Заметим, что в формулировке последнего результата, в отличие от предыдущего, не требовалась отрицательность вещественных частей корней уравнения $\lambda^{n-1} + a_1\lambda^{n-2} + \ldots + a_{n-1} = 0$. Однако, если это требование считать выполненным, то в силу второго следствия теоремы 2 статьи [7] существует отрицательное значение r, обеспечивающее асимптотическую устойчивость в гиперплоскости скольжения, следовательно, в этом случае при выбранном способе управления имеет место свойство асимптотической устойчивости в целом нулевого решения системы (2.7).

Поступила 29 II 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Гостехиздат, 1950.
2. Красовский Н. Н. Второй метод Ляпунова в теории устойчивости движения. Тр. Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике. Изд-во АН СССР, 1962, стр. 36—47.
3. Зубов В. И. Колебания в нелинейных и управляемых системах. Судпромгиз, 1962.
4. Емельянов С. В., Бермант М. А. К вопросу о построении высококачественных систем автоматического управления объектами с изменяющимися параметрами. ДАН СССР, 1962, т. 145, № 4, 748—751.
5. Барбашин Е. А., Табуева В. А., Эйдинов Р. М. Об устойчивости одной системы регулирования с переменной структурой при нарушении условий скольжения. Автоматика и телемеханика, 1963, т. 14, № 7, 882—890.
6. Емельянов С. В. и Таран В. А. Об одном классе систем автоматического регулирования с переменной структурой. Изв. АН СССР. ОТН, Энергетика и автоматика, 1962, № 3, 183—188.
7. Геращенко Е. И. Об устойчивости движения в гиперплоскости скольжения для некоторых систем автоматического регулирования с переменной структурой. Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1963, № 4, 157—163.

СРАВНЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ, ПОСТРОЕННЫХ МЕТОДОМ ПУАНКАРЕ И МЕТОДОМ КРЫЛОВА—БОГОЛЮБОВА

А. П. Проскуряков

(Москва)

Метод малого параметра Пуанкаре и асимптотический метод Крылова — Боголюбова принадлежат к числу основных методов исследования нелинейных колебаний. Метод Пуанкаре разработан применительно к стационарным (периодическим) колебаниям [1], хотя он может быть распространен и на нестационарные колебания (см. напр. [2]). Метод Крылова — Боголюбова служит, в первую очередь, для исследования нестационарных колебаний, но, конечно, он полностью приложим и к периодическим колебаниям [3].

Иногда утверждают, что эти методы принципиально различны между собой. Так, например, в методе Пуанкаре требуется сходимость рядов по малому параметру, представляющих периодические решения. Наоборот, при изложении метода Крылова — Боголюбова подчеркивается, что вопрос о сходимости разложений по малому параметру вообще не ставится и что эти ряды бывают в некоторых случаях заведомо расходящимися. При этом указывают, что используемые разложения служат лишь для построения асимптотических приближений с любой степенью точности при условии стремления малого параметра к нулю.

В настоящей заметке рассматриваются периодические решения квазилинейных систем с одной степенью свободы, причем выкладки приведены только для автономных систем. Сравниваются между собой несколько первых членов разложений, полученных по обоим методам.

1. Рассмотрим автономную колебательную систему

$$x^{\cdot\cdot} + \omega^2 x = \mu f(x, x^\cdot) \qquad (\ )^\cdot = d/dt \tag{1.1}$$

Пусть функция $f(x,x^\cdot)$ является полиномом или аналитической функцией своих аргументов в некоторой области их изменения; μ — малый параметр.

Согласно методу Крылова — Боголюбова, решение ищется в виде разложения по малому параметру (обозначения несколько изменены)

$$x = a\cos\psi + \mu u_1(a, \psi) + \mu^2 u_2(a, \psi) + \ldots \tag{1.2}$$

в котором величины a и ψ удовлетворяют уравнениям

$$a^\cdot = \mu A_1(a) + \mu^2 A_2(a) + \ldots, \qquad \psi^\cdot = \omega + \mu B_1(a) + \mu^2 B_2(a) + \ldots \tag{1.3}$$

Функции $u_n(a, \psi)$ представляют собой периодические функции ψ с периодом 2π, не содержащие первых гармоник по ψ. Никаких начальных условий не выдвигается. Для периодических колебаний имеем

$$a^\cdot = 0, \qquad \psi^\cdot = \text{const}$$

Следовательно, если принять, что $\psi = 0$ при $t = 0$, то

$$\psi = t[\omega + \mu B_1(a) + \mu^2 B_2(a) + \ldots] \tag{1.4}$$

Представим амплитуду первой гармоники a в виде разложения

$$a = a_0 + a_1\mu + a_2\mu^2 + \ldots \tag{1.5}$$

Тогда решение уравнения (1.1) может быть представлено в виде

$$x(\psi) = x_0(\psi) + \mu x_1(\psi) + \mu^2 x_2(\psi) + \ldots \tag{1.6}$$

причем коэффициенты этого разложения будут периодическими функциями ψ с периодом 2π. Для первых трех коэффициентов получим выражения (1.7)

$$x_0(\psi) = a_0\cos\psi, \quad x_1(\psi) = a_1\cos\psi + u_1(a_0, \psi), \quad x_2(\psi) = a_2\cos\psi + a_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial a}\right)_{a=a_0} + u_2(a_0, \psi)$$

Заметим, что в [3] под n-м приближением понимается сумма первых n членов ряда (1.6). Например, для 3-го приближения имеем

$$x^{(3)}(\psi) = x_0(\psi) + \mu x_1(\psi) + \mu^2 x_2(\psi) = (a_0 + a_1\mu + a_2\mu^2)\cos\psi + \mu u_1(a_0 + a_1\mu, \psi) + \mu^2 u_2(a_0, \psi)$$

где ψ берется в каждом члене с нужной точностью.

Величины $A_n(a)$ и $B_n(a)$ определяются формулами

$$A_n(a) = -\frac{1}{2\pi\omega}\int_0^{2\pi} f_{n-1}(a, \psi)\sin\psi\, d\psi, \qquad B_n(a) = -\frac{1}{2\pi\omega a}\int_0^{2\pi} f_{n-1}(a, \psi)\cos\psi\, d\psi \tag{1.8}$$

Функции $f_n(a, \psi)$ при $n = 0, 1, 2$ имеют следующий вид:

$$f_0(a, \psi) = f(a\cos\psi, -\omega a\sin\psi)$$

$$f_1(a, \psi) = u_1 f_x' + \left(A_1\cos\psi - aB_1\sin\psi + \omega\frac{\partial u_1}{\partial\psi}\right) f_{x^\cdot}' + \left(aB_1^2 - A_1\frac{dA_1}{da}\right)\cos\psi +$$
$$+ A_1\left(2B_1 + a\frac{dB_1}{da}\right)\sin\psi - 2\omega A_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial a\,\partial\psi} - 2\omega B_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial\psi^2}$$

$$f_2(a, \psi) = \frac{1}{2}u_1^2 f_{xx}'' + u_1\left(A_1\cos\psi - aB_1\sin\psi + \omega\frac{\partial u_1}{\partial\psi}\right) f_{xx^\cdot}'' +$$
$$+ \frac{1}{2}\left(A_1\cos\psi - aB_1\sin\psi + \omega\frac{\partial u_1}{\partial\psi}\right)^2 f_{x^\cdot x^\cdot}'' + u_2 f_x' +$$
$$+ \left(A_2\cos\psi - aB_2\sin\psi + A_1\frac{\partial u_1}{\partial a} + B_1\frac{\partial u_1}{\partial\psi} + \omega\frac{\partial u_2}{\partial\psi}\right) f_{x^\cdot}' +$$
$$+ \left(2aB_1B_2 - A_1\frac{dA_2}{da} - A_2\frac{dA_1}{da}\right)\cos\psi +$$
$$+ \left(2A_1B_2 + 2A_2B_1 + aA_1\frac{dB_2}{da} + aA_2\frac{dB_1}{da}\right)\sin\psi + \ldots$$

Невыписанные члены в последней формуле содержат частные производные функций $u_1(a, \psi)$ и $u_2(a, \psi)$ с коэффициентами, зависящими только от a.

В предыдущих формулах все производные от функции $f(x, x^{\cdot})$ вычисляются при $x = a\cos\psi$, $x^{\cdot} = -\omega a \sin\psi$. Кроме того, в этих формулах, как и в дальнейшем, под величиной a подразумевается значение этой величины при $\mu = 0$, т. е. $a = a_0$.

Функции $u_n(a, \psi)$ являются решениями дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial\psi^2} + u_n = \frac{1}{\omega^2}\left[f_{n-1}(a, \psi) + 2\omega A_n \sin\psi + 2\omega a B_n \cos\psi\right] \tag{1.9}$$

Рассмотрим теперь построение периодических решений уравнения (1.1) по методу Пуанкаре. Для автономных систем решения обычно строятся при начальном условии $x^{\cdot}(0) = 0$. Коэффициенты ряда (1.6) получаются при этом в следующем виде [4]

$$x_0(\psi) = A_0^* \cos\psi, \quad x_1(\psi) = A_1^* \cos\psi + C_1(\psi) - h_1 A_0^* \psi \sin\psi$$

$$\begin{aligned} x_2(\psi) = A_2^* \cos\psi + C_2(\psi) + A_1^* \frac{\partial C_1(\psi)}{\partial A_0^*} + h_1\psi C_1'(\psi) - \\ - (h_2 A_0^* + h_1 A_1^*)\psi \sin\psi - \frac{1}{2} h_1^2 A_0^* \psi^2 \cos\psi \end{aligned} \tag{1.10}$$

Функции $C_n(\psi)$ определяются формулой

$$C_n(\psi) = \frac{1}{\omega^2}\int_0^{\psi} H_n(\psi_1)\sin(\psi - \psi_1)\,d\psi_1 \tag{1.11}$$

причем для $n = 1, 2, 3$ имеем

$$H_1(\psi) = f(A_0^* \cos\psi, -\omega A_0^* \sin\psi)$$

$$H_2(\psi) = f_x' C_1(\psi) + \omega f_{x^{\cdot}}' C_1'(\psi)$$

$$\begin{aligned} H_3(\psi) = {}^1/_2 f_{xx}'' C_1^2(\psi) + \omega f_{xx^{\cdot}}'' C_1(\psi) C_1'(\psi) + {}^1/_2\omega^2 f_{x^{\cdot}x^{\cdot}}'' C_1'^2(\psi) + \\ + f_x' C_2(\psi) + \omega f_{x^{\cdot}}' C_2'(\psi) \end{aligned}$$

Заметим, что при построении ряда (1.6) по методу Пуанкаре используется преобразование независимого переменного

$$\omega t = \psi(1 + h_1\mu + h_2\mu^2 + \ldots) \tag{1.12}$$

Коэффициенты h_1, h_2 и h_3 имеют следующие значения

$$h_1 = \frac{1}{2\pi} N_1, \qquad h_2 = \frac{1}{2\pi}\left(A_1^* \frac{\partial N_1}{\partial A_0^*} + N_2\right) \tag{1.13}$$

$$h_3 = \frac{1}{2\pi}\left(A_2^* \frac{\partial N_1}{\partial A_0^*} + \frac{1}{2} A_1^{*2} \frac{\partial^2 N_1}{\partial A_0^{*2}} + A_1^* \frac{\partial N_2}{\partial A_0^*} + N_3\right)$$

В этих формулах обозначено

$$N_1 = \frac{1}{A_0^*} C_1'(2\pi), \quad N_2 = \frac{1}{A_0^*}\left[C_2'(2\pi) + \frac{1}{\omega^2} N_1 H_1(2\pi)\right]$$

$$\begin{aligned} N_3 = \frac{1}{A_0^*}\Big\{C_2'(2\pi) + \frac{1}{\omega^2} N_2 H_1(2\pi) - N_1\Big[C_2(2\pi) + \\ + \frac{1}{3A_0^*} C_1'^2(2\pi) - \frac{1}{2\omega^2 A_0^*} H_1'(2\pi) C_1'(2\pi) - \frac{1}{\omega^2} H_2(2\pi)\Big]\Big\} \end{aligned}$$

Из формулы (1.12) получаем

$$\psi = \omega t\left[1 - h_1\mu + (h_1^2 - h_2)\mu^2 - (h_1^3 - 2h_1h_2 + h_3)\mu^3 + \ldots\right] \tag{1.14}$$

2. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ в правых частях формул (1.4) и (1.14), находим

$$-\omega h_1 = B_1(a), \qquad \omega(h_1^2 - h_2) = a_1 \frac{dB_1}{da} + B_2(a) \tag{2.1}$$

$$-\omega(h_1^3 - 2h_1h_2 + h_3) = a_2 \frac{dB_1}{da} + \frac{1}{2} a_1^2 \frac{d^2B_1}{da^2} + a_1 \frac{dB_2}{da} + B_3(a)$$

Для установления связи между функциями $C_1(\psi)$ и $u_1(a, \psi)$ проинтегрируем уравнение (1.9) при $n = 1$. Учитывая формулу (1.11), получим

$$C_1(\psi) = u_1(a, \psi) - u_1(a, 0)\cos\psi - \left(\frac{\partial u_1}{\partial \psi}\right)_{\psi=0} \sin\psi -$$
$$- \frac{1}{\omega} A_1(a)(\sin\psi - \psi\cos\psi) - \frac{a}{\omega} B_1(a)\psi\sin\psi \tag{2.2}$$

Если в этом соотношении положить $\psi = 2\pi$, то

$$C_1(2\pi) = (2\pi / \omega) A_1(a) \tag{2.3}$$

Далее продифференцируем равенство (2.2) по ψ и положим в нем $\psi = 2\pi$. Тогда

$$C_1'(2\pi) = (-2\pi a / \omega) B_1(a) \tag{2.4}$$

Формулы (2.3) и (2.4) можно получить непосредственно из (1.8).

В методе Пуанкаре коэффициент $A_0{}^*$ находится из уравнения

$$C_1(2\pi) = 0$$

Соответственно в методе Крылова—Боголюбова коэффициент a_0 определяется из уравнения

$$A_1(a_0) = 0$$

На основании соотношения (2.3) будем иметь

$$A_0{}^* = a_0 \tag{2.5}$$

Следовательно, первое приближение $x_0(\psi)$ в обоих методах совпадает между собой. Учитывая формулы (1.13) и (2.4), легко видеть, что первое соотношение (2.1) обращается в тождество.

В дальнейшем будем предполагать, что $A_0{}^*$, а следовательно и a_0, будут простыми корнями уравнений, из которых они определяются.

Вычисляя функции $A_2(a)$ и $B_2(a)$ по формулам (1.8), получим после некоторых преобразований

$$A_2(a) = \frac{\omega}{2\pi}\left[C_2(2\pi) + \frac{\partial C_1}{\partial A_0{}^*} u_1(a, 0) + \frac{1}{2A_0{}^*} C_1'^2(2\pi)\right]$$

$$B_2(a) = -\frac{\omega}{2\pi a}\left\{C_2'(2\pi) + \frac{\partial C_1'}{\partial A_0{}^*} u_1(a, 0) - \frac{1}{2\pi A_0{}^*} C_1'^2(2\pi) -\right.$$
$$\left. - \frac{1}{A_0{}^*}\left[u_1(a, 0) - \frac{1}{\omega^2} f_0(a, 0)\right] C_1'(2\pi)\right\} \tag{2.6}$$

Для определения коэффициента $A_1{}^*$ в методе Пуанкаре имеем уравнение

$$A_1{}^* \frac{\partial C_1}{\partial A_0{}^*} + C_2(2\pi) + \frac{1}{2A_0{}^*} C_1'^2(2\pi) = 0$$

Аналогичное уравнение для a_1 в методе Крылова — Боголюбова будет

$$a_1 \frac{dA_1}{da} + A_2(a) = 0$$

Учитывая выражения для $A_1(a)$ и $A_2(a)$, получим соотношение между $A_1{}^*$ и a_1

$$A_1{}^* = a_1 + u_1(a_0, 0) \tag{2.7}$$

Сравним коэффициенты при μ в разложении (1.6), получающиеся по обоим методам. Для этого во вторую формулу (1.10) подставим величины A_1^*, $C_1(\psi)$ и h_1 из соответствующих формул. Получим

$$x_1(\psi) = a_1 \cos\psi + u_1(a, \psi) - \left(\frac{\partial u_1}{\partial \psi}\right)_{\psi=0} \sin\psi$$

С другой стороны, по методу Крылова — Боголюбова имеем для $x_1(\psi)$ формулу (1.7).

Однако сравнение периодических решений необходимо проводить при одинаковых начальных условиях. Примем, что периодическое решение по методу Крылова — Боголюбова строится также при начальном условии $x^{\cdot}(0) = 0$. Тогда

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial \psi}\right)_{\psi=0} = 0 \tag{2.8}$$

При этом функция $x_1(\psi)$, определенная по обоим методам, будет одна и та же. Легко проверить, что второе равенство (2.1) обращается в тождество, если подставить значения всех входящих в него величин.

Далее проинтегрируем уравнение (1.9) при $n = 2$. Учитывая формулу (1.11), получим

$$\begin{aligned} C_2(\psi) &= u_2(a, \psi) - u_2(a, 0)\cos\psi - \left(\frac{\partial u_2}{\partial \psi}\right)_{\psi=0} \sin\psi - \\ &- \frac{\partial C_1(\psi)}{\partial A_0^*} u_1(a, \psi) + \frac{1}{\omega} B_1(a)\psi \frac{\partial u_1}{\partial \psi} - \frac{a}{2\omega^2} B_1^2(a)\psi^2\cos\psi + \\ &+ \frac{1}{\omega} A_2(a)(\psi\cos\psi - \sin\psi) - \frac{a}{\omega} B_2(a)\psi\sin\psi \end{aligned} \tag{2.9}$$

Вычислим теперь коэффициенты $A_3(a)$ и $B_3(a)$. После громоздких преобразований получим

$$\begin{aligned} A_3(a) &= \frac{\omega}{2\pi}\left[C_3(2\pi) + \frac{\partial C_2}{\partial A_0^*} u_1(a, 0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C_1}{\partial A_0^{*2}} u_1^2(a, 0) + \frac{\partial C_1}{\partial A_0^*} u_2(a, 0)\right] + \\ &+ \frac{1}{\omega} B_1 A_2 - \frac{\pi}{\omega} A_2 \frac{dA_1}{da} - A_2 \frac{\partial u_1(a, 0)}{\partial a} + \frac{2\pi a}{\omega} B_1 B_2 - \frac{2\pi a}{\omega^2} B_1^3 + \\ &+ \frac{\pi}{\omega} B_1^2 \left[u_1(a, 0) - \frac{1}{\omega^2} f_0(a, 0)\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_3(a) &= -\frac{\omega}{2\pi a}\left[C_3'(2\pi) + \frac{\partial C_2'}{\partial A_0^*} u_1(a, 0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C_1'}{\partial A_0^{*2}} u_1^2(a, 0) + \frac{\partial C_1'}{\partial A_0^*} u_2(a, 0)\right] - \\ &- \frac{1}{a} B_1\left[u_2(a, 0) - \frac{1}{\omega^2} f_1(a, 0)\right] + \frac{1}{a}\left(\frac{1}{\omega} B_1^2 - B_2\right)\left[u_1(a, 0) - \frac{1}{\omega^2} f_0(a, 0)\right] + \\ &+ \frac{1}{a} A_2 \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial a\, \partial \psi}\right)_{\psi=0} + \frac{1}{a\omega} A_2 \frac{dA_1}{da} - \frac{\pi}{\omega} A_2 \frac{dB_1}{da} - \frac{2\pi}{a\omega} A_2 B_1 + \frac{2}{\omega} B_1 B_2 + \\ &+ \frac{2}{\omega^2} B_1^3 \left(\frac{\pi^2}{3} - 1\right) + \frac{2}{a\omega} B_1^2 \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2}\right)_{\psi=0} + \frac{\pi}{a\omega^3} B_1^2 \left(\frac{\partial f_0}{\partial \psi}\right)_{\psi=0} \end{aligned} \tag{2.10}$$

Коэффициент A_2^* определяется в методе Пуанкаре из уравнения

$$\begin{aligned} &A_2^* \frac{\partial C_1}{\partial A_0^*} + \frac{1}{2} A_1^{*2} \frac{\partial^2 C_1}{\partial A_0^{*2}} + A_1^* \left[\frac{\partial C_2}{\partial A_0^*} + \frac{1}{A_0^*}\frac{\partial C_1'}{\partial A_0^*} C_1'(2\pi) - \frac{1}{2A_0^{*2}} C_1'^2(2\pi)\right] + \\ &+ C_3(2\pi) + \frac{1}{A_0^*} C_2'(2\pi) C_1'(2\pi) + \frac{1}{2\omega^2 A_0^{*2}} H_1(2\pi) C_1'^2(2\pi) = 0 \end{aligned}$$

Уравнение для коэффициента a_2 в методе Крылова — Боголюбова будет

$$a_2 \frac{dA_1}{da} + \frac{1}{2} a_1^2 \frac{d^2 A_1}{da^2} + a_1 \frac{dA_2}{da} + A_3(a) = 0$$

Из сравнения левых частей этих уравнений получаем

$$A_2^* = a_2 + a_1 \frac{\partial u_1(a_0, 0)}{\partial a_0} + u_2(a_0, 0) \tag{2.11}$$

Подставим в третью формулу (1.10) все входящие в нее величины. Получим после преобразований

$$x_2(\psi) = a_2 \cos\psi + a_1 \frac{\partial u_1}{\partial a} + u_2(a, \psi) - \left[a_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial a\, \partial\psi} + \frac{\partial u_2}{\partial\psi}\right]_{\psi=0} \sin\psi$$

Функция $x_2(\psi)$ по методу Крылова — Боголюбова определяется формулой (1.7). Если учесть начальное условие для этой функции, то

$$\left[a_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial a\, \partial\psi} + \frac{\partial u_2}{\partial\psi}\right]_{\psi=0} = 0 \tag{2.12}$$

Следовательно, значения функции $x_2(\psi)$, определенные по двум методам, полностью совпадают друг с другом.

Нетрудно проверить, что третье равенство (2.1), так же как и предыдущие, обращается в тождество.

Таким образом, все три приближения, полученные по двум методам, полностью совпадают между собой. Очевидно, что и любые приближения, полученные указанными методами, тоже будут совпадать одно с другим.

Для квазилинейных неавтономных систем также было проведено сравнение двух приближений в случае главного резонанса. Как и для автономных систем, совпадение оказалось полным.

Подобное сравнение для систем с несколькими степенями свободы приведет, очевидно, к аналогичным результатам. В частности, по методу Пуанкаре для одночастотных колебаний квазилинейных автономных систем, описываемых уравнениями 2-го порядка, задача построения периодических решений может быть сведена к задаче с одной степенью свободы с дополнительным вычислением некоторых добавочных функций [5]. Несколько иным способом решается та же задача по методу Крылова—Боголюбова [3]. Первое приближение, полученное по обоим методам, совпадает. Сравнение других приближений не было проведено из-за громоздкости вычислений. Однако в этом нет необходимости, так как такое сравнение может скорее служить проверкой правильности приложения того или иного метода к указанной задаче, но не для сравнения самих методов.

Общий вывод из предыдущего таков: метод малого параметра Пуанкаре и асимптотический метод Крылова—Боголюбова в применении к задаче построения периодических колебаний квазилинейных систем являются в определенном смысле эквивалентными методами. Это означает, что одинаковые приближения, вычисленные по обоим методам, будут совпадать.

Поступила 16 III 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. Гостехиздат, 1956.
2. Бахмутский В. Ф. О применении метода Пуанкаре для исследования неустановившихся колебаний. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1961, № 3.
3. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Физматгиз, 1958.
4. Проскуряков А. П. Построение периодических решений автономных систем с одной степенью свободы в случае произвольных вещественных корней уравнения основных амплитуд. ПММ, 1958, т. 22, вып. 4.
5. Проскуряков А. П. К построению периодических решений квазилинейных систем с несколькими степенями свободы. ПММ, 1962, т. 26. вып. 2.