

НАБЕГАНИЕ УДАРНОЙ ВОЛНЫ НА КЛИН, ДВИЖУЩИЙСЯ СО СВЕРХЗВУКОВОЙ СКОРОСТЬЮ

А. И. Голубинский (Москва)

Если на тело, движущееся в газе со сверхзвуковой скоростью, набегают спереди под некоторым углом плоская ударная волна, то при подходе к телу она вначале взаимодействует с головной ударной волной перед телом, а затем развивается весьма сложная картина дифракции ударной волны около движущегося тела, сопровождаемая в общем случае серией новых отраженных ударных волн и контактных разрывов.

Однако оказывается, что существуют такие частные случаи, в которых эта картина весьма проста и легко рассчитывается.

Рассмотрим верхнюю поверхность клина с углом полураствора δ , движущегося со сверхзвуковой скоростью V , с присоединенным головным скачком уплотнения. Пусть спереди навстречу клину распространяется со скоростью c плоская ударная волна, наклоненная к вертикали под углом β .

Покажем, что если подчинить некоторым условиям параметры V , δ , c и β , то на верхней поверхности клина при набегающей ударной волне картина течения в некоторый момент времени будет соответствовать изображенной на фиг. 1, где BA и BD — части присоединенного скачка уплотнения и набегающей ударной волны, еще не испытавшие взаимодействия, BO — новый присоединенный скачок уплотнения, возникающий после взаимодействия, BC — продолжение набегающей ударной волны. Заметим, что в системе координат с началом в носке клина картина будет автомодельной по времени (т. е. будет зависеть от отношения координат к времени). В области OBC течение имеет постоянные параметры. Рассмотрим условия, которые надо наложить на V , δ , c и β , чтобы реализовать данное течение.

Во-первых, интенсивности (т. е. перепады давления) набегающей и присоединенной ударных волн должны быть одинаковы, чтобы избежать контактного разрыва из точки B внутрь области BOC . Тогда интенсивности ударных волн OB и BC также будут одинаковыми. Во-вторых, линия BO должна быть продолжением AB , что ясно из геометрических соображений. Проведя теперь биссектрису BE и связывая начало координат с точкой B , легко видеть, что такая конфигурация скачков уплотнения возникает при отражении скачка от стенки BE при условии, что угол падения ω равен углу отражения ω_1 . Известно (например, [1]), что отражение скачков конечной интенсивности при этом возможно только при определенном угле падения ω^* , равном

$$\omega^* = \arctg [(\gamma + 1) / (3 - \gamma)]^{1/2},$$

$$(\gamma - \text{отношение теплоемкостей}) \quad (1)$$

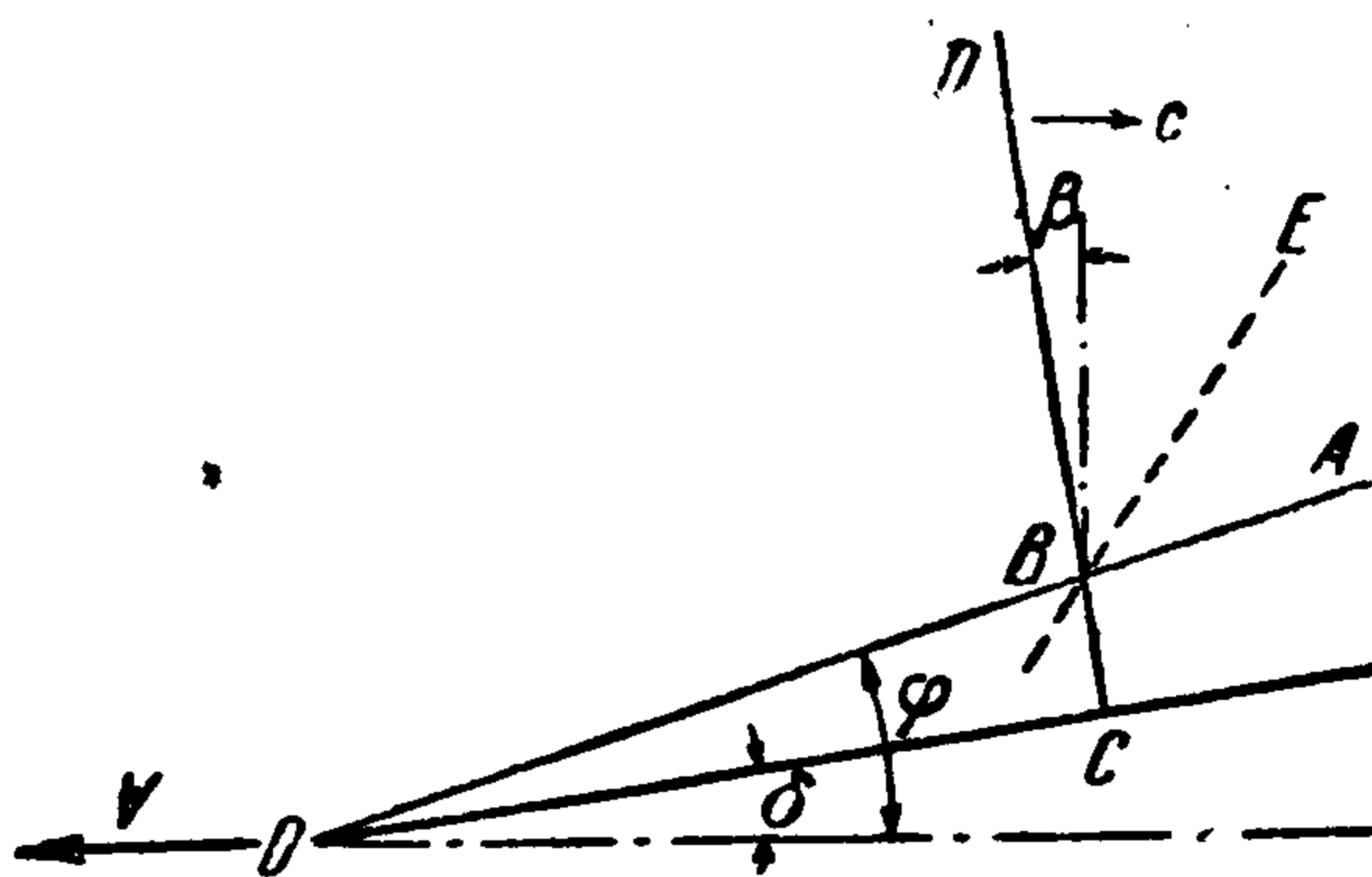
при произвольной интенсивности падающего скачка. Относительный перепад давления в отраженном скачке p° оказывается в этом случае таким же, как и при лобовом столкновении скачка со стенкой, и связан с относительным перепадом давления в падающем скачке формулой

$$p^\circ = \frac{(3\gamma - 1) p - (\gamma - 1)}{(\gamma - 1) p + (\gamma + 1)} \quad (2)$$

Итак, для реализации течения, изображенного на фиг. 1, необходимо, чтобы головная и набегающая ударная волны имели одинаковую интенсивность и пересекались под углом, равным $2\omega^*$.

Далее, ударная волна BC , являющаяся продолжением ударной волны DB при таком пересечении скачков, должна быть нормальна к поверхности клина. (Это можно обеспечить, так как $2\omega^* < 1/2\pi$ при $1 < \gamma \leq 3$, при $\gamma > 3$ такая картина течения невозможна). Из этого условия следует, что

$$\beta = \delta \quad (3)$$



Фиг. 1

Далее, из рассмотрения треугольника OBC следует, что условие пересечения ударных волн под углом $2\omega^*$ эквивалентно условию

$$\varphi - \delta = \frac{1}{2}\pi - 2\omega^* \quad (4)$$

угол между присоединенным скачком и поверхностью клина должен иметь фиксированное значение, зависящее только от γ и равное 11.54° при $\gamma = 1.4$ (для воздуха).

Таким образом, четыре параметра: V , δ , c и β должны удовлетворять трем условиям: равенство интенсивностей ударных волн и условия (3) и (4). В итоге получается семейство решений, зависящее от одного параметра.

Выразим условие (4) в виде связи между углом клина и числом M набегающего потока. В силу (1) это условие примет вид

$$\operatorname{tg}(\varphi - \delta) = \operatorname{ctg} 2\omega^* = \frac{\gamma - 1}{\sqrt{(\gamma + 1)(3 - \gamma)}}, \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{ctg} 2\omega^*}{1 + \operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{ctg} 2\omega^*} \quad (5)$$

С другой стороны, из формул для косоугольного скачка уплотнения имеем

$$\operatorname{tg} \delta = \left[\operatorname{tg} \varphi \left(\frac{\gamma + 1}{2} \frac{M^2}{M^2 \sin^2 \varphi - 1} - 1 \right) \right]^{-1} \quad (6)$$

Приравняв правые части, после несложных преобразований получим

$$\left[\operatorname{tg}^2 \varphi \left(1 + M^2 \frac{\gamma - 1}{2} \right) - \operatorname{tg} \varphi \operatorname{ctg} 2\omega^* M^2 \frac{\gamma + 1}{2} + 1 \right] (\operatorname{tg}^2 \varphi + 1) = 0$$

уравнение имеет следующие действительные решения:

$$\operatorname{tg} \varphi = \left[\operatorname{ctg} 2\omega^* \pm \left(\operatorname{ctg}^2 2\omega^* - \frac{8(\gamma - 1)}{M^2(\gamma + 1)^2} - \frac{16}{M^4(\gamma + 1)^2} \right)^{1/2} \right] \times \left[2 \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \frac{2}{M^2(\gamma + 1)} \right) \right]^{-1} \quad (7)$$

Таким образом, из (7) и (5) для заданного числа M можно найти угол скачка и угол клина, при котором выполняется условие (4). Тогда при набегающей на клин ударной волне под углом β , равным углу клина, с интенсивностью, равной интенсивности присоединенного скачка уплотнения, на клине реализуется рассмотренная картина течения. Из формулы (7) легко видеть, что такое течение осуществляется при

$$M \geq 2 \left(\frac{3 - \gamma + 2\sqrt{3 - \gamma}}{(\gamma + 1)(\gamma - 1)} \right)^{1/2} \quad (\text{или при } M \geq 4.15 \text{ для } \gamma = 1.4) \quad (8)$$

Далее, можно показать, что при

$$M > \frac{1}{\operatorname{ctg} 2\omega^*} \sqrt{\operatorname{ctg}^2 2\omega^* + 1} \quad (9)$$

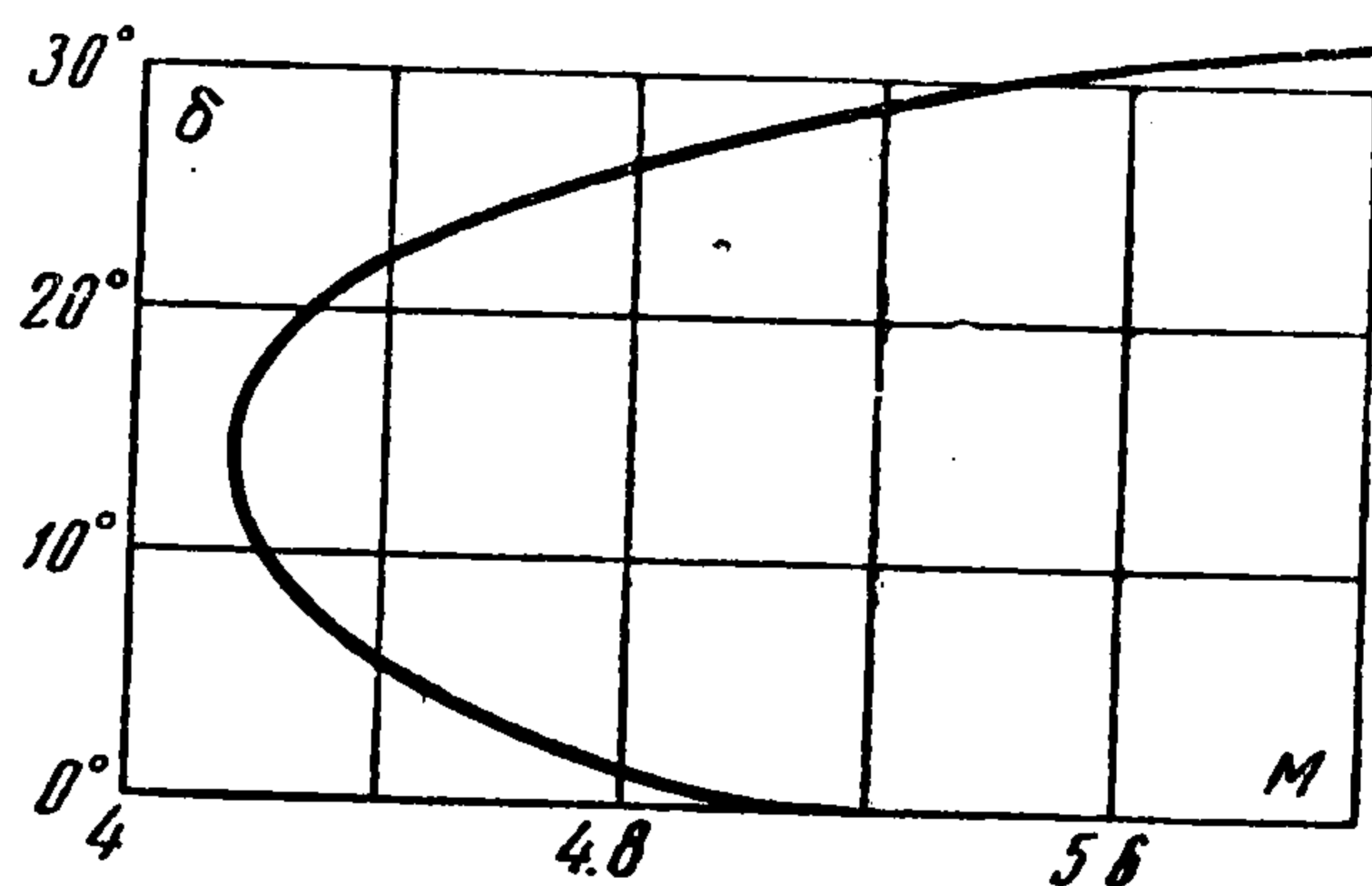
второе решение (со знаком минус у радикала) не имеет смысла, ибо угол наклона скачка становится меньше угла Маха.

В диапазоне чисел Маха между этими пределами оба решения (7) имеют смысл.

Отметим, при $M \rightarrow \infty$ для угла скачка уплотнения получим

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \varphi = \arcsin \operatorname{tg} \left(\frac{\gamma + 1}{3 - \gamma} \right)^{1/2} = \frac{1}{2} \pi - \omega^*$$

или, используя (4), предельное значение угла клина оказывается равным углу падения ω^* . Заметим также, что при $\gamma \rightarrow 1$ угол клина стремится к $\frac{1}{4}\pi$, а при возрастании γ до 3 угол клина уменьшается, обращаясь в нуль при $\gamma = 3$. При $\gamma > 3$ решение не существует, как указывалось выше. На фиг. 2 приведены для иллюстрации значения углов клина при различных числах Маха для случая $\gamma = 1.4$.



Фиг. 2

Поступила 27 I 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. М и з е с Р. Математическая теория течений сжимаемой жидкости ИЛ, 1961.