ОБ ОЦЕНКЕ ОШИБКИ, СОВЕРШАЕМОЙ ПРИ ПЕРЕХОДЕ ОТ ТОЧНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ К УРАВНЕНИЯМ ПЛОСКОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

Р. Л. Салганик (Москва)

Для тонких тел (оболочек и пластинок) трехмерные уравнения теории упругости сводят к приближенным двумерным. Оценку получающейся при этом ошибки обычно находят из сопоставления данного приближения со следующим. Полученные этим способом оценки выражаются в виде некоторой степени относительной толщины.

Такие оценки для пластин получены символическим методом в работе [1] и асимптотическим методом в работе [2].

Проведенные в работах [3,4] исследования, основанные на первом методе, показали, что для некоторых краевых задач не происходит предсказываемого этими оценками повышения точности при переходе от приближения Кирхгофа — Лява к следующим приближениям, причем вклад от следующих приближений может быть больше, чем от предыдущих,т.е.этот метод может приводить к занижению ошибки. В предлагаемой работе на примере уравнений плоского напряженного состояния показано, в чем может заключаться причина такого занижения. Для этих уравнений оценка получена путем сопоставления с точными решениями известного класса [5], которые проще всего получаются при помощи разложения вектора смещения по многочленам Лежандра [6]. Применение такого разложения к выводу приближенных уравнений оказывается полезным для разных целей [4,7].

Характерная особенность полученного результата заключается в том, что оценка умножается на логарифм относительной толщины, который сильно снижает точность. Не исключено, что такой растущий с уменьшением толщины множитель должен быть и в других случаях, но не обнаруживается при оценках, получаемых из сопоставления данного и следующего приближения вследствие того, что в этих приближениях вид зависимости от относительной толщины предписывается заранее.

§ 1. **Основные соотношения.** Рассмотрим плоскую пластинку толщины $2h$, ограниченную цилиндрической поверхностью, перпендикулярной плоскости пластинки. Плоскость декартовых координат x_1, x_2 проведем через середину пластинки и введем безразмерные координаты $\xi_i = x_i / h$ $(i = 1, 2, 3)$.

В координатах ξ_i боковую границу обозначим через Γ, линию ее пересечения с плоскостью ξ_1, ξ_2 — через γ, трехмерную область, занимаемую пластинкой,— через Ω. Считая смещения малыми, сравнительно с толщиной пластинки, запишем уравнения теории упругости в виде

$$(\lambda + \mu)\frac{\partial\theta}{\partial\xi_i} + \mu\Delta u_i = 0, \qquad \theta = \frac{\partial u_i}{\partial\xi_i} \tag{1.1}$$

Здесь λ и μ — коэффициенты Ляме, $\{u_i\}$ — вектор смещения, и, как всегда, подразумевается суммирование по немым индексам.

Нетрудно видеть, что если вектор смещения $\{u_i\}$ представить разложением

$$u_i = \sum_{r=0}^{2} u_{ir}(\xi_1, \xi_2) P_r(\xi_3) \tag{1.2}$$

где $P_r(z)$ — r-й многочлен Лежандра ($P_0 = 1$, $P_1 = z$, $P_2 = (3z^2 - 1)/2$), то он будет точно удовлетворять уравнениям (1.1) при

$$(\lambda^* + \mu)\frac{\partial\theta_0}{\partial\xi_\alpha} + \mu\Delta_2 u_{\alpha 0} = 0, \qquad \theta_0 = \frac{\partial u_{\alpha 0}}{\partial\xi_\alpha}, \qquad \lambda^* = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} \tag{1.3}$$

$$u_{\alpha 2} = \frac{\lambda}{3(\lambda + 2\mu)}\frac{\partial\theta_0}{\partial\xi_\alpha}, \qquad u_{31} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\theta_0, \qquad u_{30} = u_{32} = u_{\alpha 1} = 0 \tag{1.4}$$

Здесь и в дальнейшем тензорные индексы, обозначенные греческими буквами, пробегают значения 1, 2; причем Δ_2 — двумерный оператор Лапласа. Кроме того, определенный равенствами (1.3), (1.4) вектор смещения удовлетворяет условию обращения в нуль нагрузок на плоскостях $\xi_3 = \pm 1$.

Уравнения (1.3), которым удовлетворяют главные члены разложения (1.2) вектора смещения, представляют уравнения плоского напряженного состояния. Пользуясь их решением, можно вычислить по формулам (1.4) величины u_{31}, $u_{\alpha 2}$ и, как будет показано, по этим величинам оценить ошибку.

Для сравнения естественно выбрать точное решение трехмерных уравнений теории упругости u_i^* с условиями на Г, не зависящими от ξ_3, и равными нулю либо поперечной компонентой смещения u_3^*, либо поперечной составляющей нагрузки; при этом нагрузки на плоскостях $\xi_3 = \pm 1$ отсутствуют.

Для определенности предположим, что на Г заданы смещения

$$u_\alpha^* |_\Gamma = \varphi_\alpha (\xi_1, \xi_2), \qquad u_3^* |_\Gamma = 0 \tag{1.5}$$

Случаи с другими граничными условиями рассматриваются аналогично.

§ 2. Оценка ошибки. 1°. Приближенный для задачи (1.1), (1.5) вектор u_i, определяемый разложением (1.2) и соотношениями (1.3) — (1.4), найдем из условия

$$u_{\alpha 0} |_\gamma = \varphi_\alpha (\xi_1, \xi_2) \tag{2.1}$$

которым, очевидно, этот вектор определяется однозначно.

Составим разность $\delta u_i = u_i - u_i^*$. Эта разность удовлетворяет трехмерным уравнениям теории упругости (1.1), условию обращения в нуль нагрузок на плоскостях $\xi_3 = \pm 1$ и следующим условиям на Г

$$\delta u_\alpha |_\Gamma = u_{\alpha 2} |_\gamma P_2 (\xi_3) = \frac{\lambda}{3(\lambda + 2\mu)} \left(\frac{\partial \theta_0}{\partial \xi_\alpha}\right)_\gamma P_2 (\xi_3) \tag{2.2}$$

$$\delta u_3 |_\Gamma = u_{31} |_\gamma P_1 (\xi_3) = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \theta_0 |_\gamma P_1 (\xi_3)$$

2°. Рассмотрим сначала ограниченную пластинку без отверстий. Ее продольный размер L будем считать по всем направлениям одного порядка и сильно превышающим толщину пластинки $2h$, т. е. $(L / h) = \Lambda \gg 1$. Продолжим пластинку за пределы Г до бесконечности и сохраним на Г смещения δu_i, определяемые условиями (2.2). Эти смещения гладко продолжим за Г так, чтобы они обращались в нуль на расстоянии от Г порядка *1* и обеспечивали равенство нулю нагрузок на плоскостях $\xi_3 = \pm 1$.

Решение для δu_i в Ω при этом останется прежним, но во всей бесконечной пластинке вектор δu_i будет удовлетворять неоднородным уравнениям

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \delta\theta}{\partial \xi_i} + \mu \Delta \delta u_i = f_i, \qquad \delta\theta = \frac{\partial \delta u_i}{\partial \xi_i} \tag{2.3}$$

в которых объемные силы — f_i отличны от нуля только в примыкающей к Г узкой области D, поперечный размер которой порядка 1. Из того, что смещения δu_i за пределами Г сведены к нулю плавно на расстоянии от Г порядка 1, и вида их зависимости от ξ_3 на Г следует, что после двойного дифференцирования по ξ_3 их порядок не меняется. Поэтому, принимая во внимание (2.2) и (2.3), для порядка f_i получаем

$$f_i = O \left\{ \max \left[\theta_0, \frac{\partial \theta_0}{\partial \xi_\alpha}, \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial \xi_\alpha \partial \xi_\beta}, \frac{\partial^3 \theta_0}{\partial \xi_\alpha \partial \xi_\beta \partial \xi_\gamma} \right]_\gamma \right\} \tag{2.4}$$

Используя тензор Грина для бесконечной пластинки, из (2.3) получаем

$$\delta u_i (P) = \int_D G_{ik} (P, Q) f_k (Q) \, d\Omega_Q \tag{2.5}$$

Здесь P и Q — точки пластинки, причем P — произвольна, а Q принадлежит узкой области D, в которой силы f_k отличны от нуля.

Компоненты тензора Грина $G_{ik} (P, Q)$ (см., например, [5]) при фиксированном k образуют вектор смещения в точке P, удовлетворяющий условию обращения в нуль нагрузок на плоскостях $\xi_3 = \pm 1$ и уравнениям равновесия с единичной объемной силой, приложенной в точке Q и направленной по k-й оси. Так как в точке Q компоненты G_{ik} имеют достаточно слабую особенность (типа $1/\rho$, где ρ — расстояние от P до Q), то G_{ik}^2 интегрируемы, и к (2.5) можно применить неравенство Коши — Буняковского. Это дает

$$|\delta u_i(P)| \leqslant \left(\int_D \sum_{k=1}^{3} G_{ik}^2(P, Q)\, d\Omega_Q\right)^{1/2} \left(\int_D \sum_{k=1}^{3} f_k^2(Q)\, d\Omega_Q\right)^{1/2} \tag{2.6}$$

Для тензора G_{ik} в рассматриваемом случае бесконечной пластинки можно было бы написать явное выражение [8], но в этом нет необходимости.

В самом деле, так как плоскости $\xi_3 = \pm 1$ свободны от нагрузок, то приложенная в точке Q сила, порождающая G_{ik}, уравновешивается напряжениями на произвольной поверхности, охватывающей точку Q. Пусть это будет прямой круговой цилиндр с осью, проходящей через Q. Длина его окружности увеличивается пропорционально ρ. Поэтому действующие на его поверхности напряжения убывают обратно пропорционально ρ.

Если $k = 1, 2$, то сосредоточенная в точке Q сила направлена вдоль пластинки и уравновешивается напряжениями $\sigma_{\alpha\beta}$. В выражении для этих напряжений по ξ_3 дифференцируется только G_{3k}. Так как дифференцирование по ξ_3 не изменяет порядка, то G_{3k} будет убывать как ρ^{-1}. Остальные компоненты смещения в выражениях для $\sigma_{\alpha\beta}$ дифференцируются вдоль пластинки, и из того, что продольные производные от них убывают как ρ^{-1}, следует, что сами эти величины возрастают как $\ln \rho$. Это вполне согласуется с тем, что, когда сосредоточенная сила направлена вдоль пластинки, упругое поле на бесконечности стремится к плоскому, для которого логарифмическое возрастание смещений в случае действия сосредоточенной силы — хорошо известный результат.

При $k = 3$ сосредоточенная сила направлена поперек пластинки, и аналогично можно показать, что в этом случае логарифмически возрастать будет G_{3k}, а убывать (как ρ^{-1}) — $G_{\alpha k}$. Поэтому при $\rho \to \infty$

$$\sum_{k=1}^{3} G_{ik}^2(P, Q) = O(\ln^2 \rho) \tag{2.7}$$

Если теперь брать в (2.6) точку $P = P^*$ вблизи середины пластинки, то, учитывая, что безразмерная протяженность пластинки $\Lambda = L/h$ много больше единицы, можно воспользоваться оценкой (2.7). Подставляя в (2.6) эту оценку, оценку (2.4) для f_k и учитывая, что поперечный размер области D порядка 1, а ее протяженность порядка Λ, находим

$$\delta u_i(P^*) = O\left\{(\Lambda \ln \Lambda) \max \left[\theta_0, \frac{\partial \theta_0}{\partial \xi_\alpha}, \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial \xi_\alpha \partial \xi_\beta}, \frac{\partial^3 \theta_0}{\partial \xi_\alpha \partial \xi_\beta \partial \xi_\gamma}\right]_\gamma\right\} \tag{2.8}$$

Этот результат сохраняется также, когда на Γ заданы нагрузки или когда на одной части Γ заданы нагрузки, а на другой — смещения, причем граничные условия не зависят от ξ_3, и в соответствующих местах Γ равны нулю либо поперечная сила, либо поперечное смещение.

Таким образом, если решение задачи о плоском напряженном состоянии известно, то, вычисляя на контуре величину θ_0 и все ее производные до третьего порядка, можно по (2.8) оценить ошибку в смещениях в средней части пластинки. Отметим, что оценка (2.8), будучи общей, может быть сильно завышенной (например, для использованного класса точных решений), но она не может быть улучшена, так как для решений, отвечающих случаю $f_k(Q) = \mathrm{const} \cdot G_{ik}(P, Q)$, когда в (2.6) осуществляется равенство, она достигается точно.

3°. Рассмотрим теперь бесконечную пластинку с отверстиями. Продолжая пластинку внутрь отверстий, а в остальном поступая аналогично тому, как было описано, придем к формуле (2.5) и неравенству (2.6), в которых теперь под D нужно понимать «$O(1)$ — окрестность» всех отверстий. Вычисляя ошибку δu_i в точках $P = P^{**}$, расположенных на больших расстояниях от отверстий ($\Lambda = (L/h) \gg 1$), получим оценку (2.8), в которой Λ перед логарифмом нужно отбросить, так как теперь размеры области D от Λ не зависят. Эта оценка тоже не может быть улучшена. Отсюда следует, что по мере удаления от отверстий ошибка в смещениях, вообще говоря, логарифмически возрастает.

Автор благодарен Г. И. Баренблатту и С. С. Григоряну за внимание к работе и ценное обсуждение, а также А. Л. Гольденвейзеру за консультацию и полезные замечания, сделанные при рецензировании работы.

Поступила 8 II 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А. И. К теории толстых плит. ПММ, 1942, т. VI, вып. 5 (см. также [8]).
2. Гольденвейзер А. Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 4.
3. Нигул У. К. О применении символического метода А. И. Лурье к анализу напряженных состояний двумерных теорий упругих плит. ПММ, 1963, т. XXVII, вып. 3.
4. Нигул У. К. О приближенном учете краевых эффектов типа Сен-Венана в задачах статики плит. ПММ, 1964, т. 28, вып. 1.
5. Ляв А. Математическая теория упругости. ОНТИ, 1935.
6. Векуа И. Н. Об одном методе расчета призматических оболочек. Тр. Тбилисск. матем. ин-та им. А. М. Размадзе, 1955, т. XXI.
7. Понятовский В. В. К теории пластин средней толщины. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 2.
8. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. Гостехиздат, 1955.

О ФУНКЦИЯХ НАГРУЖЕНИЯ АНИЗОТРОПНО УПРОЧНЯЮЩЕГОСЯ ПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА

Г. И. Быковцев, В. В. Дудукаленко, Д. Д. Ивлев

(Воронеж)

1. Предположим, что функция нагружения упрочняющегося пластического материала полностью определяется напряженным и деформированным состоянием материала

$$f(\sigma_{ij}, e_{ij}^p) = 0 \qquad (1.1)$$

где σ_{ij} — компоненты напряженного состояния, e_{ij}^p — компоненты пластической деформации.

Предположим, что данный путь нагружения приводит к определенному деформированному состоянию независимо от ориентации тела относительно некоторой декартовой системы координат x, y, z. Тогда функция нагружения (1.1) может зависеть лишь от инвариантов напряженного и деформированного состояния. Инвариантами напряженного и деформированного состояния будут инварианты тензоров σ_{ij}, e_{ij}^p, а также совместные инварианты этих тензоров.

Известно (например, [1]), что число основных, базисных инвариантов, через которые могут быть выражены все инварианты тензоров σ_{ij}, e_{ij}^p (в том числе и совместные) равно девяти. Это обстоятельство соответствует тому факту, что данное напряженное и деформированное состояние полностью определяется шестью величинами главных компонент напряженного и деформированного состояния, а также тремя независимыми величинами, характеризующими взаимную ориентацию главных направлений тензоров σ_{ij} и e_{ij}^p.

Таким образом, можно записать

$$f(\sigma_i, e_i^p, \alpha, \beta, \gamma) = 0 \qquad (i = 1, 2, 3) \qquad (1.2)$$

где σ_i, e_i^p — главные компоненты тензора напряжений и пластических деформаций; α, β, γ — три величины, например эйлеровы углы, характеризующие взаимную ориентацию главных направлений σ_i и e_i^p.