ОБ ОДНОМ ДВИЖЕНИИ ДИСКА В НЬЮТОНОВСКОМ ПОЛЕ СИЛ

Ю. А. Архангельский

(Москва)

1. Как известно, задача движения тяжелого твердого тела, закрепленного в центре масс и находящегося в ньютоновском поле сил, проинтегрирована в общем случае Коббом [1] и Е. И. Харламовой [2]. Однако из-за сложности аналитического выражения общего решения исследование движения было проведено лишь в немногих частных случаях [2-6].

Ниже исследуется в одном частном случае движение диска

$$A + B = C \tag{1.1}$$

закрепленного в центре масс и находящегося в ньютоновском поле сил.

При условии (1.1) уравнения движения

$$\frac{dp}{dt} + qr = \alpha\gamma'\gamma'', \qquad \frac{dq}{dt} - pr = -\alpha\gamma\gamma'', \qquad \frac{dr}{dt} = \frac{A-B}{C}(pq - \alpha\gamma\gamma')$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = r\gamma' - q\gamma'' \qquad \left(\begin{smallmatrix} p\,q\,r \\ \gamma\gamma'\gamma'' \end{smallmatrix}\right) \qquad \alpha = \frac{3g}{R} \tag{1.2}$$

имеют частное решение

$$p = \sqrt{\alpha}\gamma', \qquad q = \sqrt{\alpha}\gamma, \qquad r = 0 \tag{1.3}$$

для которого четыре первых интеграла системы (1.2) вырождаются в следующие два

$$\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1, \quad \gamma\gamma' = \beta \qquad (\beta = \mathrm{const}) \tag{1.4}$$

Зависимость величины γ от времени находится из уравнения

$$d\gamma \,/\, d\tau = -\sqrt{f(\gamma^2)}, \qquad f(\gamma^2) = -\gamma^4 + \gamma^2 - \beta^2, \qquad \tau = \sqrt{\alpha}\, t \tag{1.5}$$

решение которого имеет вид

$$\gamma = \frac{\mathrm{dn} u}{\lambda}, \qquad u = \beta\mu(\tau - \tau_0), \qquad \lambda^2 = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - 4\beta^2}}, \qquad \mu^2 = \frac{2}{1 - \sqrt{1 - 4\beta^2}} \tag{1.6}$$

Из формул (1.4) получим соотношения

$$\gamma' = \beta\lambda \,/\, \mathrm{dn} u, \qquad \gamma'' = \beta\mu k^2 \,\mathrm{sn} u \,\mathrm{cn} u \,/\, \mathrm{dn} u, \qquad k^2 = 1 - \lambda^2 / \mu^2 \tag{1.7}$$

которые вместе с соотношениями (1.6) и (1.3) дают полное решение задачи в рассматриваемом случае. При этом предполагается, что

$$0 < \beta < 1/2$$

и в выбранной подвижной системе координат в начальный момент времени выполняются условия $\gamma > 0$, $\gamma' > 0$.

2. Для исследования движения будем следить за перемещением в пространстве оси x подвижной системы координат. Тогда углы Эйлера θ, φ, ψ будут определяться в нашем случае из соответствующих формул [7] в виде

$$\cos\theta = \gamma, \qquad d\psi \,/\, d\tau = \beta \,/\, (1 - \gamma^2), \qquad \operatorname{tg}\varphi = \gamma' \,/\, \gamma'' \tag{2.1}$$

Подставив в (2.1) вместо $\gamma, \gamma', \gamma''$ их выражения (1.6), (1.7) и интегрируя (что сводится к вычислению нормального эллиптического интеграла третьего рода), можно получить зависимость углов Эйлера от времени.

Проведем, однако, анализ движения, не пользуясь явными зависимостями углов Эйлера от времени.

Из формул (1.5), (1.6) и (2.1) следует, что на неподвижной единичной сфере с центром в центре масс диска след оси x тела будет описывать кривую между параллелями $\gamma_1 = \lambda^{-1}$ и $\gamma_2 = \mu^{-1}$ на верхней полусфере, удовлетворяющими неравенствам

$$\gamma_2 < 1 \,/\, \sqrt{2} < \gamma_1 \tag{2.2}$$

Пусть V — угол, который образует касательная к траектории оси x на единичной сфере с меридианом. Тогда из формулы [8]

$$\operatorname{tg} V = \beta \,/\, \sqrt{f(\gamma^2)} \tag{2.3}$$

следует, что угол V делается прямым всякий раз, когда принимает значения γ_1 или γ_2 и, следовательно, траектория оси x касается обоих параллелей. Так как $\operatorname{tg} V$ не обращается в нуль, траектория не описывает петли, не имеет точек возврата и представляется плавной кривой, попеременно касающейся верхней и нижней параллелей.

Отношение периода прецессии $T_\psi = 2\pi \,/\, \langle d\psi \,/\, d\tau\rangle$, где

$$\left\langle\frac{d\psi}{d\tau}\right\rangle = \frac{1}{2}\left[\frac{d\psi}{d\tau}(\gamma_1) + \frac{d\psi}{d\tau}(\gamma_2)\right] = \frac{1}{2\beta}$$

есть средняя скорость прецессии [5], к периоду нутации $T_\gamma = 2K(k^2)\,/\beta\mu$, где $K(k^2)$ — полный эллиптический интеграл первого рода, будет

$$T_\psi \,/\, T_\gamma = 2\pi\beta^2\mu \,/\, K(k^2) \tag{2.4}$$

Из формул

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg} V, \qquad d\varphi \,/\, d\tau = 2\beta\,(^1/_2 - \gamma^2)\,[\gamma\,(1-\gamma^2)]^{-1} \tag{2.5}$$

полученных на основании соотношений (1.4), (2.1), (2.3), следует, что по φ диск будет иметь периодическое движение, скорость которого меняет знак при переходе оси x через параллель $\gamma = 1\,/\sqrt{2}$, а величина угла φ будет изменяться в пределах

$$\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \pi - \varphi_1, \qquad \operatorname{tg}\varphi_1 = \beta\,(^1/_4 - \beta^2)^{-1/2} \tag{2.6}$$

3. Рассмотрим предельные случаи $\beta = 0$ и $\beta = 1/2$. При $\beta = 0$ из соотношения (1.4) и уравнения (1.5) получим выражения

$$\gamma = \operatorname{sch}(\tau - \tau_0), \qquad \gamma' = 0, \qquad \gamma'' = \operatorname{th}(\tau - \tau_0) \tag{3.1}$$

подставляя которые в формулы (2.1), будем иметь

$$\cos\theta = \operatorname{sch}(\tau - \tau_0), \qquad \psi = \psi_0, \qquad \varphi = 0 \tag{3.2}$$

Таким образом, движение в этом случае сводится к повороту диска вокруг линии узлов, причем прямой угол с направлением, соединяющим притягивающий центр с неподвижной точкой, достигается за бесконечно большое время. (Отметим, что движение является частным случаем движения физического маятника [6].) При $\beta = {}^1/_2$

$$f(\gamma^2) = -(^1/_2 - \gamma^2)^2 \tag{3.3}$$

и из формул (1.4), (1.5), (2.1) следует

$$\gamma = \gamma' = 1/\sqrt{2}, \quad \gamma'' = 0; \qquad \theta = \varphi = {}^1/_4\,\pi, \qquad \psi - \psi_0 = \tau \tag{3.4}$$

Отсюда вытекает, что в рассматриваемом случае диск будет совершать равномерное вращение вокруг оси, проходящей через неподвижную точку и центр притяжения.

Отметим в заключение, что полученное решение (1.3), (1.6), (1.7) не имеет своего аналога в классическом случае Эйлера, и все эффекты в рассмотренном движении и диска обуславливаются только наличием ньютоновского поля сил.

Поступила 31 I 64

ЛИТЕРАТУРА

1. Kobb G. Sur le pobléme de la rotation d'un corps autor d'un point fixe. Bull. Soc. math., 1895, 23.
2. Харламова Е. И. О движении твердого тела вокруг неподвижной точки в центральном ньютоновском поле сил. Изв. Сиб. отд. АН СССР, 1959, № 6.
3. Stekloff V. A. Remárque sur un probléme de Clebsch sur le mouvement d'un corps solide dans un liquide indèfini et sur le problème de M. de Brun. Compt. rend. 1902, v. 135, p. 526—528.
4. Архангельский Ю. А. Об одном движении уравновешенного гироскопа в ньютоновском поле сил. ПММ, 1963, т. 27, вып. 6.
5. Белецкий В. В. Об одном случае движения твердого тела около закрепленной точки в ньютоновском поле сил. ПММ, 1963, т. 27, вып. 1.
6. Белецкий В. В. Об интегрируемости уравнений движения твердого тела около закрепленной точки под действием центрального ньютоновского поля сил. ДАН СССР, 1957, т. 113, № 2.
7. Сретенский Л. Н. Движение гироскопа Горячева—Чаплыгина. Изв. АН СССР, ОТН, 1957, № 7.
8. Аппель П. Теоретическая механика, т. 2. Физматгиз, 1960.