СЖАТИЕ УПРУГОГО ШАРА С НЕКОНЦЕНТРИЧЕСКОЙ ШАРОВОЙ ПОЛОСТЬЮ

Р. Н. Кауфман (Новосибирск)

При помощи решений статического уравнения теории упругости [1]

$$\triangle \mathbf{u} + \frac{1}{1-2\sigma}\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0 \qquad \begin{pmatrix}\mathbf{u} \text{ — вектор смещения} \\ \sigma \text{ — коэффициент Пуассона}\end{pmatrix}$$

решается задача, указанная в заглавии. При этом потребовалось найти новые формулы преобразования решений уравнения (0.1) от одного центра к другому (формулы переноса), отсутствующие в [1]. Решение краевой задачи ищется в виде рядов с неизвестными коэффициентами, для нахождения которых получается, как и в [1], бесконечная система линейных алгебраических уравнений [2].

§ 1. Будем пользоваться следующими осесимметрическими решениями из работы [1]: так называемыми внешними решениями $\mathbf{u}_{l0}$ и $\mathbf{v}_{l0}$ и внутренними $\mathbf{p}_{l_0}$ и $\mathbf{q}_{l_0}$. Они имеют вид (r и θ — сферические координаты, $\mathbf{e}_r$ и $\mathbf{e}_\theta$ — соответствующие орты)

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_{l0}(r,\theta) &= r^{-l}\left[\beta_l P_l(\cos\theta)\,\mathbf{e}_r + \delta_l \frac{\partial}{\partial\theta} P_l(\cos\theta)\,\mathbf{e}_\theta\right] && (l = 1, 2, \ldots) \\
\mathbf{v}_{l0}(r, 0) &= r^{-(l+2)}\left[P_l(\cos\theta)\,\mathbf{e}_r - \frac{1}{l+1}\frac{\partial}{\partial\theta} P_l(\cos\theta)\,\mathbf{e}_\theta\right] && (l = 0, 1, 2, \ldots) \\
\mathbf{p}_{l0}(r,\theta) &= r^{l+1}\left[d_l P_l(\cos\theta)\,\mathbf{e}_r - \gamma_l \frac{\partial}{\partial\theta} P_l(\cos\theta)\,\mathbf{e}_\theta\right] && (l = 0, 1, 2, \ldots) \\
\mathbf{q}_{l0}(r,\theta) &= r^{l-1}\left[P_l(\cos\theta)\,\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} P_l(\cos\theta)\,\mathbf{e}_\theta\right] && (l = 1, 2, \ldots)
\end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь P_l — нормированные полиномы Лежандра

$$\begin{aligned}
&\alpha_l = \frac{2\rho - (1-\rho)\,l}{2l+3}, \qquad \beta_l = \frac{(\rho-1)\,l - (\rho+1)}{2l-1} \qquad \left(\rho = \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)}\right) \\
&\gamma_l = \frac{(1-\rho)\,l + 3 - \rho}{(2l+3)(l+1)}, \qquad \delta_l = \frac{l^2(1-\rho) - l(1+\rho) - 2}{(2l-1)\,l\,(l+1)}
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Формулы переноса для внешних решений [1], выражающие их через внешние же, и формулы переноса для внутренних находятся аналогично тому, как это делалось в [1], но при этом используются следующие формулы переноса для шаровых функций (см. [3]) (фиг. 1)

$$\frac{P_l(\cos\theta_2)}{r_2^{\,l+1}} = \sum_{k=l}^{\infty} \frac{P_k(\cos\theta_1)}{r_1^{\,k+1}}\, d^{k-l}\, \frac{k!}{l!\,(k-l)!} \qquad (r_1 > d)$$

$$r^1 P_l(\cos\theta_1) = \sum_{k=0}^{l} r_2^{\,k} P_k(\cos\theta_2)\, d^{l-k}\, \frac{l!}{k\,(l-k)!}$$

В результате имеем

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_{l0}(r_2,\theta_2) &= \sum_{k=l}^{\infty} d^{k-l}\pi_{lk}\mathbf{u}_{k0}(r_1,\theta_1) + \sum_{k=l-1}^{\infty} d^{k-l+2}\rho_{lk}\mathbf{v}_{k0}(r_1,\theta_1) && (r_1 > d) \\
\mathbf{v}_{l0}(r_2,\theta_2) &= \sum_{k=l}^{\infty} d^{k-l}\,\nu_{lk}\mathbf{v}_{k0}(r_1,\theta_1) && (r_1 > d)
\end{aligned} \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}_{l0}(r_1,\theta_1) &= \sum_{k=1}^{l} \varkappa_{lk} d^{l-k}\mathbf{q}_{k0}(r_2,\theta_2) \\
\mathbf{p}_{l0}(r_1,\theta_1) &= \sum_{k=0}^{l} \psi_{lk} d^{l-k}\mathbf{p}_{k0}(r_2,\theta_2) + \sum_{k=1}^{l+1} \omega_{lk} d^{l-k+2}\mathbf{q}_{k0}(r_2,\theta_2)
\end{aligned} \tag{1.4}$$

[1] Эти формулы выведены Ц. А. Капелян.

где

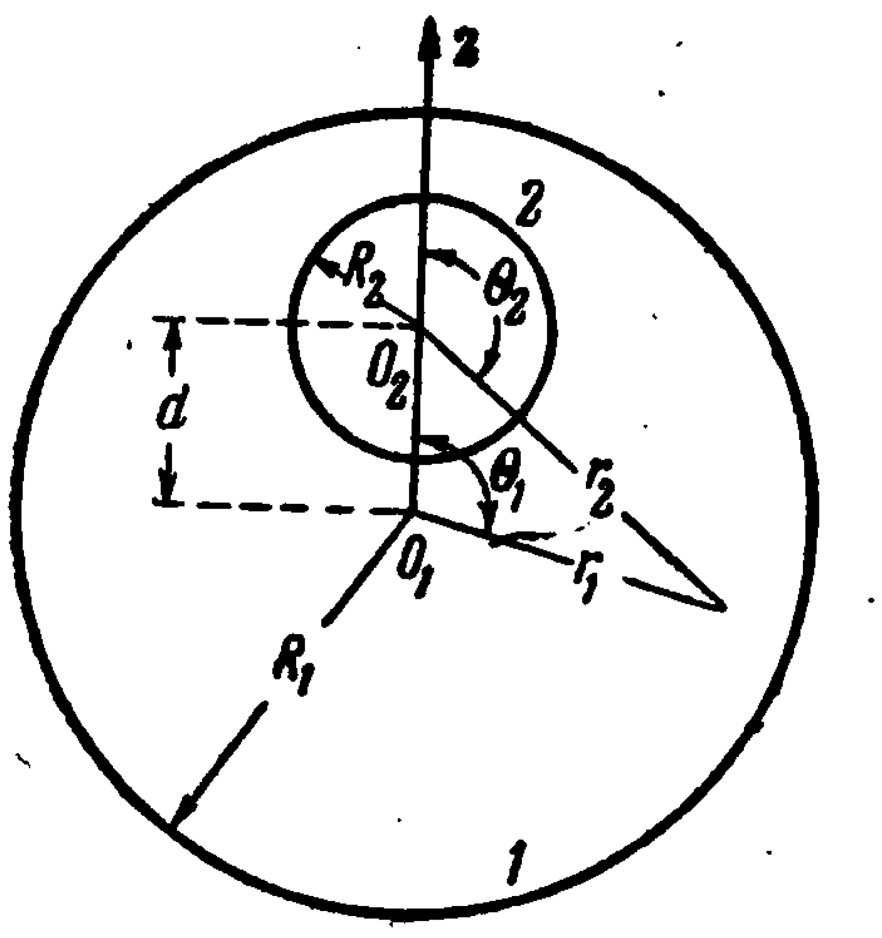
$$\pi_{lk}=\frac{k!}{l!\,(k-l)!},\quad \varkappa_{lk}=\frac{(l+1)!}{(k-1)!\,(l-k)!},\quad \nu_{lk}=\frac{(k+1)!}{(l+1)!\,(k-l)!},\quad \psi_{lk}=\frac{l!}{k!\,(l-k)!}$$

$$\rho_{lk}=\frac{(k+1)!}{l!\,(k-l+1)!}\left[\frac{(1-\rho)(2kl+5l+k+3)}{(2l+1)(2k-5)}+\frac{2l(\rho l+l+1)}{(4l^2-1)(k-l+2)}+\right.$$
$$\left.+\frac{2(\rho k+2\rho+k+3)(k+2)}{(k-l+2)(4k^2+16k+15)}\right]$$

$$\omega_{lk}=\frac{l!}{(k-1)!\,(l-k+1)!}\left[\frac{(\rho-1)(2lk-3l+k-1)}{(2l+1)(2k+3)}+\right.$$
$$\left.+\frac{2(l+1)(\rho l+l+\rho)}{(2l+3)(2l+1)(l-k+2)}-\frac{2(\rho k-k-\rho-2)(k-1)}{(2k-1)(2k-3)(l-k+2)}\right]$$

§ 2. Рассмотрим краевую задачу статической теории упругости для шара с неконцентрической шаровой полостью (фиг. 1) со следующими граничными условиями в сферических координатах.

На сфере *1* (равномерное сжатие шара заданной нормальной силой):



$$\sigma_{rr}=\mathrm{const}=p,\qquad \sigma_{r\theta}=\sigma_{r\varphi}=0 \tag{2.1}$$

на сфере *2* (свободная поверхность):

$$\sigma_{rr}=\sigma_{r\theta}=\sigma_{r\varphi}=0 \tag{2.2}$$

Учитывая осевую симметрию задачи, будем искать решение (вектор смещения) в виде

$$\mathbf{u}=\sum_{l=0}^{\infty}A_l\frac{\mathbf{p}_{l0}(r_1,\theta_1)}{R_1^{\,l}}+\sum_{l=1}^{\infty}B_l\frac{\mathbf{q}_{l0}(r_1,\theta_1)}{R_1^{\,l-2}}+$$
$$+\sum_{l=1}^{\infty}c_lR_2^{\,l+1}\mathbf{u}_{l0}(r_2,\theta_2)+\sum_{l=0}^{\infty}D_lR_2^{\,l+3}\mathbf{v}_{l0}(r_2,\theta_2) \tag{2.3}$$

Замечание. Коэффициенты при $\mathbf{u}_{00}$ и $\mathbf{q}_{00}$ полагаем равными нулю, так как у этих решений обращается в нуль знаменатель.

Потребуем выполнения граничных условий (при этом заметим, что для осесимметрических решений $\sigma_{r\varphi}\equiv 0$).

Для того чтобы удовлетворить граничным условиям на сфере *1*, приведем $\mathbf{u}$ полностью к переменным r_1 и θ_1. Используя формулы переноса (1.3) и меняя порядок суммирования, получим

$$\mathbf{u}(r_1,\theta_1)=\sum_{k=0}^{k}A_k\frac{\mathbf{p}_{k0}(r_1,\theta_1)}{R_1^{\,k}}+\sum_{k=1}^{\infty}B_k\frac{\mathbf{q}_{k0}(r_1,\theta_1)}{R_1^{\,k-2}}+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{u}_{k0}(r_1,\theta_1)\sum_{l=1}^{k}d^{k-l}\pi_{lk}R_2^{\,l+1}C_l+\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{v}_{k0}(r_1,\theta_1)\sum_{l=0}^{k}d^{k-l}\nu_{lk}R_2^{\,l+3}D_l\qquad (r_1>d) \tag{2.4}$$

Потребуем теперь, чтобы

$$\sigma_{rr}=p,\qquad \sigma_{r\theta}=0\qquad \text{при } r_1=R_1 \tag{2.5}$$

где σ_{rr} и $\sigma_{r\theta}$ вычисляем по известным формулам (E — модуль упругости):

$$\sigma_{rr}=\frac{E}{1+\sigma}\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{\sigma}{1-2\sigma}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}\right),\qquad \sigma_{r\theta}=\frac{1}{2}\,\frac{E}{1+\sigma}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r}-\frac{u_\theta}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}\right) \tag{2.6}$$

Замечая, что [1]

$$\operatorname{div} \mathbf{u}_{l0} = \frac{P_l}{r^{l+1}}, \qquad \operatorname{div} \mathbf{v}_{l0} = 0, \qquad \operatorname{div} \mathbf{p}_{l0} = P_l r^l, \qquad \operatorname{div} \mathbf{q}_{l0} = 0 \tag{2.7}$$

и используя (1.1), (2.6) и (2.7), из граничных условий (2.5) получим

$$\frac{1}{k+2}\left[(k+1)\alpha k + \frac{\sigma}{1-2\sigma}\right]A_k + \frac{k-1}{k-2}B_k + \sum_{l=1}^{k}\frac{1}{k+2}\left(\frac{\sigma}{1-2\sigma} - k\beta_k\right)\times$$
$$\times \frac{d^{k-l}R_2^{l+1}}{R_1^{k+1}}\pi_{lk}C_l - \sum_{l=0}^{k}\frac{d^{k-l}R_2^{l+1}}{R_1^{l+3}}\nu_{lk}D_l = b_k \tag{2.8}$$

$$\frac{k^2(\rho-1) + 2k(\rho-1) + \rho}{(2k+3)(k+1)}A_k + \frac{k-1}{k}B_k + \sum_{l=1}^{k}\frac{(\rho-1)k^2+1}{k(2k-1)}\frac{d^{k-l}R_2^{l+1}}{R_1^{k+1}}\pi_{lk}C_l +$$
$$+ \sum_{l=0}^{k}\frac{1}{2}\frac{k+2}{k+1}\frac{d^{k-l}R_2^{l+3}}{R_1^{k+3}}\nu_{lk}D_l = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

где

$$b_k = \frac{(1+\sigma)p}{E(k+2)}\delta_{k0} \qquad (\delta_{k0} = 0, \text{ если } k \neq 0, \ \delta_{00} = 1) \tag{2.9}$$

Поступая аналогичным образом (при этом используются формулы переноса (1.4)), из граничных условий на сфере 2

$$\sigma_{rr} = \sigma_{r\theta} = 0 \quad \text{при } r_2 = R_2 \tag{2.10}$$

получаем

$$\frac{1}{k+2}\left(\frac{\sigma}{1-2\sigma} - k\beta_k\right)C_k - D_k + \sum_{l=k}^{\infty}\frac{1}{k+2}\left[(k+1)\alpha_k + \frac{\sigma}{1-1\sigma}\right]\times$$
$$\times \frac{d^{l-k}}{R_1^l R_2^{-k}}\psi_{lk}A_l + \sum_{l=k-1}^{\infty}\frac{(k-1)}{(k+2)}\frac{d^{l-k+2}}{R_1^l R_2^{-(k-2)}}\omega_{lk}A_l + \sum_{l=k}^{\infty}\frac{(k-1)d^{l-k}}{(k+2)R_1^{l-2}R_2^{-(k-2)}}\varkappa_{lk}B_l = 0 \tag{2.11}$$

$$\frac{[(\rho-1)k^2+1]}{k(2k-1)}C_k + \frac{1}{2}\frac{k+2}{k+1}D_k + \sum_{l=k}^{\infty}\frac{k^2(\rho-1)+2k(\rho-1)+\rho}{(2k+3)(k+1)}\frac{d^{l-k}}{R_1^l R_2^{-k}}A_l\psi_{lk} +$$
$$+ \sum_{l=k-1}^{\infty}\frac{k-1}{k}\frac{d^{l-k+2}}{R_1^l R_2^{-(k-2)}}\omega_{lk}A_l + \sum_{l=k}^{\infty}\frac{(k-1)d^{l-k}}{kR_1^{l-2}R_2^{-(k-2)}}\varkappa_{lk}B_l = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

Формулы (2.8) и (2.11) дают бесконечную систему линейных алгебраических уравнений для нахождения неизвестных коэффициентов A_l, B_l, C_l и D_l.

Замечание 1. Чтобы получить уравнения, соответствующие $k = 0$, нужно в системе положить $k = 0$, отбросив при этом выражения, теряющие смысл при $k = 0$. При этом нужно учесть, что с самого начала положили $B_0 = C_0 = 0$ (см. замечание после (2.3)).

Замечание 2. Легко видеть, что система (2.8), (2.11) не содержит коэффициента B_1, ибо множители при нем ($k = 1$) обращаются в нуль. Выбирая B_1 по произволу, получим решения по формуле (2.3), отличающиеся на постоянный вектор, ибо B_1 — коэффициент при $\mathbf{q}_{10} \equiv \text{const}$ (из (1.1) следует, что $\mathbf{q}_{10} = \mathbf{e}_z$). Это обстоятельство согласуется с тем, что решение поставленной краевой задачи единственно с точностью до постоянного слагаемого.

Обозначив линейные комбинации коэффициентов A_l, B_l, C_l и D_l, фигурирующие не под знаками сумм, через $z_{4k}, z_{4k+1}, z_{4k+2}, z_{4k+3}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, получим систему канонического вида

$$z_k + \sum_{l=0}^{\infty} c_{kl} z_l = b_k \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{2.12}$$

Покажем, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} c_{kl}^2 < \infty \tag{2.13}$$

Для этого заметим, что (см. [4])

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{k} \frac{k!}{l!\,(k-l)!} u_1^l u_2^{k-l} = \sum_{k=0}^{\infty} (u_1 + u_2)^k < \infty$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=k}^{\infty} \frac{l!}{k!\,(l-k)!} u_1^k u_2^{l-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l_1=0}^{\infty} \frac{(l_1+k)!}{l_1!\,k!} u_1^k u_2^{l_1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u_1^k}{(1-u_2)^{k+1}} < \infty \tag{2.14}$$

если

$$u_1 > 0, \qquad u_2 > 0, \qquad u_1 + u_2 < 1 \tag{2.15}$$

Если обозначить

$$\frac{d}{R_1} = u_1, \qquad \frac{R_2}{R_1} = u_2$$

при этом выполнятся неравенства (2.15), и коэффициенты нашей системы будут отличаться от выражений, стоящих под знаком двойных сумм в равенствах (2.14), только ограниченными множителями. Поэтому и для них

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} |c_{kl}| < \infty$$

Следовательно, выполняется и (2.13). Таким образом, матрица из коэффициентов c_{kl} рассматриваемой системы—вполне непрерывный оператор в гильбертовом пространстве l_2. Свободный член b_k, как это видно из (2.9), также принадлежит этому пространству. Следовательно, для системы (2.8), (2.11) справедлива альтернатива Фредгольма. Но соответствующая однородная система, которая получается при $p = 0$, т. е. при нулевых граничных условиях (см. (2.1) и (2.2)), может иметь, в силу замечания 2, лишь тривиальное решение.

Отсюда следует, что система (2.8), (2.11) имеет единственное ограниченное решение при любых правых частях. Это решение может быть найдено методом усечения, или редукции, а также методом последовательных приближений (см. [4], где доказывается последнее утверждение для аналогичной системы).

Доказательство того, что ряды из (2.3) сходятся и дают решение рассматриваемой краевой задачи, производится подобно тому, как это делалось в работе [1].

Аналогично можно решать для данной области краевые задачи с более общими граничными условиями (см. (2.2) из [1]).

Автор благодарит С. М. Белоносова за предложенную тему и обсуждение работы и А. М. Родова за ценные указания при ее написании.

Поступила 13 IX 1963

Новосибирский университет

ЛИТЕРАТУРА

1. Кауфман Р. Н. Решение некоторых краевых задач статической теории упругости для слоя с шаровой полостью. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 3
2. Канторович Л. В. и Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. Гостехиздат, 1950.
3. Гобсон Е. В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. ИЛ, 1952.
4. Родов А. М. Диэлектрический шар с шаровой полостью в электрическом поле точечного заряда. Уч. зап. БГУ, сер. физ.-мат. 1957, вып. 32.