О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА БУБНОВА — ГАЛЕРКИНА В ТЕОРИИ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

В. А. Медведев (Москва)

Задача об устойчивости плоскопараллельных или близких к ним течений вязкой несжимаемой жидкости, как известно [1], сводится к задаче о собственных значениях для уравнения Орра — Зоммерфельда

$$L\varphi = \varphi'''' - 2\alpha^2\varphi'' + \alpha^4\varphi - i\alpha R[(u-c)(\varphi''-\alpha^2\varphi) - u''\varphi] = 0 \tag{1}$$

граничными условиями

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi(1) = \varphi'(1) = 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant 1) \tag{2}$$

для течений с двумя твердыми стенками,

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = 0, \ |\varphi(x)| < M = \mathrm{const} \quad (0 \leqslant x < +\infty) \tag{3}$$

для течений с одной твердой стенкой (пограничные слои),

$$|\varphi(x)| < M = \mathrm{const} \quad (-\infty < x < +\infty) \tag{4}$$

для течений без твердых стенок (свободные пограничные слои)

Здесь α и R — положительные числа, u — функция от x (профиль скорости), стремящаяся в случае условий (3) и (4) к постоянному значению при $x \to +\infty$ (соответственно при $x \to -\infty$ для случая (4)), c — комплексный параметр, относительно которого при заданных α и R ставится задача о собственных значениях. Растущим возмущениям соответствует $c_i > 0$, где c_i есть мнимая часть собственного значения c, затухающим возмущениям соответствует $c_i < 0$, для нейтральных колебаний $c_i = 0$. Числа R, при которых теряется устойчивость, для некоторых течений невелики, например, когда профиль скорости имеет точку перегиба [1]. В этих случаях можно ожидать, что метод Бубнова — Галеркина даст хорошие результаты в практически приемлемых приближениях. Однако вопрос о сходимости этого метода при применении к уравнению (1) до сих пор был решен только для граничных условий (2). Первое доказательство сходимости метода было дано Г. И. Петровым в 1940 г. [2]. В настоящей работе доказывается сходимость метода Бубнова — Галеркина для уравнения (1) с граничными условиями (3) и (4).

Будем рассматривать значения c только из области D комплексной плоскости, определяемой неравенством $c_i > -\alpha/R$. Причины такого ограничения будут видны из доказательства. При решении уравнения (1) обычно интересуются собственными значениями c, соответствующими растущим и нейтральным колебаниям. Все такие c находятся в области D. Заменим требование ограниченности функции $\varphi(x)$ в случаях (3) и (4) эквивалентным условием

$$\varphi^{(k)}(x) \in L_{2(a,\,b)} \qquad (k = 0, 1, 2, 3, 4) \tag{5}$$

Здесь $a = 0$, $b = +\infty$ в случае (3) и $a = -\infty$, $b = +\infty$ в случае (4). (Эквивалентность можно показать, изучая поведение решений уравнения (1) при больших значениях аргумента.) В дальнейшем областью определения оператора L будем считать функции $\varphi(x)$, удовлетворяющие условию (5) и, кроме того, условию $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$, если $a = 0$.

Обозначим

$$A\varphi = \varphi'''' - 2\alpha^2\varphi'' + \alpha^4\varphi$$

Введем для любых двух функций φ и ψ из области определения оператора L скалярное произведение по формуле

$$[\varphi, \psi] = (A\varphi, \psi)$$

где круглыми скобками обозначается скалярное произведение в $L_{2(a,b)}$. Оператор A — симметричный положительно определенный, поэтому введенное скалярное произведение удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к скалярному произведению в гильбертовом пространстве [3]. Гильбертово пространство с введенным скалярным произведением, пополненное обычным способом, обозначим через H. Нетрудно проверить, что для любых $\varphi \in H$ и $\psi \in H$ можно записать

$$[\varphi, \psi] = (\varphi'' - \alpha^2\varphi, \psi'' - \alpha^2\psi) \tag{6}$$

Уравнение (1) эквивалентно уравнению

$$L_1\varphi = A^{-1}L\varphi = 0 \tag{7}$$

Имеем для φ и ψ из области определения оператора L

$$(L\varphi, \psi) = (AA^{-1}L\varphi, \psi) = [A^{-1}L\varphi, \psi] = [L_1\varphi, \psi] \tag{8}$$

Для применения метода Бубнова — Галеркина возьмем в области определения оператора L систему линейно независимых функций φ_k $(k = 1, 2, \ldots)$. Приближенную собственную функцию уравнения (1) ищем в виде $\varphi = a_1\varphi_1 + \ldots + a_n\varphi_n$.

Уравнения метода Бубнова — Галеркина имеют вид

$$\Big\{L \sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k, \varphi_i\Big\} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{9}$$

где неизвестными являются коэффициенты a_k $(k = 1, \ldots, n)$.

Приближенные собственные значения есть корни определителя системы (9). Используя равенство (8), перепишем систему (9) в виде

$$\Big[L_1 \sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k, \varphi_i\Big] = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{10}$$

Уравнения (10) есть уравнения метода Бубнова — Галеркина для уравнения (7) в пространстве H. Нетрудно показать, что оператор L_1, если его рассматривать в H, ограничен. Расширим его на все пространство H непрерывным образом. Для линейных уравнений с ограниченным оператором в работе [4] приведены достаточные условия сходимости метода Бубнова — Галеркина. Они заключаются в следующем (теоремы 1, 4, 5). Пусть система φ_k $(k = 1, 2, \ldots)$ полна в H и пусть для каждого значения c из области D выполняется неравенство $\inf \lim |[L_1\psi_n, \psi_n]| > 0$ при $n \to \infty$ для любой слабо сходящейся к нулю в H последовательности ψ_n $(n = 1, 2, \ldots)$, $\|\psi_n\|_H = 1$. Тогда любое ограниченное замкнутое множество $D_0 \subset D$, не содержащее собственных значений уравнения (7), начиная с некоторого n, не содержит и приближенных собственных значений, и для любого изолированного собственного значения $c \in D$ существует последовательность приближенных собственных значений, сходящаяся к этому c. Сходимость метода при вычислении собственных функций рассмотрена в работе [5]. Пусть ψ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ — некоторая слабо сходящаяся к нулю в H последовательность функций, $\|\psi_n\|_H = 1$. Рассмотрим действительную часть

$$\begin{gathered}\operatorname{Re}\,[L_1\psi_n, \psi_n] = (\psi_n'' - \alpha^2\psi_n, \psi_n'' - \alpha^2\psi_n) - \alpha Rc_i\,(\psi_n'' - \alpha^2\psi_n, \psi_n) + \\ + \alpha R \operatorname{Im}\,(u\psi_n'', \psi_n) = 1 + \alpha Rc_i\,(\|\psi_n'\|^2 + \alpha^2\|\psi_n\|^2) - \alpha R \operatorname{Im}\,(\psi_n', u'\psi_n)\end{gathered} \tag{11}$$

При выводе равенства (11) использовались формула интегрирования по частям и равенство (6). Через $\|\psi\|$ обозначена норма функции ψ в $L_{2(a,\,b)}$. Обозначим

$$f_n = \psi_n'' - \alpha^2\psi_n$$

Слабая сходимость к нулю в H последовательности $\{\psi_n\}$ означает, что последовательность $\{f_n\}$ слабо сходится к нулю в $L_{2(a,\,b)}$, а условие $\|\psi_n\|_H = 1$ можно записать в виде $\|f_n\| = 1$. Интегрированием по частям получим равенство $\|\psi_n'\|^2 + \alpha^2\|\psi_n\|^2 = -(f_n, \psi_n)$, откуда по неравенству Коши — Буняковского $\|\psi_n'\|^2 + \alpha^2\|\psi_n\|^2 \leqslant \|f_n\|\,\|\psi_n\|$ и, следовательно,

$$\|\psi_n\| \leqslant \alpha^{-2}\|f_n\| = \alpha^{-2}, \qquad \|\psi_n'\|^2 + \alpha^2\|\psi_n\|^2 \leqslant \alpha^{-2}\|f_n\|^2 = \alpha^{-2} \tag{12}$$

Выразим ψ_n через f_n. Имеем

$$\psi_n = \int_a^b K(x, y)\, f_n(y)\, dy \tag{13}$$

где

$$K(x, y) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\alpha^{-1}e^{-\alpha(x-y)} & \text{при } x \geqslant y \\ -\frac{1}{2}\alpha^{-1}e^{\alpha(x-y)} & \text{при } x \leqslant y \end{cases}$$

в случае, когда $a = -\infty$. $b = +\infty$, и

$$K(x, y) = \begin{cases} -{}^1/_2\alpha^{-1}e^{-\alpha(x-y)} + {}^1/_2\alpha^{-1}e^{-\alpha(x+y)} & \text{при } x \geqslant y \\ -{}^1/_2\alpha^{-1}e^{\alpha(x-y)} + {}^1/_2\alpha^{-1}e^{-\alpha(x+y)} & \text{при } x \leqslant y \end{cases}$$

в случае, когда $a = 0$, $b = +\infty$. Формула (13) проверяется непосредственно. Далее

$$u'\psi_n = \int_a^b K_1(x, y) f_n(y)\, dy \quad (K_1(x, y) = u'(x) K(x, y)) \tag{14}$$

Функция u' обычно достаточно быстро стремится к нулю при $|x| \to \infty$, так что

$$\int_a^b (u')^2\, dx$$

существует. Используя это, легко показать, что

$$\int_a^b\int_a^b |K_1(x, y)|^2\, dxdy < +\infty$$

Поэтому интегральный оператор, задаваемый ядром $K_1(x, y)$ в формуле (14), есть вполне непрерывный оператор в $L_{2(a,\, b)}$. В силу известных свойств вполне непрерывных операторов из слабой сходимости к нулю в $L_{2(a,\, b)}$ последовательности $\{f_n\}$ следует сильная сходимость к нулю в $L_{2(a,\, b)}$ последовательности $\{u'\psi_n\}$. Так как, в силу (12), последовательность $\{\psi_n'\}$ ограничена в $L_{2(a,\, b)}$, то $\lim(\psi_n', u'\psi_n) = 0$ при $n \to \infty$. Используя это равенство, получим из формулы (11)

$$\inf \lim_{n\to\infty} \operatorname{Re}[L_1\psi_n, \psi_n] = \inf \lim_{n\to\infty} \{1 + \alpha Rc_i (\|\psi_n'\|^2 + \alpha^2 \|\psi_n\|^2)$$

Отсюда и из неравенства (12)

$$\inf \lim_{n\to\infty} \operatorname{Re}[L_1\psi_n, \psi_n] \geqslant 1 \quad \text{при } c_i \geqslant 0$$

$$\inf \lim_{n\to\infty} \operatorname{Re}[L_1\psi_n, \psi_n] \geqslant 1 + \alpha^{-1}Rc_i \quad \text{при } c_i \leqslant 0$$

Следовательно,

$$\inf \lim_{n\to\infty} |[L_1\psi_n, \psi_n]| > 0, \qquad c \in D$$

Чтобы обеспечить сходимость метода, надо выбрать систему приближающих функций $\{\varphi_k\}$ из области определения оператора L, полную в H. Это можно сделать, например, так. Возьмем систему функций $\{g_k\}$, полную в $L_{2(a,\, b)}$. Тогда легко показать, что система $\{\varphi_k = A^{-1}g_k\}$ полна в H. Однако такой выбор системы может сделать вычисления слишком громоздкими. Достаточно простой вид для вычисления интегралов имеют системы $x^n e^{-{}^1/_2 x^2}$ и $x^{n+2}e^{-{}^1/_2 x}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ соответственно для случаев (4) и (3). Если их ортогонализировать, то получим

$$e^{{}^1/_2 x^2} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}, \quad e^{{}^1/_2 x} x^{-{}^1/_2 \beta} \frac{d^n}{dx^n}(x^{n+\beta}e^{-x}) \quad (\beta = 4,\ n = 0, 1, 2, \ldots)$$

т. е. хорошо известные функции Эрмита и функции Лагерра.

Полнота указанных систем в H следует из теорем, доказанных в работе [6].

Автор благодарит В. Т. Харина за весьма полезные советы.

Поступила 29 XII 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Линь Цзя-цзяо. Теория гидродинамической устойчивости. ИЛ, 1958.
2. Петров Г. И. Применение метода Галеркина к задаче об устойчивости течения вязкой жидкости. ПММ, 1940, . 4 вып. 3.
3. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. Гостехиздат, 1957.
4. Медведев В. А. О сходимости метода Бубнова—Галеркина. ПММ, 1963, т. 27, вып. 6.
5. Медведев В. А. О сходимости проекционного метода в задачах о собственных значениях. Докл. АН СССР, 1964, т. 156, № 2.
6. Медведев В. А. О сходимости ортогональных рядов Лагерра, Эрмита и Якоби. Докл. АН СССР, 1963, т. 151, № 5.