О СВЯЗИ МЕТОДА РУНГЕ — КУТТА С МЕТОДОМ ПИКАРА

В. М. Гурьянов (Саратов)

Метод Рунге — Кутта численного решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений имеет ярко выраженный итерационный характер. Как установлено в настоящей работе, это явление обусловлено наличием связи метода Рунге — Кутта с методом итераций Пикара. На основе этой связи получается оценка погрешности метода Рунге — Кутта.

1. Пусть дана задача Коши для нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$y_r'(x) = f_r(x; y_1, \ldots, y_n), \qquad y_r(x_0) = y_r^\circ \qquad (r = 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

В дальнейшем используем следующие обозначения:

интегральная форма задачи (1.1)

$$y_r(x) = y_r^\circ + \int_{x_0}^{x} f_r[t; y_1(t), \ldots, y_n(t)]\, dt \qquad (r = 1, \ldots, n) \tag{1.2}$$

приближенное решение уравнения (1.2), полученное методом Пикара после выполнения s итераций

$$y_{r,s}(x) = y_r^\circ + \int_{x_0}^{x} f_r[t_s; y_{1,s-1}(t_s), \ldots, y_{n,s-1}(t_s)]\, dt_s \qquad (r = 1, \ldots, n) \tag{1.3}$$

приближенное решение задачи (1.1) методом Рунге — Кутта

$$Y_{r,s}(x) = y_r^\circ + h \sum_{i=1}^{s} \beta_{r,i} k_{r,i} \qquad (r = 1, \ldots, n) \tag{1.4}$$

Здесь

$$k_{r,i} = h f_r\left\{x_0 + \alpha_{r,i} h;\ y_1^\circ + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{r,i,1,j} k_{1,j}, \ldots, y_n^\circ + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{r,i,n,j} k_{n,j}\right\} \tag{1.5}$$

$$h = x - x_0,\ \alpha_{r,1} = 0;\ \alpha_{r,i},\quad \beta_{r,i,j,k} = \text{const} \quad (r = 1, \ldots, n), \quad (i = 1, \ldots, s),$$

Докажем теорему о связи метода Рунге — Кутта с методом Пикара.

Теорема 1. Решение задачи (1.1) методом Рунге — Кутта (1.4) получается из решения задачи (1.2) методом Пикара (1.3) путем последовательной замены интегралов в (1.3) численными квадратурами.

Доказательство. За нулевое приближение в (1.3) примем $y_{r,0}(x) = y_r^\circ$ и разобьем отрезок интегрирования $[x_0, x]$ для каждого равенства (1.3) своим способом на s отрезков точками

$$x_0 + \alpha_{r,i} h \qquad (i = 1, 2, \ldots, s + 1)$$

приняв $\alpha_{r,1} = 0$ и $\alpha_{r,s+1} = 1$. Воспользуемся приближенной формулой

$$\int_{x_0+\alpha_{r,i}h}^{x_0+\alpha_{r,i+1}h} F(x)\, dx \approx \beta h F(x_0 + \alpha_{r,i} h) \tag{1.6}$$

Согласно изложенному, имеем

$$y_{l,k}(x_0 + \alpha_{r,i} h) = y_l^\circ + \int_{x_0}^{x_0+\alpha_{r,i}h} f_l[t_k; y_{1,k-1}(t_k), \ldots, y_{n,k-1}(t_k)]\, dt_k = \tag{1.7}$$

$$= y_l^\circ + \sum_{j=1}^{i-1} \int_{x_0+\alpha_{r,j}h}^{x_0-\alpha_{r,j+1}h} f_l[t_k; y_{1,k-1}(t_k), \ldots, y_{n,k-1}(t_k)]\, dt_k \approx Y_{l,k}(x_0 + \alpha_{r,i} h) =$$

$$= y_l^\circ + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{r,i,l,j} h f_l[x_0 + \alpha_{r,j} h];\quad Y_{1,k-1}(x_0 + \alpha_{r,j} h), \ldots, Y_{n,k-1}(x_0 + \alpha_{r,j} h)]$$

Здесь $Y_{l,k}(x_0+\alpha_{r,i}h)$ — приближенное значение $y_{l,k}(x_0+\alpha_{r,i}h)$, $r=1,2,\ldots,n$; $l=1,2,\ldots,n$; $k=1,2,\ldots,s$; $i=1,2,\ldots,s+1$; $Y_{r,0}=y_{r,0}=y_r^\circ$, символ суммы при $j=1$ понимается как отсутствие членов, находящихся под таким знаком.

Заметив, что

$$Y_{l,k}(x_0+\alpha_1 h)=Y_{l,k}(x_0)=y_{l,0}\qquad (l=1,2,\ldots,n;\ k=0,1,\ldots,s)\tag{1.8}$$

докажем справедливость равенства

$$Y_{l,s-1}(x_0+\alpha_{r,i}h)=Y_{l,s-2}(x_0+\alpha_{r,i}h)\qquad \begin{pmatrix}l=1,2,\ldots,n\\ r=1,2,\ldots,n\end{pmatrix}\tag{1.9}$$

для $i=1,2,\ldots,s-1$.

Для сокращения письма будем опускать внутри f аргумент у $Y_{i,j}$ и снабдим Y индексом σ, полагая, что одновременно он заменяет $s-1$ и $s-2$. Так что выражение $Y_{l,\sigma}$ нужно читать один раз как $Y_{l,s-1}$ и второй раз как $Y_{l,s-2}$.

Теперь распишем (1.7) для $k=s-1$ и $k=s-2$ последовательно по шагам.

1-й шаг

$$Y_{l,\sigma}(x_0+\alpha_{r,i}h)=y_l^\circ+\sum_{j=1}^{i-1}h\beta_{r,i,l,j}f_l\,[x_0+\alpha_{r,j}h;\,Y_{1,\sigma-1},\ldots,Y_{n,\sigma-1}]$$

2-й шаг

$$\begin{aligned}Y_{l,\sigma}(x_0+\alpha_{r,i}h)&=y_l^\circ+\sum_{j=1}^{i-1}h\beta_{r,i,l,j}f_l\Big\{x_0+\alpha_{r,j}h;\,y_1^\circ+\\&+\sum_{k=1}^{j-1}\beta_{r,j,1,k}hf_1\,(x_0+\alpha_{r,k}h;\,Y_{1,\sigma-2},\ldots,Y_{n,\sigma-2}),\ldots,y_n^\circ+\\&+\sum_{k=1}^{j-1}\beta_{r,j,n,k}hf_n\,(x_0+\alpha_{r,k}h;\,Y_{1,\sigma-2},\ldots,Y_{n,\sigma-2})\Big\}\end{aligned}\tag{1.10}$$

Продолжая так расписывать, замечаем, что с каждым шагом количество членов у самых внутренних сумм уменьшается на единицу и также на единицу понижается второй индекс у $Y_{i,j}$. Кроме этого, $Y_{l,s-1}$ отличается от $Y_{l,s-2}$ только Y в самых внутренних суммах.

Из сказанного следует, что самые внутренние суммы $i-1$ шага имеют вид

$$\sum_{l=1}^{1}\beta_{r,2,k,l}hf_k\,(x_0+\alpha_{r,l}h;\,Y_{1,\sigma-i+1},\ldots,Y_{n,\sigma-j+1})=$$

$$=\beta_{r,2,k,1}hf_k\,[x_0+\alpha_{r,1}h;\,Y_{1,\sigma-i+1}(x_0+\alpha_{r,1}h),\ldots,Y_{n,\sigma-i+1}(x_0+\alpha_{r,1}h)]$$

Но, согласно замечанию (1.8),

$$Y_{k,s-i}(x_0+\alpha_{r,1}h)=Y_{k,s-i-1}(x_0+\alpha_{r,1}h)\qquad\begin{pmatrix}k=1,2,\ldots,n\\ i=1,2,\ldots,s-1\end{pmatrix}$$

Таким образом, предложение (1.9) доказано. Запишем (1.3) в виде

$$\begin{aligned}y_{r,s}(x)&=y_{r,s}(x_0+\alpha_{s+1}h)=\qquad (r=1,2,\ldots,n)\\&=y^\circ+\sum_{i=1}^{s}\int\limits_{x_0+\alpha_{r,i}h}^{x_0+\alpha_{r,i+1}h}f_r\,[t_s;\,y_{1,s-1}(t_s),\ldots,y_{n,s-1}(t_s)]\,dt_s\end{aligned}\tag{1.11}$$

Заменив в (1.11) интегралы численными квадратурами в соответствии с (1.6) и (1.7), получим

$$\begin{aligned}y_{r,s}(x)\approx Y_{r,s}(x)&=y_r^\circ+\sum_{i=1}^{s}h\beta_{r,i}f_r\,[x_0+\alpha_{r,i}h;\\Y_{1,s-1}(x_0+\alpha_{r,i}h),\ldots,Y_{n,s-1}(x_0+\alpha_{r,i}h)]&=y_r^\circ+\sum_{i=1}^{s}\beta_{r,i}k_{r,i}\quad(r=1,2,\ldots,n)\end{aligned}\tag{1.12}$$

Ясно, что

$$k_{r,i} = hf_r\,[x_0 + \alpha_{r,i}h;\; Y_{1,s-1}(x_0 + \alpha_{r,i}h), \ldots, Y_{n,s-1}(x_0 + \alpha_{r,i}h)]$$
$$(r = 1, 2, \ldots, n;\; i = 1, 2, \ldots, s) \tag{1.13}$$

или

$$k_{r,i} = hf_r\Big\{x_0 + \alpha_{r,i}h;\; y_1^\circ +$$
$$\sum_{j=1}^{i-1} \beta_{r,i,1,j}hf_1\,[x_0 + \alpha_{r,j}h;\; Y_{1,s-2}(x_0 + \alpha_{r,j}h), \ldots, Y_{n,s-2}(x_0 + \alpha_{r,j}h)], \ldots, y_n^\circ +$$
$$+ \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{r,i,n,j}hf_n\,[x_0 + \alpha_{r,j}h;\; Y_{1,s-2}(x_0 + \alpha_{r,j}h), \ldots Y_{n,s-2}(x_0 + \alpha_{r,j}h)]\Big\}$$

Так как здесь $j \leqslant i - 1 \leqslant s - 1$, то можно воспользоваться соотношениями (1.9) и записать полученное выражение для $k_{r,i}$ в виде

$$k_{r,i} = hf_r\{x_0 + \alpha_{r,i}h;\; y_1^\circ + \tag{1.14}$$
$$+ h\sum_{j=1}^{i-1} \beta_{r,i,1,j}f_1\,[x_0 + \alpha_{r,j}h;\; Y_{1,s-1}(x_0 + \alpha_{r,j}h), \ldots Y_{n,s-1}(x_0 + \alpha_{r,j}h)], \ldots, y_n^\circ +$$
$$+ h\sum_{j=1}^{i-1} \beta_{r,i,n,j}f_n\,[x_0 + \alpha_{r,j}h;\; Y_{1,s-1}(x_0 + \alpha_{r,j}h), \ldots, Y_{n,s-1}(x_0 + \alpha_{r,j}h)]\}$$

или, подставляя (1.13) в (1.14), получаем окончательно

$$k_{r,i} = hf_r\Big(x_0 + \alpha_{r,i}h;\; y_1^\circ + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{r,i,1,j}k_{1,j}, \ldots, y_n^\circ + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{r,i,n,j}k_{n,j}\Big)$$
$$(r = 1, \ldots, n;\quad i = 1, \ldots, s) \tag{1.15}$$

что и требовалось доказать.

2. Переходим к оценке погрешности приближенного решения задачи (1.2) методом итераций Пикара с заменой интегралов численными квадратурами. Так же, как и в п. 1, сделаем s итераций, только за нулевое приближение возьмем вектор-функцию $v(x)$ и будем заменять интегралы численными квадратурами произвольным образом.

Оценка погрешности метода Рунге — Кутта на основании п. 1 будет частным случаем получаемой здесь оценки.

Основные элементы требуемой оценки погрешности получаются при доказательстве теоремы Пикара существования и единственности решения задачи Коши для нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например, [1], стр. 9—16). Однако в упомянутом доказательстве с самого начала вводятся грубые оценки, вследствие чего в некоторых случаях оценка погрешности будет завышенной. В проводимых здесь рассуждениях завышение оценки будет вызываться только существом метода ее получения. В практических случаях с целью упрощения оценки погрешности нужно будет делать ее завыщение в каждом конкретном случае в зависимости от требований, предъявляемых к приближенному решению. Например, в случае решения дифференциального уравнения n-го порядка бывает важно знать и держать в определенных пределах только погрешность искомой функции, а производные от решения не нужны. Исходя из этого требования, и нужно будет производить упрощение оценки погрешности.

Погрешности округлений и вычисления правых частей системы (1.1) учитывать не будем, так как анализ их влияния на погрешность численного решения достаточно подробно сделан в работе [3].

Для сокращения письма перейдем к векторной форме записи. Условимся всюду через $|v|$ обозначать n-мерный вектор, координатами которого являются модули координат вектора v. Если все координаты вектора d больше соответствующих координат вектора b той же размерности, что и d, то будем писать $d > b$. В векторной записи (1.2) и (1.3) примут вид

$$y(x) = y^\circ + \int_{x_0}^{x} f[t, y(t)]\, dt, \qquad y_s(t) = y^\circ + \int_{x_0}^{x} f[t, y_{s-1}(t)]\, dt \tag{2.1}$$

Теперь определим область D неравенствами

$$x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + a, \qquad |y - y^\circ| \leqslant b \tag{2.2}$$

Считаем, что в области D вектор-функция $f(x, y)$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица первого порядка по переменному y. Следовательно, существуют вектор c и матрица P с неотрицательными компонентами и элементами такие, что в D

$$|f(x, y)| \leqslant c, \qquad |f(x, y) - f(x, z)| \leqslant P\,|y - z| \tag{2.3}$$

На отрезке $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + \delta$, где δ выбрано таким, что одновременно выполняются неравенства

$$0 < \delta \leqslant a, \qquad \delta c \leqslant b \tag{2.4}$$

погрешность $\varepsilon_1(x) = |y(x) - y_s(x)|$ можно получить следующим образом ([2], стр. 110); согласно определению итерации Пикара имеем

$$y_i(x) = y^\circ + \int_{x_0}^{x} f[t, y_{i-1}(t)]\, dt \qquad (i = 1, 2, \ldots), \qquad y_0(x) = v(x) \in D \tag{2.5}$$

Отсюда при помощи второго неравенства (2.4) можно получить

$$|y_i(x) - y_{i-1}(x)| \leqslant \frac{(x - x_0)^{i-1}}{(i-1)!} P^{i-1} \max |y_1(x) - v(x)| \quad (i = 1, 2, \ldots) \tag{2.6}$$

и для $k > s$

$$|y_k(x) - y_s(x)| \leqslant |y_k(x) - y_{k-1}(x)| + |y_{k-1}(x) - y_{k-2}(x)| + \ldots +$$
$$+ |y_{s+1}(x) - y_s(x)| \leqslant \sum_{i=s}^{k-1} \frac{(x - x_0)^i}{i!} P^i \max |y_1(x) - v(x)| \tag{2.7}$$

Переходя в последнем неравенстве при $k \to \infty$ к пределу, получаем

$$\varepsilon_1(x) \leqslant \left[e^{P(x-x_0)} - \sum_{i=0}^{s-1} \frac{(x - x_0)^i P^i}{i!} \right] \max |y_1(x) - v(x)| \tag{2.8}$$

Заменяя последовательно интегралы в (2.2) при помощи численных квадратурных формул, получаем решение $Y(x)$.

Погрешность $\varepsilon_2(x) = |y_s(x) - Y(x)|$ численных квадратурных формул считаем известной. Тогда погрешность $\varepsilon(x) = |y(x) - Y(x)|$ будет иметь оценку

$$\varepsilon(x) \leqslant \varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x) \tag{2.9}$$

Поступила 3 IV 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения. ИЛ. 1953, т. 1.
2. Вулих Б. З. Введение в функциональный анализ. Физматгиз, 1958.
3. Шура-Бура М. Р. Оценки ошибок численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. ПММ, 1952, т. 16, вып. 5.