид

$$\tau_x^2 + \tau_y^2 (1 \mp c^2 e_x^2) = k^2 \quad (2.12)$$

Уравнение (2.12) в плоскости τ_x , τ_y будет уравнением эллипса с полуосями k и $k / \sqrt{1 \mp (ce_x)^2}$. На фиг. 2 показаны эллипсы, представляющие кривые нагружения (2.12), пунктиром показана начальная кривая текучести. Эллипс с увеличивающейся полуосью соответствует верхнему знаку в уравнениях (2.11), (2.12), с уменьшающейся полуосью — нижнему знаку.



Фиг. 2



Фиг. 3

Таким образом, зависимость функции нагружения от инварианта $\tau_x e_y - \tau_y e_x$ может привести к интересным следствиям: материал, не упрочняющийся в направлении начального нагружения, может упрочняться или разупрочняться в других направлениях. Интересный случай представляет зависимость

$$\tau_x^2 + \tau_y^2 = k^2 + 2c |\tau_x e_y - \tau_y e_x| \quad (2.13)$$

В этом случае также рассмотрим нагружение $\tau_x \neq 0$, $\tau_y = 0$, при этом также будет иметь место $e_x \neq 0$, $e_y = 0$. Функция нагружения будет иметь вид

$$\tau_x^2 + (\tau_y \mp ce_x)^2 = k^2 + (ce_x)^2 \quad (2.14)$$

Кривая нагружения, соответствующая функции нагружения (2.14), представлена на фиг. 3. В данном случае материал не упрочняется в направлении нагружения, а функция нагружения приобретает угловую точку.

Предположим, что в плоскости xu дана кривая $f(x, y, a) = 0$, где a — параметр.

Легко построить функцию нагружения, кривая нагружения которой при $\tau_x \neq 0$, $e_x \neq 0$, $\tau_y = e_y = 0$ будет совпадать с наперед заданной кривой $f(x, y, a) = 0$; при $a = 0$ кривая $f(x, y, 0) = 0$ является окружностью.

В самом деле, поставим в соответствие $\tau_x - x$, $\tau_y - y$, $e_x - a$. Искомая функция нагружения может быть выбрана, например, в виде

$$f\left(\frac{\tau_x e_x + \tau_y e_y}{\sqrt{e_x^2 + e_y^2}}, \frac{|\tau_x e_y - \tau_y e_x|}{\sqrt{e_x^2 + e_y^2}}, \sqrt{e_x^2 + e_y^2}\right) = 0 \quad (2.15)$$

или

$$f\left(\sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2}, \frac{|\tau_x e_y - \tau_y e_x|}{\sqrt{e_x^2 + e_y^2}}, \sqrt{e_x^2 + e_y^2}\right) = 0 \quad (2.16)$$

Функции нагружения (2.15), (2.16) приводят к одной кривой нагружения при нагружении $\tau_x \neq 0$, $e_x \neq 0$, $\tau_y = e_y = 0$, но при повторных нагружениях в других направлениях поведение их будет различным.

Аналогично можно найти другие функции нагружения, приводящие при одноосном нагружении к данной кривой нагружения.

Сделаем несколько замечаний:

а) Рассмотрение повторных нагружений в других направлениях связано с непрерывным использованием ассоциированного закона пластического течения. В зависимости от выбора функции нагружения (2.5) могут быть описаны различные эффекты: вращение кривой нагружения, поперечный эффект Баушингера и т. д.

б) Аналогично может быть рассмотрена плоская задача для несжимаемого пластического материала. В этом случае напряженное и деформированное состояние может быть представлено при помощи векторов

$$\sigma = 1/2 (\sigma_x - \sigma_y) i + \tau_{xy} j, \quad e = 1/2 (e_x - e_y) i + e_{xy} j \quad (2.17)$$

Рассмотрение общего напряженного и деформированного состояния связано с известными трудностями интерпретации.

в) Очевидно, что теория трансляционного упрочнения [2,3] представляет собой частный случай рассмотренных соотношений; при этом функция нагружения будет иметь вид

$$(\tau_x - ce_x)^2 + (\tau_y - ce_y)^2 = k^2 \quad (2.18)$$

или

$$(\tau_x^2 + \tau_y^2) + (e_x^2 + e_y^2) - 2c(\tau_x e_x + \tau_y e_y) = k^2 \quad (2.19)$$

Поступила 28 I 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Г о л ь д е н б л а т т И. И. Некоторые вопросы механики деформируемых сред. Гостехтеоретиздат, 1955.
2. И ш л и н с к и й А. Ю. Общая теория пластичности с линейным упрочнением. Укр. математ. ж., 1954, т. 6, № 3.
3. К а д а ш е в и ч Ю. И. и Н о в о ж и л о в В. В. Теория пластичности, учитывающая остаточные микронапряжения. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 1.

УДАР ДИСКА ПО ПОВЕРХНОСТИ ИДЕАЛЬНОЙ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

В. Б. Поручиков (Москва)

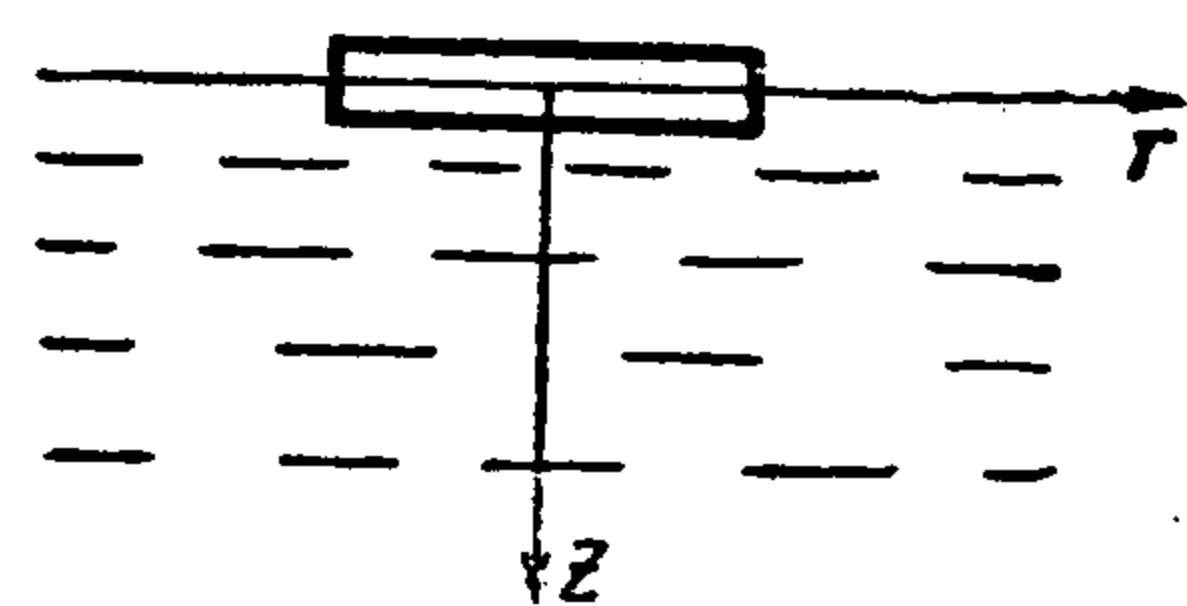
Рассматривается осесимметрическая задача об ударе абсолютно жесткого диска по поверхности идеальной сжимаемой жидкости. Эта задача возникает в связи с проблемой входа тупых тел в жидкость, когда в начальный промежуток времени тело испытывает большие перегрузки. В настоящей работе методом интегральных преобразований ищется решение задачи при $0 \leq t < a/c_0$. Полученное, до 2-го приближения включительно, асимптотическое решение сравнивается с результатом точного решения плоской задачи [1,2].

§ 1. Пусть в момент $t = 0$ происходит удар абсолютно жесткого диска радиуса a по свободной поверхности идеальной сжимаемой жидкости, занимающей нижнее полупространство $z > 0$ (фиг. 1). Предполагается, что начальная скорость диска $v_0 \ll c_0$. Здесь c_0 — скорость звука невозмущенной жидкости. При этих условиях, как нетрудно показать, для начального промежутка времени $\Delta t \sim a/c_0$, когда существенна сжимаемость жидкости, задача будет линейной и описывается в цилиндрической системе безразмерных координат $r_1 z_1$ следующим уравнением и условиями:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r_1^2} + \frac{\partial \varphi}{r_1 \partial r_1} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_1^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} \quad (1.1)$$

$$\varphi = 0 \quad \text{при } r_1 > 1, \quad z_1 = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z_1} = v(\tau) a \quad \text{при } 0 \leq r_1 < 1, \quad z_1 = 0$$

$$\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = 0 \quad \text{при } \tau = 0, \quad \tau = \frac{c_0 t}{a}, \quad r_1 = \frac{r}{a}, \quad z_1 = \frac{z}{a}$$



Фиг. 1