О СТАБИЛИЗАЦИИ СИСТЕМ РЕГУЛИРОВАНИЯ

Е. А. Барбашин, Е. И. Геращенко

(Свердловск)

Рассматривается, на базе метода функций Ляпунова, общий подход к описанию возможных способов стабилизации систем автоматического управления. Предполагается, что передаточная функция объекта имеет $n - 1$ полюсов в левой полуплоскости и один простой нулевой полюс. Указывается метод выбора параметров, обеспечивающих асимптотическую устойчивость систем переменной структуры с ограничителем.

1. Пусть система регулирования описывается системой дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$x_i^{\cdot} = a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n \qquad (i = 1, \ldots, n) \qquad \left(( )^{\cdot} = \frac{d}{dt}\right) \tag{1.1}$$

Предположим, что характеристическое уравнение системы (1.1) имеет один нулевой корень и $n - 1$ корней с отрицательными вещественными частями.

Поставим задачу описания возможных методов коррекции системы регулирования, обеспечивающих асимптотическую устойчивость при любых начальных возмущениях. Эта задача представляет интерес, так как в приложениях часто встречаются системы, у которых передаточная функция объекта регулирования имеет простой нулевой полюс. С математической точки зрения метод рассуждения, приводимый здесь, аналогичен рассуждениям, проводимым при исследовании вопросов устойчивости в критическом случае одного нулевого корня ([1], стр. 140).

Для определенности предположим в дальнейшем, что среди неравных нулю миноров $n - 1$-го порядка матрицы A, составленной из коэффициентов системы, имеется по крайней мере один, составленный из коэффициентов, входящих в последние $n - 1$ уравнений системы (1.1). Наряду с системой (1.1), рассмотрим систему

$$x_i^{\cdot} = a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n - u(x_1, \ldots, x_n)\,\varphi_i(x_1, \ldots, x_n) \tag{1.2}$$

где функции $\varphi_i(x_1, \ldots, x_n)$ заданы, а функция $u(x_1, \ldots, x_n)$ подлежит определению.

Как известно, существует неособое линейное преобразование

$$y = b_1x_1 + \ldots + b_nx_n, \quad y_i = b_{i1}x_1 + \ldots + b_{in}x_n \qquad (i = 1, \ldots, n - 1, \ b_n \neq 0)$$

переводящее систему (1.1) в систему дифференциальных уравнений

$$y^{\cdot} = 0, \qquad y_i^{\cdot} = p_{i1}y_1 + \ldots + p_{i,n-1}y_{n-1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n - 1) \tag{1.3}$$

Указанное преобразование переведет систему (1.2) в систему

$$\begin{aligned} y^{\cdot} &= -u(b_1\varphi_1 + \ldots + b_n\varphi_n) \\ y_i^{\cdot} &= p_{i1}y_1 + \ldots + p_{i,n-1}y_{n-1} - u(b_{i1}\varphi_1 + \ldots + b_{in}\varphi_n) \end{aligned} \tag{1.4}$$

Так как корни характеристического уравнения матрицы P, составленной из коэффициентов p_{ik} $(i = 1, \ldots, n - 1, \ k = 1, \ldots, n - 1)$, имеют отрицательные вещественные части, то для любой определенно-отрицательной формы $w(y_1, \ldots, y_{n-1})$ переменных $y_1, \ldots, y_{n-1}$ существует определенно-положительная форма $v_1(y_1, \ldots, y_{n-1})$ этих же переменных такая, что в силу системы (1.3) получим

$$\frac{dv_1}{dt} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial v_1}{\partial y_i}(p_{i1}y_1 + \ldots + p_{i,n-1}y_{n-1}) = w(y_1, \ldots, y_{n-1}) \tag{1.5}$$

Рассмотрим квадратичную форму

$$v(y_1, \ldots, y_{n-1}, y) = v_1(y_1, \ldots, y_{n-1}) + {}^1/_2\, y^2 \tag{1.6}$$

и найдем ее производную в силу системы (1.4)

$$\frac{dv}{dt} = w(y_1, \ldots, y_{n-1}) - u\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial v_1}{\partial y_i}b_{ik} + b_ky\right)\varphi_k \tag{1.7}$$

Наложим теперь дополнительное ограничение на функции φ_k, а именно, потребуем, чтобы при $y_1 = y_2 = \ldots = y_{n-1} = 0$, $y \neq 0$ выполнялось неравенство

$$b_1\varphi_1 + \ldots\ldots + b_n\varphi_n \neq 0.$$

В этом случае условие

$$\operatorname{sign} u = \operatorname{sign} \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial v_1}{\partial y_i} b_{ik} + b_k y \right) \varphi_k \tag{1.8}$$

является, очевидно, достаточным условием асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1.2). Так как в правой части в круглых скобках стоит линейная форма переменных $y_1, \ldots, y_{n-1}, y$, то это условие, возвращаясь к старым переменным, можно переписать в виде

$$\operatorname{sign} u = \operatorname{sign} \sum_{k=1}^{n} (c_{k1}x_1 + \ldots + c_{kn}x_n)\varphi_k \tag{1.9}$$

Интересно рассмотреть случай, когда функция $u(x_1, \ldots, x_n)$, представляющая собой управление системы регулирования, принадлежит заранее заданному классу функций ([3], стр. 608).

Пусть, например, функция u удовлетворяет условию $|u| \leqslant 1$, и пусть, кроме того, $\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_{n-1} \equiv 0$, $\varphi_n = \varphi$. Если из условия (1.9) будем искать функцию u, обеспечивающую наиболее быстрое убывание функции Ляпунова [2, 3] v вдоль траекторий системы (1.2), то получим

$$u = \operatorname{sign}(c_1x_1 + \ldots + c_nx_n)\,\varphi(x_1, \ldots, x_n) \tag{1.10}$$

таким образом, управление u будет кусочно-постоянной функцией, и при $\varphi \equiv 1$ система будет чисто релейной.

Рассмотрим случай, когда функция φ задана соотношениями

$$\varphi = Kx_n \quad \text{при } |Kx_n| \leqslant H, \qquad \varphi = H \operatorname{sign} x_n \quad \text{при } |Kx_n| > H$$

где K и H — положительные постоянные. Из (1.10) следует, что

$$u = \operatorname{sign}(c_1x_1 + \ldots + c_nx_n)\,x_n$$

Таким образом, в данном случае получаем коррекцию системы регулирования с ограничителем на входе. Если $K = \infty$, то получим чисто релейную систему. При $H = \infty$ и K конечном получаем класс систем регулирования (систем с переменной структурой), изучавшихся в последнее время в ряде работ [4, 5].

Важно отметить, что при описанном выше способе выбора величин c_i рассматриваемые системы будут асимптотически устойчивыми при любых положительных значениях коэффициента усиления K и величины H, в то время как в ряде других случаев, когда передаточная функция системы имеет полюсы в правой полуплоскости, стабилизация системы осуществляется путем выбора достаточно большого значения K [5]. С другой стороны, из (1.7) следует, что увеличение K и H ведет к улучшению качества переходного процесса.

2. Следуя А. М. Ляпунову ([1], стр. 140), укажем сейчас способ построения линейного преобразования, переводящего систему (1.1) в систему (1.3). Определим сначала величину $y = b_1x_1 + \ldots + b_nx_n$ $(b_n = 1)$ таким образом, чтобы в силу системы (1.1) имело место равенство

$$y^{\boldsymbol{\cdot}} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} b_i a_{ik} x_k = 0 \tag{2.1}$$

Условие (2.1) приводит к системе уравнений

$$a_{1k}b_1 + \ldots + a_{nk}\,b_n = 0 \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{2.2}$$

которая, очевидно, обладает требуемым решением, так как ранг матрицы A равен $n - 1$. Далее полагаем

$$y_i = x_i - d_i y \qquad (i = 1, \ldots, n - 1)$$

и находим коэффициенты d_i из условия независимости $y_i^{\cdot}$ от переменной y. Несложные выкладки приводят к системе

$$y_i^{\cdot} = \sum_{k=1}^{n-1} (a_{ik} - a_{in}b_k)\, y_k + \left[\sum_{k=1}^{n-1} (a_{ik} - a_{in}b_k)\, d_k + a_{in}\right] y$$
$$(i = 1, \ldots, n-1) \tag{2.3}$$

Приравнивая нулю коэффициенты при y, получаем для определения d_k систему

$$\sum_{k=1}^{n-1} (a_{ik} - a_{in}b_k)\, d_k + a_{in} = 0 \quad (i = 1, \ldots, n-1) \tag{2.4}$$

которая имеет решение, так как ее определитель отличен от нуля. В самом деле, переход от координат $x_1, \ldots, x_n$ к координатам $y, y_1, \ldots, y_{n-1}$ не меняет ранга матрицы, составленной из коэффициентов системы. Ранг матрицы, составленной из коэффициентов системы (2.3) (в совокупности с уравнением $y^{\cdot} = 0$), равен $n - 1$, причем $\det (a_{ik} - a_{in}b_k) \neq 0$, так как в противном случае характеристическое уравнение этой системы имело бы, по крайней мере, еще один нулевой корень.

Таким образом, искомое преобразование имеет вид

$$y = b_1x_1 + \ldots + b_nx_n, \qquad y_i = x_i - d_i(b_1x_1 + \ldots + b_nx_n)$$
$$(i = 1, 2, \ldots) \tag{2.5}$$

где d_i и b_k определяются из систем (2.2) и (2.4).

Рассмотрим далее случай, когда система регулирования описывается уравнением

$$L(p)\, x = -u(x, x^{\cdot}, x^{\cdot\cdot}, \ldots, x^{(n-1)})\, \varphi(x, x^{\cdot}, x^{\cdot\cdot}, \ldots, x^{(n-1)}) \tag{2.6}$$
$$\left(L(p) = p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_{n-1}p, \qquad p = \frac{d}{dt}\right)$$

причем уравнение

$$\lambda^{n-1} + a_1\lambda^{n-2} + \ldots + a_{n-1} = 0$$

имеет только корни с отрицательными вещественными частями.

Уравнение (2.6) можно представить в виде системы

$$x_i^{\cdot} = x_{i+1} (i = 1, \ldots, n-1), \qquad x_1 = x$$
$$x_n^{\cdot} = -a_{n-1}x_2 - \ldots - a_1x_n - \qquad u(x_1, \ldots, x_n)\, \varphi(x_1, \ldots, x_n) \tag{2.7}$$

Из системы уравнений (2.2) имеем $b_i = a_{n-1}$ при $i = 1, \ldots, n-1$, $b_n = 1$.

Пусть теперь $w(x_2, \ldots, x_n)$ будет произвольной определенно-отрицательной функцией переменных $x_2, \ldots, x_n$, тогда найдется такая определенно-положительная квадратичная форма тех же переменных $v_1(x_2, \ldots, x_n)$, полная производная которой в силу системы

$$x_i^{\cdot} = x_{i+1} \ (i = 2, \ldots, n-1), \qquad x_n^{\cdot} = -a_{n-1}x_2 - \ldots - a_1x_n \tag{2.8}$$

будет равна w. Очевидно, функция v_1 существует, так как корни характеристического уравнения системы (2.8) имеют отрицательные вещественные части.

Рассмотрим функцию

$$v(y, x_2, \ldots, x_n) = v_1(x_2, \ldots, x_n) + {}^1/_2\, y^2 \qquad \left(y = \sum_{i=1}^{n-1} a_{n-i}x_i + x_n\right)$$

Беря от функции v производную в силу системы (2.7), получим

$$\frac{dv}{dt} = w - \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_n} + \sum_{i=1}^{n-1} a_{n-i}x_i + x_n\right) u(x_1, \ldots, x_n)\, \varphi(x_1, \ldots, x_n)$$

Таким образом, в данном случае достаточными условиями асимптотической устойчивости будут соотношения

$$\varphi(x_1, 0, \ldots, 0) \neq 0 \qquad \text{при } x_1 \neq 0$$

$$\operatorname{sign} u = \operatorname{sign} \varphi(x_1, \ldots, x_n) \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_n} + \sum_{k=1}^{n-1} a_{n-k} x_k + x_n \right)$$

Если положить теперь $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = Kx_1$ и искать управление u из класса функций, удовлетворяющих условию $|u| \leqslant 1$, исходя из требования минимума dv / dt, то получим

$$u = \operatorname{sign} x_1 \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_n} + \sum_{k=1}^{n-1} a_{n-k} x_k + x_n \right) \tag{2.9}$$

3. Рассмотрим теперь вопросы стабилизации системы регулирования с несколько иной точки зрения. Положим в системе (2.7)

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = Kx_1 \qquad (K > 0), \qquad u = \operatorname{sign} x_1 \sigma(r, x)$$

$$\sigma(r, x) = c_{n-1}(r) x_1 + c_{n-2}(r) x_2 + \ldots + c_0(r) x_n \tag{3.1}$$

где r — вещественный параметр, а коэффициенты $c_i(r)$ удовлетворяют условиям

$$c_0(r) = 1, \quad c_{i+1}(r) = rc_i(r) + a_{i+1} \quad (i = 0, 1, \ldots, n-2), \quad |r c_{n-1}(r)| \leqslant K \tag{3.1}$$

Известно [6], что условия (3.1) обеспечивают наличие скольжения в любой точке гиперплоскости $\sigma(r, x) = 0$.

Вводя новые координаты $y_i = x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$, $y_n = \sigma(r, x)$, перейдем от системы (2.7) к системе

$$\frac{dy_i}{dt} = y_{i+1} \quad (i = 1, \ldots, n-2), \qquad \frac{dy_{n-1}}{dt} = -\sum_{i=1}^{n-1} c_{n-i}(r) y_i + y_n$$

$$\frac{dy_n}{dt} = ry_n - \alpha K |y_1| \operatorname{sign} y_n \qquad \left(\alpha = 1 + \frac{r}{K} c_{n-1}(r) \operatorname{sign} y_1 y_n \right) \tag{3.2}$$

Из условий (3.1) следует $0 < \alpha < 2$.

Известно [4], что движение в гиперплоскости скольжения описывается системой

$$\frac{dy_i}{dt} = y_{i+1} \quad (i = 1, \ldots, n-2), \qquad \frac{dy_{n-1}}{dt} = -\sum_{i=1}^{n-1} c_{n-i}(r) y_i \tag{3.3}$$

Пусть $r < 0$ и нулевое решение системы (3.3) асимптотически устойчиво. Можно показать, что в этом случае нулевое решение системы (3.2), а следовательно, и системы (2.7) (при $\varphi = Kx_1$, $u = \operatorname{sign} x_1 \sigma(r, x)$) будет асимптотически устойчивым при любых начальных возмущениях.

В самом деле, в силу известной теоремы Ляпунова ([1], стр. 107) существует определенно-положительная квадратичная форма $v_1(y_1, \ldots, y_{n-1})$, полная производная которой, в силу системы (3.3), равна квадратичной форме $w = -y_1^2 - \ldots - y_{n-1}^2$.

Рассмотрим функцию

$$v(y_1, \ldots, y_n) = v_1(y_1, \ldots, y_{n-1}) + {}^1/_2 A y_n^2 \qquad (A > 0)$$

Производная функция v по времени, взятая в силу системы (3.2), имеет вид

$$\frac{dv}{dt} = -\sum_{i=1}^{n-1} y_i^2 + \frac{\partial v_1}{\partial y_{n-1}} y_n + Ary_n^2 - \alpha AK |y_1 y_n| \tag{3.4}$$

Так как $r < 0$, то из критерия Сильвестра следует, что при положительном и достаточно большом значении A квадратичная форма в правой части выражения (3.4) станет определенно-отрицательной. Так как $\alpha > 0$, то можно теперь применить теорему Ляпунова об асимптотической устойчивости.

Заметим, что в формулировке последнего результата, в отличие от предыдущего, не требовалась отрицательность вещественных частей корней уравнения $\lambda^{n-1} + a_1\lambda^{n-2} + \ldots + a_{n-1} = 0$. Однако, если это требование считать выполненным, то в силу второго следствия теоремы 2 статьи [7] существует отрицательное значение r, обеспечивающее асимптотическую устойчивость в гиперплоскости скольжения, следовательно, в этом случае при выбранном способе управления имеет место свойство асимптотической устойчивости в целом нулевого решения системы (2.7).

Поступила 29 II 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Гостехиздат, 1950.
2. Красовский Н. Н. Второй метод Ляпунова в теории устойчивости движения. Тр. Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике. Изд-во АН СССР, 1962, стр. 36—47.
3. Зубов В. И. Колебания в нелинейных и управляемых системах. Судпромгиз, 1962.
4. Емельянов С. В., Бермант М. А. К вопросу о построении высококачественных систем автоматического управления объектами с изменяющимися параметрами. ДАН СССР, 1962, т. 145, № 4, 748—751.
5. Барбашин Е. А., Табуева В. А., Эйдинов Р. М. Об устойчивости одной системы регулирования с переменной структурой при нарушении условий скольжения. Автоматика и телемеханика, 1963, т. 14, № 7, 882—890.
6. Емельянов С. В. и Таран В. А. Об одном классе систем автоматического регулирования с переменной структурой. Изв. АН СССР. ОТН, Энергетика и автоматика, 1962, № 3, 183—188.
7. Геращенко Е. И. Об устойчивости движения в гиперплоскости скольжения для некоторых систем автоматического регулирования с переменной структурой. Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1963, № 4, 157—163.

СРАВНЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ, ПОСТРОЕННЫХ МЕТОДОМ ПУАНКАРЕ И МЕТОДОМ КРЫЛОВА—БОГОЛЮБОВА

А. П. Проскуряков

(Москва)

Метод малого параметра Пуанкаре и асимптотический метод Крылова — Боголюбова принадлежат к числу основных методов исследования нелинейных колебаний. Метод Пуанкаре разработан применительно к стационарным (периодическим) колебаниям [1], хотя он может быть распространен и на нестационарные колебания (см. напр. [2]). Метод Крылова — Боголюбова служит, в первую очередь, для исследования нестационарных колебаний, но, конечно, он полностью приложим и к периодическим колебаниям [3].

Иногда утверждают, что эти методы принципиально различны между собой. Так, например, в методе Пуанкаре требуется сходимость рядов по малому параметру, представляющих периодические решения. Наоборот, при изложении метода Крылова — Боголюбова подчеркивается, что вопрос о сходимости разложений по малому параметру вообще не ставится и что эти ряды бывают в некоторых случаях заведомо расходящимися. При этом указывают, что используемые разложения служат лишь для построения асимптотических приближений с любой степенью точности при условии стремления малого параметра к нулю.

В настоящей заметке рассматриваются периодические решения квазилинейных систем с одной степенью свободы, причем выкладки приведены только для автономных систем. Сравниваются между собой несколько первых членов разложений, полученных по обоим методам.