РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ВИХРЕ В ОГРАНИЧЕННОЙ МАССЕ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ

О. М. Киселев

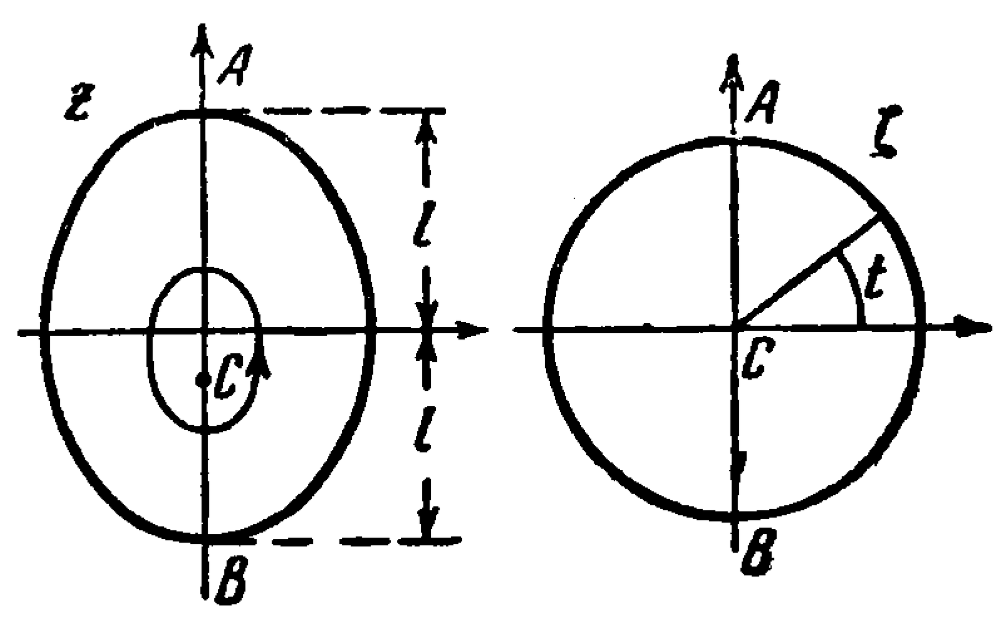
(Казань)

Решение струйных задач гидродинамики с учетом силы тяжести представляет как практический, так и теоретический интерес. За последнее десятилетие создан ряд приближенных методов, каждый из которых применим, как правило, лишь к узкому классу задач. В случае больших чисел Фруда F (влияние силы тяжести незначительно) достаточно удобным может оказаться метод, основанный на разложении искомых функций в ряды по степеням $1/F$.

Идея такого метода заложена в работах К. Воронца [1,2]. В них автор исследует задачу об истечении тяжелой жидкости из отверстия в вертикальной стенке, ограничеваясь в решении членами первого порядка относительно $1/F$ и не уточняя процедуру определения следующих приближений. В работе М. И. Гуревича и Г. Н. Пыхтеева [3], основанной на идее Воронца, решается в первом приближении задача об истечении тяжелой жидкости из-под щита. Следует упомянуть также работу Г. И. Костычева [4], в которой аналогичный метод применяется для исследования несколько иных вопросов. В настоящей статье показана эффективность метода малого параметра в применении к задаче о вихре в ограниченной массе тяжелой жидкости. Доказывается сходимость полученных рядов.

1. Постановка задачи и решение. Рассматривается плоское установившееся потенциальное течение тяжелой несжимаемой жидкости от вихря в конечной области плоскости $z = x + iy$ (ось y направлена вертикально вверх).

Вихрь расположен в точке C ($z = z_c$). В точках A и B границы ордината y достигает экстремальных значений: $y_{\max} = l$, $y_{\min} = -l$. Давление на границе постоянно, причем, как будет показано ниже, сила тяжести, действующая на жидкость, уравновешивается внешней сосредоточенной силой, приложенной к вихрю.



Фиг. 1

Из уравнения Бернулли следует, что скорость V на свободной поверхности должна удовлетворять соотношениям

$$V^2 = V_0^2\left(1 - \alpha\frac{y}{l}\right) \qquad \left(0 \leqslant \alpha = \frac{2gl}{V_0^2} < 1\right) \tag{1.1}$$

Здесь g — ускорение силы тяжести, V_0 — значение скорости при $y = 0$.

Будем искать аналитическую функцию $z = z(\zeta)$, отображающую круг единичного радиуса с центром в начале координат плоскости ζ на область течения в плоскости z. При этом потребуем, чтобы точки $\zeta = i, -i, 0$ переходили соответственно в точки A, B, C.

Введем комплексный потенциал течения $w = (\Gamma / 2\pi i)\ln\zeta$; из (1.1) получим, что при $\zeta = e^{it}$

$$\operatorname{Re}(\ln w' - \ln z') = \ln V_0 + {}^1/_2 \ln(1 - \alpha y / l) \tag{1.2}$$

где штрихом обозначены производные по ζ.

Функция $z(\zeta)$ и величина циркуляции Γ зависят от α, как от параметра. Полагая, что в окрестности $\alpha = 0$ эта зависимость будет аналитической, представим искомые функции в виде степенных рядов

$$z(\zeta, \alpha) = z_0(\zeta) + \alpha z_1(\zeta) + \alpha^2 z_2(\zeta) + \ldots, \qquad (z_k(e^{it}) = x_k(t) + iy_k(t)) \tag{1.3}$$

$$w(\zeta, \alpha) = \frac{\Gamma_0}{2\pi i}(1 + \alpha\gamma_1 + \alpha^2\gamma_2 + \ldots)\ln\zeta \tag{1.4}$$

Здесь Γ_0, γ_k — вещественные постоянные, а $z_k(\zeta)$ — функции, голоморфные в круге.

Подстановка выражений (1.3), (1.4) в (1.2) дает

$$\operatorname{Re}\left[\ln\frac{\Gamma_0}{2\pi}+\ln(1+\alpha\gamma_1+\alpha^2\gamma_2+\ldots)-\ln z_0'-\ln\left(1+\alpha\frac{z_1'}{z_0'}+\alpha^2\frac{z_2'}{z_0'}+\ldots\right)\right]=$$
$$=\ln V_0+\frac{1}{2}\ln\left[1-\alpha\left(\frac{y_0}{l}+\alpha\frac{y_1}{l}+\alpha^2\frac{y_2}{l}+\ldots\right)\right]\qquad(\zeta=e^{it})\qquad(1.5)$$

Разлагая в степенные ряды логарифмы, входящие в уравнение (1.5), и собирая затем коэффициенты при одинаковых степенях α, получим бесконечную последовательность условий, которым должны удовлетворять функции $z_k(\zeta)$ на границе круга

$$\operatorname{Re}\left(\ln\frac{\Gamma_0}{2\pi}-\ln z_0'\right)=\ln V_0,\qquad \operatorname{Re}\left(\gamma_1-\frac{z_1'}{z_0'}\right)=-\frac{1}{2}\frac{y_0}{l}$$
$$\operatorname{Re}\left(\gamma_2-\frac{\gamma_1^2}{2}-\frac{z_2'}{z_0'}+\frac{1}{2}\frac{z_1'^2}{z_0'^2}\right)=-\frac{1}{2}\left(\frac{y_1}{l}+\frac{1}{2}\frac{y_0^2}{l^2}\right)\qquad(1.6)$$
$$\operatorname{Re}\left(\gamma_3-\gamma_1\gamma_2+\frac{\gamma_1^3}{3}-\frac{z_3'}{z_0'}+\frac{z_1'z_2'}{z_0'^2}-\frac{1}{3}\frac{z_1'^3}{z_0'^3}\right)=-\frac{1}{2}\left(\frac{y_2}{l}+\frac{y_1y_2}{l^2}+\frac{1}{3}\frac{y_0^3}{l^3}\right)$$
$$\operatorname{Re}\left(\gamma_4-\frac{\gamma_2^2}{2}-\gamma_1\gamma_3+\gamma_1^2\gamma_2-\frac{\gamma_1^4}{4}-\frac{z_4'}{z_0'}+\frac{1}{2}\frac{z_2'^2}{z_0'^2}+\frac{z_1'z_3'}{z_0'^2}-\frac{z_1'^2z_2'}{z_0'^3}+\frac{1}{4}\frac{z_1'^4}{z_0'^4}\right)=$$
$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{y_3}{l}+\frac{1}{2}\frac{y_1^2}{l^2}+\frac{y_0y_2}{l^2}+\frac{y_0^2y_1}{l^3}+\frac{1}{4}\frac{y_0^4}{l^4}\right)$$

. . . .

Кроме того, следует потребовать, чтобы

$$x_0(^1/_2\pi)=0,\quad y_0(^1/_2\pi)=-y_0(-^1/_2\pi)=l,\quad y_0^{\cdot}(^1/_2\pi)=y_0^{\cdot}(-^1/_2\pi)=0\quad(1.7)$$
$$x_k(^1/_2\pi)=y_k(^1/_2\pi)=y_k(-^1/_2\pi)=y_k^{\cdot}(^1/_2\pi)=y_k^{\cdot}(-^1/_2\pi)=0\qquad(k=1,2,\ldots)\qquad(1.8)$$

(точкой обозначены производные по t).

Из условий (1.6), (1.7) следует, что

$$z_0=l\zeta,\qquad \Gamma_0=2\pi lV_0$$

Граничные условия для функций $z_k(\zeta)$ принимают вид

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z_k'}{l}-\gamma_k\right)=f_k(t)\qquad(\zeta=e^{it})$$

где правая часть становится известной после определения γ_i, $z_i(\zeta)$ $(i=0,1,\ldots,k-1)$. Это обстоятельство дает возможность находить функции $z_k(\zeta)$ последовательно одну за другой. Постоянные γ_k совместно с тремя другими вещественными постоянными, возникающими в процессе определения $z_k(\zeta)$, находятся из уравнений (1.8), одно из которых выполняется автоматически.

Не представляет большого труда доказать, что при $m=0,1,2,\ldots$

$$\gamma_{2m+1}=0,\qquad z_{2m+1}=il\sum_{j=0}^{m+1}a_{2j}^{(2m+1)}\zeta^{2j},\qquad z_{2m}=l\sum_{j=0}^{m}a_{2j+1}^{(2m)}\zeta^{2j+1}\qquad(1.9)$$

Коэффициенты, входящие в формулы (1.9), вещественны.

С точностью до членов порядка α^4

$$z_{(4)}=l\,[\zeta-{}^1/_4\,i\alpha(1+\zeta^2)-{}^1/_8\,\alpha^2(\zeta+\zeta^3)-{}^1/_{64}\,i\alpha^3(3-2\zeta^2-5\zeta^4)-$$
$$-{}^1/_{384}\,\alpha^4(17\zeta-4\zeta^3-21\zeta^5)]\qquad(1.10)$$

$$w_{(4)}=-ilV_0(1-{}^1/_8\,\alpha^2-{}^{11}/_{384}\,\alpha^4)\ln\zeta\qquad(1.11)$$

индексом в круглых скобках обозначен номер приближения). При этом на свободной поверхности будем иметь

$$V_{(4)}{}^2 = V_0{}^2 (1 - \alpha l^{-1} y_{(4)} + \alpha^5 \delta_{(4)} (t, \alpha))$$

Как показывают вычисления, функция $\delta_{(4)}$ слабо зависит от α и при $0 < \alpha \leqslant 0.5$ имеем $|\delta_{(4)}| < 0.7$. С увеличением α от 0 до 0.5 контур свободной поверхности слегка сжимается с боков, почти не теряя симметрии относительно оси x, циркуляция уменьшается, а вихрь опускается. Положение вихря определяется из (1.10) при $\zeta = 0$

$$z_c = -{}^1/_4 i\alpha (1 + {}^3/_{16}\, \alpha^2)$$

Легко убедиться также, что в любом приближении и при любом α контур свободной поверхности симметричен относительно оси y, вихрь находится на этой оси, а функция $\delta_{(n)}$ удовлетворяет условию $\delta_{(n)} (\pi + t) = \delta_{(n)} (-t)$.

2. Доказательство сходности решения. Докажем, что построенные нами ряды (1.3), (1.4) при $\zeta = e^{it}$ сходятся, по крайней мере, для значений α, достаточно малых по модулю, абсолютно и равномерно по отношению к переменной t. При этом будем опираться на работу Л. В. Канторовича [5], из которой позаимствуем следующую лемму.

Лемма. Если у двух степенных рядов

$$a_1\xi + a_2\xi^2 + \ldots + a_n\xi^n + \ldots, \quad b_1\xi + b_2\xi^2 + \ldots + b_n\xi^n + \ldots$$

коэффициенты удовлетворяют неравенствам

$$|a_n| \leqslant \frac{A}{(n+1)^\beta}, \qquad |b_n| \leqslant \frac{B}{(n+1)^\beta} \qquad (n = 1, 2, \ldots; \ \beta > 1)$$

то коэффициенты c_n степенного ряда, представляющего их произведение, удовлетворяют неравенствам

$$|c_n| \leqslant \frac{AB}{(n+1)^\beta} M_\beta$$

где M_β — постоянная, зависящая только от β.

Следствие. Применяя записанную выше оценку последовательно к степеням функции $\tau(\xi) = a_1\xi^n + a_2\xi^2 + \ldots + a_n\xi^n + \ldots$ для коэффициентов d_n функции $\tau^k(\xi) = d_1\xi + d_2\xi^2 + \ldots + d_n\xi^n + \ldots$, получим соотношение

$$|d_n| \leqslant \frac{A^k}{(n+1)^\beta} M_\beta^{k-1}$$

Условимся называть нормой функции $\varphi(t)$, разлагающейся в степенной ряд

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

сумму модулей коэффициентов разложения

$$\|\varphi(t)\| = \sum_{n=0}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$$

При этом легко убедиться, что

$$\|\varphi_1(t) + \varphi_2(t)\| \leqslant \|\varphi_1(t)\| + \|\varphi_2(t)\|, \quad \|\varphi_1(t)\cdot\varphi_2(t)\| \leqslant \|\varphi_1(t)\|\cdot\|\varphi_2(t)\|, \quad \|\overline{\varphi(t)}\| = \|\varphi(t)\|$$

Предположим, что для $1 \leqslant k \leqslant n$ верна оценка

$$\left\| \frac{z_k'(e^{it})}{l} \right\| \leqslant \frac{CR^{k-1}}{(k+1)^\beta}, \qquad |\gamma_k| \leqslant \frac{3}{7} \frac{CR^{k-1}}{(k+1)^\beta} \tag{2.1}$$

Здесь C — постоянная, выбранная так, чтобы оценка (2.1) имела место при $k = 1$. Покажем, что постоянную R можно определить таким образом, чтобы неравенства (2.1) выполнялись и при $k = n \geqslant 2$.

При помощи формул (1.9) и условия $y_n(^1/_2\pi) = 0$ нетрудно доказать, что

$$\left\| \frac{y_n(t)}{l} \right\| \leqslant \frac{1}{2} \left\| \frac{z_n'(e^{it})}{l} \right\|, \qquad \left\| \frac{z_n(e^{it})}{l} \right\| \leqslant \frac{3}{4} \left\| \frac{z_n'(e^{it})}{l} \right\| \tag{2.2}$$

$$|\gamma_n| \leqslant \left\| \operatorname{Re} \frac{z_n'(e^{it})}{l} - \gamma_n \right\|, \qquad \left\| \frac{z_n'(e^{it})}{l} \right\| \leqslant \frac{7}{3} \left\| \operatorname{Re} \frac{z_n'(e^{it})}{l} - \gamma_n \right\| \tag{2.3}$$

Разложим уравнение (1.5) в степенной ряд по α и выделим коэффициенты при α^n. Будем иметь

$$\gamma_n - \operatorname{Re} \frac{z_n'}{l} = \left\{ \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\alpha^n} \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{k} (\alpha\gamma_1 + \alpha^2\gamma_2 + \ldots + \alpha^{n-1}\gamma_{n-1})^k \right\}_{\alpha=0} -$$

$$- \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\alpha^n} \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{k} \left(\alpha \frac{z_1'}{l} + \alpha^2 \frac{z_2'}{l} + \cdots + \alpha^{n-1} \frac{z_{n-1}'}{l} \right)^k \right\}_{\alpha=0} -$$

$$- \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\alpha^n} \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{k} \left(\alpha \frac{\bar{z}_1'}{l} + \alpha^2 \frac{\bar{z}_2'}{l} + \cdots + \alpha^{n-1} \frac{\bar{z}_{n-1}'}{l} \right)^k \right\}_{\alpha=0} -$$

$$- \frac{1}{2} \frac{y_{n-1}}{l} - \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\alpha^n} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \left(\alpha \frac{y_0}{l} + \alpha^2 \frac{y_1}{l} + \cdots + \alpha^{n-1} \frac{y_{n-2}}{l} \right)^k \right\}_{\alpha=0}$$

где

$$z_j' = z_j'(e^{it}), \qquad \bar{z}_j' = \overline{z_j'(e^{it})}, \qquad y_j = y_j(t)$$

Используя (2.1), (2.2) и свойства норм периодических функций, из последнего соотношения получим

$$\left\| \operatorname{Re} \frac{z_n'}{l} - \gamma_n \right\| \leqslant \left\{ \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\alpha^n} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \left(\frac{3}{7} \frac{C}{R} \right)^k \left[\frac{\alpha R}{2^\beta} + \frac{(\alpha R)^2}{3^\beta} + \cdots + \frac{(\alpha R)^{n-1}}{n^\beta} \right]^k \right\}_{\alpha=0} +$$

$$+ \left\{ \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\alpha^n} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \left(\frac{C}{R} \right)^k \left[\frac{\alpha R}{2^\beta} + \frac{(\alpha R)^2}{3^\beta} + \cdots + \frac{(\alpha R)^{n-1}}{n^\beta} \right]^k \right\}_{\alpha=0} +$$

$$+ \frac{1}{4} \frac{CR^{n-2}}{n^\beta} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\alpha^n} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \left[\alpha + \frac{\alpha^2 C}{2 \cdot 2^\beta} + \frac{\alpha^3 CR}{2 \cdot 3^\beta} + \cdots + \frac{\alpha^{n-1} CR^{n-3}}{2 \cdot (n-1)^\beta} \right]^k \right\}_{\alpha=0}$$

На основании следствия из леммы

$$\left\{ \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\alpha^n} \frac{\alpha R}{2^\beta} + \frac{(\alpha R)^2}{3^\beta} + \cdots + \frac{(\alpha R)^{n-1}}{n^\beta} \right]^k \right\}_{\alpha=0} =$$

$$= R^n \left\{ \frac{1}{n!} \frac{d^n}{(d\alpha R)^n} \left[\frac{\alpha R}{2^\beta} + \frac{(\alpha R)^2}{3^\beta} + \cdots + \frac{(\alpha R)^{n-k}}{n^\beta} \right]^k \right\}_{\alpha=0} \leqslant R^n \frac{M_\beta^{k-1}}{(n+1)^\beta}$$

Предположим, что справедливы неравенства

$$\frac{C}{2^\beta} \geqslant 1, \qquad 2R \left(\frac{2}{3} \right)^\beta \geqslant 1 \tag{2.4}$$

Тогда

$$\left\{ \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\alpha^n} \left[\alpha + \frac{\alpha^2 C}{2 \cdot 2^\beta} + \frac{\alpha^3 CR}{2 \cdot 3^\beta} + \cdots + \frac{\alpha^{n-1} CR^{n-3}}{2 \cdot (n-1)^\beta} \right]^k \right\}_{\alpha=0} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\alpha^n} \left[\frac{\alpha C}{2^\beta} + \frac{\alpha^2 CR}{3^\beta} + \cdots + \frac{\alpha^{n-1} CR^{n-2}}{n^\beta} \right]^k \right\}_{\alpha=0} \leqslant R^n \left(\frac{C}{R} \right)^k \frac{M_\beta^{k-1}}{(n+1)^\beta}$$

Таким образом,

$$\left\| \operatorname{Re} \frac{z_n'}{l} - \gamma_n \right\| \leqslant \frac{R^n}{M_\beta (n+1)^\beta} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{3}{7} \frac{CM_\beta}{R} \right)^k +$$
$$+ \frac{3R^n}{2M_\beta (n+1)^\beta} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{CM_\beta}{R} \right)^k + \frac{1}{4} \frac{CR^{n-2}}{n^\beta} =$$
$$= \frac{R^n}{M_\beta (n+1)^\beta} \left[-\ln \left(1 - \frac{3}{7} \frac{CM_\beta}{R} \right) - \frac{3}{7} \frac{CM_\beta}{R} \right] +$$
$$+ \frac{3}{2} \frac{R^n}{M_\beta (n+1)^\beta} \left[-\ln \left(1 - \frac{CM_\beta}{R} \right) - \frac{CM_\beta}{R} \right] + \frac{1}{4} \frac{CR^{n-2}}{n^\beta} \tag{2.5}$$

Для того чтобы оценка (2.1) была верна при $k = n \geqslant 2$, учитывая (2.3), (2.5), достаточно потребовать выполнения неравенства

$$\frac{1}{4} \left(\frac{3}{2} \right)^\beta \frac{C}{R^2} + \frac{1}{M_\beta} \left[-\ln \left(1 - \frac{3}{7} \frac{CM_\beta}{R} \right) - \frac{3}{7} \frac{CM_\beta}{R} \right] +$$
$$+ \frac{3}{2M_\beta} \left[-\ln \left(1 - \frac{CM_\beta}{R} \right) - \frac{CM_\beta}{R} \right] \leqslant \frac{3}{7} \frac{C}{R} \tag{2.6}$$

Положим $\beta = 2$, тогда [5] будем иметь $M_2 = 1.520$. Так как $\gamma_1 = 0$, $\| z_1' / l \| = 1$, то для выполнения первого из неравенств (2.4) и неравенств (2.1) при $k = 1$ достаточно положить $C = 4$. Соотношение (2.6) принимает вид

$$\frac{2.250}{R^2} + 0.658 \left[-\ln \left(1 - \frac{2.606}{R} \right) - \frac{2.606}{R} \right] +$$
$$+ 0.987 \left[-\ln \left(1 - \frac{6.080}{R} \right) - \frac{6.080}{R} \right] \leqslant \frac{1.714}{R}$$

Отсюда $R \geqslant R_0 = 17.0$ (при этом второе из неравенств (2.4) будет выполнено). Итак, оценка (2.1) верна для любого k при $\beta = 2$, $R \geqslant R_0$. Следовательно, ряды

$$\Gamma = \Gamma_0 (1 + \alpha\gamma_1 + \alpha^2\gamma_2 + \ldots)$$
$$z'(e^{it}, \alpha) = z_0'(e^{it}) + \alpha z_1'(e^{it}) + \alpha^2 z_2'(e^{it}) + \ldots$$

будут сходиться при $\alpha \leqslant 0.058 < 1 / R_0$ (фактически граница сходимости будет, конечно, шире). При помощи второго из неравенств (2.2) легко распространить последнее утверждение и на ряд (1.3).

3. О силе, действующей на вихрь. Рассмотрим систему внешних сил, действующих на цилиндрический объем жидкости, ограниченный свободной поверхностью и двумя нормальными к ней плоскостями, расстояние между которыми равно единице. Равнодействующая силы тяжести P направлена по оси y и равна $P = -i\rho gS$, где ρ — плотность жидкости, а S — площадь основания жидкого объема. Покажем, что сила P уравновешивается внешней сосредоточенной силой, действующей на вихрь.

Действительно, на вихрь действует внешняя сила

$$\overline{F} = \frac{i\rho}{2} \int \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 dz, \qquad \text{или} \qquad F = \frac{i\rho}{2} \int_L V^2 (dx + i\,dy)$$

Здесь в первом выражении интегрирование ведется по любому замкнутому контуру, лежащему в плоскости движения и охватывающему вихрь, второе выражение имеет место, если за контур интегрирования принята L — проекция свободной поверхности на плоскость xy. Но на L выполняется условие (1.1), поэтому

$$F = \frac{i\rho}{2} V_0^2 \int_L (dx + i\,dy) - \frac{i\rho}{2} V_0^2 \frac{\alpha}{l} \int_L (y\,dx + iy\,dy)$$

Учитывая, что

$$\int_L dx = \int_L dy = \int_L y\,dy = 0, \qquad \int_L x\,dy = -\int_L y\,dx = S$$

будем иметь

$$F = i\rho g S \tag{3.1}$$

что и требовалось доказать. Очевидно, формула (3.1) верна и для любого мультиполя в ограниченной массе жидкости.

Пусть рассматриваемая задача решена в n-м приближении, т. е. функции z, w найдены с точностью до членов порядка α^n.

Тогда на L

$$V_{(n)}^2 = V_0^2 \left(1 - \alpha \frac{y_{(n)}}{l} + \alpha^{n+1}\delta_{(n)}\right)$$

Из (3.1) получим

$$F_{(n)} = i\rho g S_{(n)} + i\rho g l \alpha^n \int_L (\delta_{(n)}\, dx_{(n)} + i\delta_{(n)}\, dy_{(n)})$$

Учитывая равенства $\delta_{(n)}(\pi + t) = \delta_{(n)}(-t)$, $y_{(n)}^{\cdot}(\pi + t) = -y_{(n)}^{\cdot}(-t)$, легко доказать, что

$$\int_L \delta_{(n)}\, dy_{(n)} = 0$$

Поэтому

$$F_{(n)} = i\rho g\,(S_{(n)} + \alpha^n \sigma_{(n)}), \qquad \sigma_{(n)}^{\cdot} = l \int_L \delta_{(n)}\, dx_{(n)}$$

в то время как $P_{(n)} = -i\rho g S_{(n)}$. Таким образом, сумма $P_{(n)} + F_{(n)}$ имеет порядок α^n.

Последнее обстоятельство удобно использовать для проверки решения, применяя при этом формулу

$$F = i\rho\Gamma \bar{C}_1$$

где C_1 — коэффициент при $z - z_c$ в разложении функции w в окрестности точки z_c.

4. Об одном приближенном методе. При решении струйных задач общего типа методом разложения по степеням α определение даже первого приближения представляет, как правило, значительные трудности, связанные с необходимостью вычисления сингулярных интегралов, зависящих от ряда параметров [3]. В том случае, когда твердая граница состоит из вертикальных прямолинейных отрезков, более выгодным может оказаться другой приближенный метод, позволяющий получить решение в первом приближении. Идея его заключается в следующем.

Согласно уравнению (1.1), на свободной поверхности

$$\ln V = \ln V_0 + {}^1\!/_2 \ln (1 - \alpha y / l) \tag{4.1}$$

Здесь l — некоторый характерный размер. Считая α малым, а y / l — ограниченным на свободной поверхности, положим

$$\ln V = \ln V_0 - {}^1\!/_2\, \alpha y / l$$

т. е. будем пренебрегать в правой части формулы (4.1) членами порядка α^2 и выше.

Введем в рассмотрение аналитическую функцию

$$F = \ln V_0 + \frac{i\alpha}{2l} z - \ln \frac{dw}{dz} \qquad \left(\operatorname{Re} F = \ln V_0 - \frac{\alpha}{2}\frac{y}{l} - \ln V,\ \operatorname{Im} F = \frac{\alpha}{2}\frac{x}{l} + \theta\right) \tag{4.2}$$

Здесь θ — угол наклона вектора скорости к оси x. На вертикальных прямолинейных отрезках твердой границы $\operatorname{Im} F = \text{const}$, а на свободной поверхности $\operatorname{Re} F = 0$ согласно (4.2). Знание особенностей функции F в канонической области комплексного переменного ζ и простота граничных условий позволяют построить функцию

$$V_0 \frac{dz}{dw} \exp \frac{i\alpha z}{2l} = e^{F(\zeta)}$$

Умножая обе части последнего равенства на $dw / d\zeta = f(\zeta)$, получим дифференциальное уравнение для определения $z(\zeta)$

$$V_0 \frac{dz}{d\zeta} \exp \frac{i\alpha z}{2l} = e^{F(\zeta)} f(\zeta)$$

Отсюда

$$z = \frac{2l}{i\alpha} \ln \left\{1 + \frac{i\alpha}{2lV_0} \exp\left[-\frac{i\alpha}{2l} z(\zeta_1)\right] \int\limits_{\zeta_1}^{\zeta} e^{F(\zeta)} f(\zeta)\, d\zeta\right\} + z(\zeta_1)$$

Описанный метод использован автором при решении задачи о кавитационном обтекании плоской пластинки потоком тяжелой жидкости [6]. Применим его теперь к задаче о вихре в конечной массе тяжелой жидкости. При этом будем иметь

$$V_0 \frac{dz}{dw} \exp \frac{i\alpha z}{2l} = \zeta e^{i\nu}, \qquad \frac{dw}{d\zeta} = \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{\zeta}$$

Отсюда

$$V_0 \frac{2l}{i\alpha} \exp \frac{i\alpha z}{2l} = \frac{\Gamma}{2\pi i} e^{i\nu}\zeta + C_1 + iC_2$$

Вещественные постоянные Γ, ν, C_1, C_2 определяются из условий

$$z(i) = il, \qquad z(-i) = -il$$

В окончательном виде

$$z = \frac{2l}{i\alpha}\left[\ln\left(1 + i\zeta \operatorname{th} \frac{\alpha}{2}\right) + \ln \operatorname{ch} \frac{\alpha}{2}\right], \qquad \Gamma = 4\pi l V_0 \frac{1}{\alpha} \operatorname{sh} \frac{\alpha}{2} \tag{4.3}$$

Разлагая (4.3) в ряды по α, найдем

$$z = l\left[\zeta - {}^1/_4\, i\alpha (1 + \zeta^2) - {}^1/_{12}\alpha^2 (\zeta + \zeta^3) - \ldots\right], \qquad \Gamma = 2\pi l V_0 (1 + {}^1/_{24}\alpha^2 + \ldots) \tag{4.4}$$

Сравнивая последние выражения с формулами (1.10), (1.11), убеждаемся в том, что формулы (4.3) решают задачу в первом приближении.

Автор благодарен М. И. Гуревичу за полезные указания и советы.

Поступила 13 III 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Woronetz K. L'influence de la pesanteur sur la forme du jet liquide. Compt. rend. Acad. Sci., 1953, 236, No 3.
2. Woronetz K. L'influence des forces exterieures sur l'ecoulement par les orifices. Publs. Inst. math. Acad. Serbe Sci., 1953, v. 5.
3. Гуревич М. И., Пыхтеев Г. Н. Приближенное решение задачи об истечении тяжелой идеальной несжимаемой жидкости из-под щита. ПМТФ, 1960, № 2.
4. Костычев Г. И. О построении крылового профиля по хордовой диаграмме распределения скорости или давления. Тр. Казанск. авиац. ин-та, 1958, вып. 38.
5. Канторович Л. В. О конформном отображении. Матем. сб., 1933, 40, № 3.
6. Киселев О. М. О кавитационном обтекании пластинки потоком тяжелой жидкости. Изв. высш. учебн. завед., Математика, 1963, № 6.