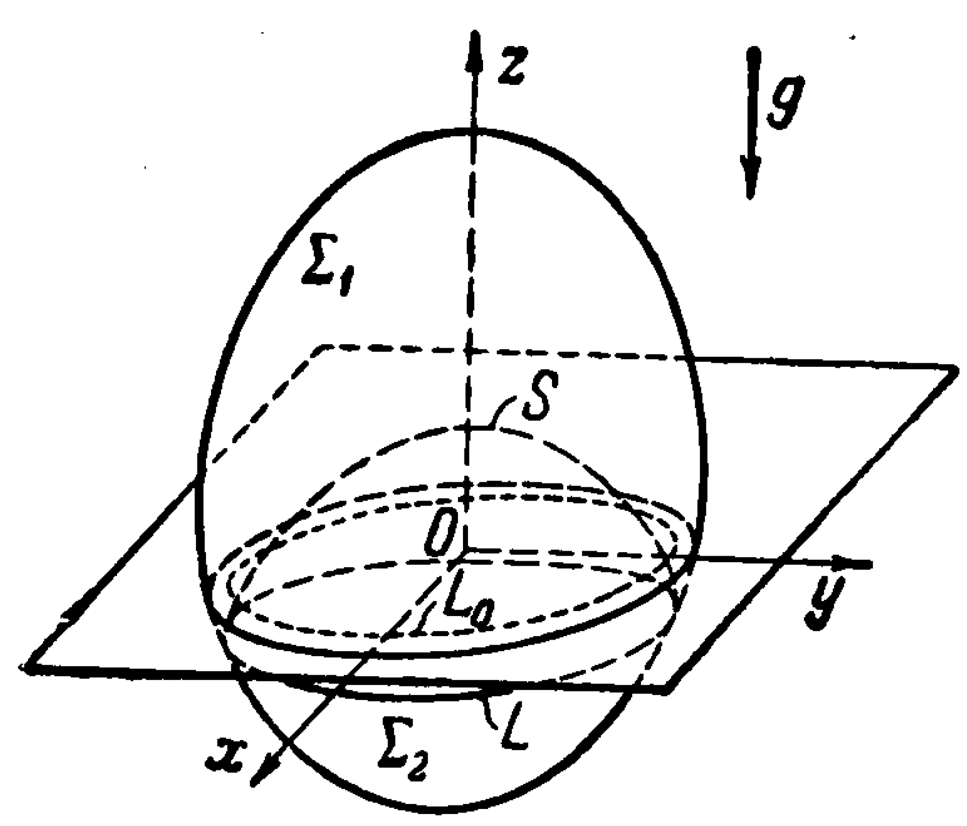
ВАРИАЦИОННАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ В СОСУДЕ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ

А. А. Петров (Москва)

Дается вариационная формулировка нелинейной задачи о колебаниях в сосуде конечных размеров идеальной несжимаемой жидкости под действием сил тяжести и сил поверхностного натяжения. Вариационная формулировка позволяет применить прямые методы к решению этой задачи.

1. Рассмотрим движение идеальной несжимаемой жидкости в сосуде конечных размеров. Жидкость занимает часть сосуда V; другую часть его занимает газ. Предполагаем, что на жидкость действуют силы веса интенсивности g и силы поверхностного натяжения. Обозначим: σ_1 — коэффициент поверхностного натяжения на границе Σ_1 твердое тело — газ, σ_2 — коэффициент поверхностного натяжения на границе Σ_2 твердое тело — жидкость, σ — коэффициент поверхностного натяжения на границе S газ — жидкость.

Введем декартову систему координат $Oxyz$, плоскость xy которой перпендикулярна вектору $\mathbf{g}$, а ось z направлена (фиг. 1) вертикально вверх — против вектора $\mathbf{g}$. Кроме того, для определенности будем считать, что плоскость xy совпадает со средним уровнем жидкости. Проекцию свободной поверхности S на эту плоскость обозначим через S_0; линию пересечения поверхностей S и Σ — через L. Возвышение свободной поверхности над плоскостью $z = 0$ обозначим через $\zeta(x, y, t)$. В положении равновесия $\zeta = \zeta^\circ(x, y)$.



Фиг. 1

Скорость жидкости обозначим через $\mathbf{v}$, а плотность — через ρ. Газ над жидкостью считаем покоящимся, и массой его пренебрегаем.

2. Кинетическая энергия системы равна

$$T = \frac{1}{2}\rho \int_V v^2 dV \tag{2.1}$$

Потенциальная энергия системы при сделанных предположениях может быть записана в виде

$$\Pi = \frac{1}{2}\rho g \int_{S_0} \zeta^2 dS + \sigma S + \sigma_1 \Sigma_1 + \sigma_2 \Sigma_2 \tag{2.2}$$

Она состоит из потенциальной энергии жидкости в поле силы тяжести интенсивности g и свободной энергии на поверхностях раздела Σ_1, Σ_2, S.

Примечание. Следует иметь в виду, что взято выражение для энергии, распределенной на поверхности раздела двух сред, которое справедливо, если эти среды покоятся. Вообще говоря, ниоткуда не следует, что оно будет тем же самым и на границах раздела движущихся сред. Здесь этот вопрос не затрагивается.

Составим функцию Лагранжа для системы

$$L = T - \Pi \tag{2.3}$$

и действие по Гамильтону

$$J = \int_0^{t_1} L\, dt. \tag{2.4}$$

Согласно принципу Гамильтона для действительных движений, интеграл действия (2.4) принимает стационарное значение, т. е. его изохронная вариация обращается в нуль: $\delta J = 0$.

Жидкость, заключенную внутри объема V, будем рассматривать как механическую систему со следующими связями. Течение потенциально, жидкость неразрывна, стенки сосуда непроницаемы, т. е.

$$\mathbf{v} = \nabla\varphi, \qquad \nabla\cdot\mathbf{v} = 0, \qquad \mathbf{v}_n = 0 \tag{2.5}$$

Вертикальная составляющая скорости жидкой частицы на свободной поверхности совпадает со скоростью вертикального смещения самой свободной поверхности [1]

$$d\zeta / dt = v_z \tag{2.6}$$

Объем жидкости остается постоянным, т. е. $V = \mathrm{const}$. Последнее условие изопериметричности можно снять, если вместо функции Лагранжа L рассмотреть функцию

$$L' = L + \rho f V \tag{2.7}$$

в которой величина f не зависит от переменных x, y, z.

Вследствие формул (2.1) — (2.4) и (2.7) интеграл действия можно записать в виде

$$J = \int_0^{t_1} \left\{ \frac{1}{2} \rho \int_V v^2 \, dV + \rho f V - \frac{1}{2} \rho g \int_{S_0} \zeta^2 dS - \sigma S - \sigma_1 \Sigma_1 - \sigma_2 \Sigma_2 \right\} dt \tag{2.8}$$

Таким образом, задача об определении движения жидкости может быть сформулирована следующим образом: среди функций, удовлетворяющих условиям (2.5), (2.6), найти те функции, которые удовлетворяют условию $\delta J = 0$.

3. Покажем, что эта вариационная формулировка эквивалентна обычной формулировке задачи о движении идеальной несжимаемой жидкости в неподвижном сосуде под действием сил тяжести и сил поверхностного натяжения.

Из равенств (2.5), (2.6) следует, что потенциал скорости жидкости $\varphi(x, y, z, t)$ есть гармоническая функция, которая удовлетворяет следующим условиям:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \quad \text{на } \Sigma_2, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \nabla \zeta \cdot \nabla \varphi \quad \text{на } S \tag{3.1}$$

Через n обозначена внешняя нормаль к поверхности сосуда.

Будем вычислять изохронную вариацию интеграла действия (2.8). Заметим, что объем V ограничен поверхностью $\zeta(x, y, t)$ и, следовательно, должен варьироваться. В общем случае сосуд имеет наклонные стенки, поэтому должна варьироваться и площадь фигуры S_0. Кроме того, вследствие второго из условий (3.1) вариации функций φ и ζ на свободной поверхности связаны некоторым соотношением. Возьмем вариацию от обеих частей этого равенства. Так как независимые переменные x, y, z не варьируются, то в результате получим

$$\frac{\partial \delta \zeta}{\partial t} + \nabla \delta \zeta \cdot \nabla \varphi + \nabla \zeta \cdot \nabla \delta \varphi = \frac{\partial \delta \varphi}{\partial z}$$

Это соотношение можно представить в виде

$$\frac{d \delta \zeta}{dt} = \frac{1}{\cos \gamma} \frac{\partial \delta \varphi}{\partial n}, \qquad \frac{1}{\cos \gamma} = \sqrt{1 + (\nabla \zeta)^2} \tag{3.2}$$

Здесь n — внешняя нормаль к свободной поверхности. Соотношение (3.2) дает связь между вариациями $\delta\varphi$ и $\delta\zeta$ на свободной поверхности.

Кроме того, из условия $\Delta \varphi = 0$ и первого из условий (3.1) находим, что

$$\Delta \delta \varphi = 0 \quad \text{в области } V, \qquad \frac{\partial \delta \varphi}{\partial n} = 0 \quad \text{на поверхности } \Sigma_2 \tag{3.3}$$

Теперь приступим к вычислению изохронной вариации интеграла действия (2.8)

$$\delta J = \int_0^{t_1} \left\{ \rho \int_V \nabla \varphi \cdot \nabla \delta \varphi \, dV + \frac{1}{2} \rho \int_{S_0} (\nabla \varphi)^2 \delta \zeta \, dS + \frac{1}{2} \rho \int_{\delta S_0} (\nabla \varphi)^2 \delta \zeta \, dS + \right.$$

$$\left. + \rho f \delta V - \rho g \int_{S_0} \zeta \delta \zeta \, dS - \rho g \int_{\delta S_0} \zeta \delta \zeta \, dS - \sigma \delta S - \sigma_1 \delta \Sigma_1 - \sigma_2 \delta \Sigma_2 \right\} dt \tag{3.4}$$

В последнем равенстве справа под интегралом второй и третий члены появились вследствие того, что объем V и площадь S_0 варьируются. Рассмотрим по очереди все члены, которые входят в выражение δJ.

[1] Это условие будет следствием уравнения неразрывности.

По формуле Грина и при помощи формул (3.3) преобразуем первый интеграл:

$$\int\limits_V \nabla\varphi\cdot\nabla\delta\varphi\, dV = -\int\limits_V \varphi\Delta\delta\varphi\, dV + \int\limits_S \varphi\frac{\partial\delta\varphi}{\partial n}\, dS = \int\limits_{S_0} \frac{1}{\cos\gamma}\varphi\frac{\partial\delta\varphi}{\partial n}\, dS$$

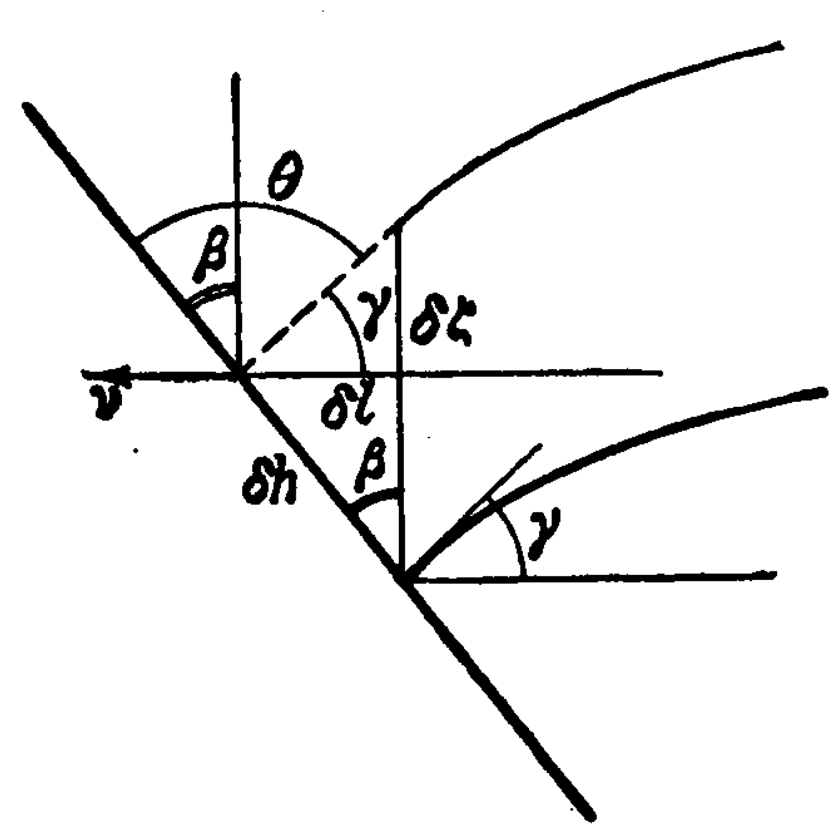
Теперь учтем соотношение (3.2) и получим окончательно

$$\int\limits_V \nabla\varphi\cdot\nabla\delta\varphi\, dV = \int\limits_{S_0} \varphi\frac{d\delta\zeta}{dt}\, dS \qquad (3.5)$$

Оставим без изменения второй интеграл и рассмотрим третий. Из фиг. 2 имеем

$$\int\limits_{\delta S_0} (\nabla\varphi)^2\delta\zeta\, dS = \int\limits_{L_0} (\nabla\varphi)^2\delta\zeta\delta l\, d\lambda$$

Через L_0 обозначен контур, ограничивающий фигуру S_0. Очевидно, что $\delta l \sim \delta\zeta$, если угол наклона стенки сосуда к оси z не слишком мал (т. е. $\operatorname{tg}\beta \sim 1$). Поэтому интеграл имеет порядок $(\delta\zeta)^2$ и может быть опущен. Аналогично можно оценить и опустить шестой член.



Фиг. 2

Рассмотрим четвертый член. Легко видеть, что

$$\delta V = \int\limits_{S_0} \delta\zeta\, dS + \int\limits_{\delta S_0} \delta\zeta\, dS$$

Так же, как и выше, можно показать, что второй интеграл имеет порядок $(\delta\zeta)^2$ и может быть отброшен. Следовательно,

$$\delta V = \int\limits_{S_0} \delta\zeta\, dS \qquad (3.6)$$

Пятый член оставим без изменений и рассмотрим седьмой член. Очевидно, что

$$S = \int\limits_{S_0} \sqrt{1 + (\nabla\zeta)^2}\, dS, \qquad \delta S = \int\limits_{S_0} \frac{\nabla\zeta\cdot\nabla\delta\zeta}{\sqrt{1 + (\nabla\zeta)^2}}\, dS + \int\limits_{\delta S_0} \frac{1}{\cos\gamma}\, dS$$

Интегрируя по частям, нетрудно показать, что

$$\int\limits_{S_0} \frac{\nabla\zeta\cdot\nabla\delta\zeta}{\sqrt{1 + (\nabla\zeta)^2}}\, dS = \int\limits_{L_0} \frac{\partial\zeta}{\partial\nu}\cos\gamma\delta\zeta\, d\lambda - \int\limits_{S_0} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\delta\zeta\, dS$$

где через ν обозначена внешняя нормаль к контуру L_0, а через R_1 и R_2 — главные радиусы кривизны свободной поверхности. При этом удвоенная средняя кривизна

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{[1 + (\nabla\zeta)^2]^{3/2}}\left\{\Delta\zeta + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial\zeta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\zeta\right\}$$

Как видно из фиг. 2,

$$\int\limits_{\delta S_0} \frac{1}{\cos\gamma}\, dS = \int\limits_{L_0} \frac{1}{\cos\gamma}\,\delta l\, d\lambda$$

Но нетрудно показать, что

$$\delta l = \frac{\cos\gamma\sin\beta}{\sin\theta}\,\delta\zeta$$

Кроме того, $\partial\zeta / \partial\nu = -\operatorname{tg}\gamma$. Поэтому

$$\int\limits_{\delta S_0} \frac{1}{\cos\gamma}\, dS = \int\limits_{L_0} \frac{\sin\beta}{\sin\theta}\,\delta\zeta\, d\lambda, \qquad \int\limits_{L_0} \frac{\partial\zeta}{\partial\nu}\cos\gamma\delta\zeta\, d\lambda = -\int\limits_{L_0} \sin\gamma\delta\zeta\, d\lambda$$

Наконец, из фиг. 2 ясно, что

$$\beta = \theta + \gamma - {}^1/_2\pi, \qquad \sin\beta = -\cos(\theta + \gamma)$$

При помощи всех этих формул находим, что

$$\delta S = -\int\limits_{S_0} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \delta\zeta\, dS - \int\limits_{L_0} \frac{\cos\theta \cdot \cos\gamma}{\sin\theta}\, \delta\zeta\, d\lambda \tag{3.7}$$

Вычислим последние два члена выражения (3.4). Так как площадь поверхности сосуда $\Sigma_1 + \Sigma_2$ постоянна, то $\delta\Sigma_1 = -\delta\Sigma_2$. Кроме того, как видно из фиг. 2,

$$\delta\Sigma_2 = \int\limits_{L_0} \delta h\, d\lambda, \qquad \delta h = \frac{\cos\gamma}{\sin\theta}\, \delta\zeta$$

Поэтому

$$\sigma_1 \delta\Sigma_1 + \sigma_2 \delta\Sigma_2 = (-\sigma_1 + \sigma_2) \int\limits_{L_0} \frac{\cos\gamma}{\sin\theta}\, \delta\zeta\, d\lambda \tag{3.8}$$

Таким образом, при помощи формул (3.5) — (3.8) выражение для вариации действия (3.4) можно преобразовать к виду

$$\delta J = \int\limits_0^{t_1} \Big\{ \rho \int\limits_{S_0} \varphi \frac{d\delta\zeta}{dt}\, dS + \frac{1}{2}\rho \int\limits_{S_0} (\nabla\varphi)^2\, \delta\zeta\, dS + \rho f \int\limits_{S_0} \delta\zeta\, dS -$$

$$- \rho g \int\limits_{S_0} \zeta\delta\zeta\, dS + \sigma \int\limits_{S_0} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \delta\zeta\, dS - \int\limits_{L_0} (-\sigma\cos\theta - \sigma_1 + \sigma_2) \frac{\cos\gamma}{\sin\theta}\, \delta\zeta\, d\lambda \Big\}\, dt \tag{3.9}$$

Первый член этого выражения можно проинтегрировать по частям по времени. Тогда, учитывая, что $\delta\zeta = 0$ при $t = 0$ и $t = t_1$, получим

$$\int\limits_0^{t_1} \int\limits_{S_0} \varphi \frac{d\delta\zeta}{dt}\, dS\, dt = \int\limits_{S_0} \varphi\delta\zeta \Big|_0^{t_1} dS - \int\limits_0^{t_1} \int\limits_{S} \frac{d\varphi}{dt}\, \delta\zeta\, dS\, dt = -\int\limits_0^{t_1} \int\limits_{S_0} \left[\frac{\partial\varphi}{\partial t} + (\nabla\varphi)^2\right] \delta\zeta\, dS\, dt \tag{3.10}$$

Итак, из условия $\delta J = 0$ и выражений (3.9) и (3.10) следует, что

$$\int\limits_0^{t_1} \Big\{ -\rho \int\limits_{S_0} \left[\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 + g\zeta - \frac{\sigma}{\rho}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) - f\right] d\zeta\, dS -$$

$$- \int\limits_{L_0} (-\sigma\cos\theta - \sigma_1 + \sigma_2) \frac{\cos\gamma}{\sin\theta}\, \delta\zeta\, d\lambda \Big\}\, dt = 0 \tag{3.11}$$

Отсюда в силу произвольности вариации $\delta\zeta$ следует, что

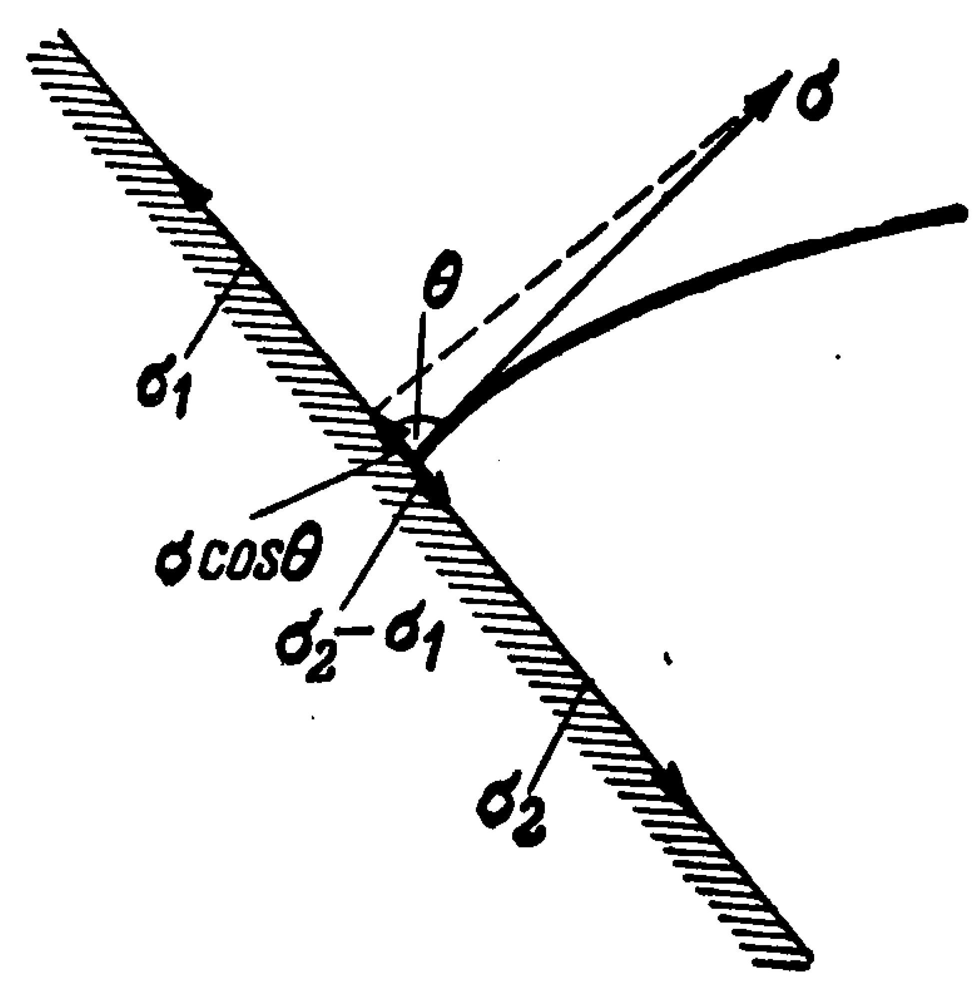
при $z = \zeta(x, y, t)$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 + g\zeta - \frac{\sigma}{\rho}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = f \tag{3.12}$$

на контуре L

$$\sigma_2 = \sigma_1 + \sigma\cos\theta \tag{3.13}$$

Рассмотрим условие (3.13). Под углом θ свободная поверхность жидкости пересекает стенку сосуда. Этот угол называется краевым углом. Само соотношение (3.13) является известным условием равновесия в точках пересечения границ раздела трех сред. Из фиг. 3 видно, что в принятых обозначениях $\cos\theta > 0$, т. е. $\theta < {}^1/_2\pi$,— в случае выпуклого мениска жидкости, и $\cos\theta < 0$ $(\theta > {}^1/_2\pi)$ — в случае вогнутого мениска.



Фиг. 3

Таким образом, сформулирована известная задача: определить в области V гармоническую функцию $\varphi(x, y, z, t)$ по условиям (3.1), (3.12) и (3.13).

Тем самым показана эквивалентность вариационной формулировки задачи о движении идеальной несжимаемой жидкости в сосуде конечных размеров обычной формулировке в виде соответствующей краевой задачи.

4. Рассмотрим некоторые частные случаи. *1*. Задача о движении идеальной несжимаемой жидкости в сосуде конечных размеров под действием сил тяжести формулируется следующим образом: в классе функций, удовлетворяющих условиям (2.5), (2.6), найти те, которые удовлетворяют условию $\delta J = 0$ для

$$J = \int_0^{t_1} \left\{ \frac{1}{2} \rho \int_V (\nabla\varphi)^2 \, dV - \frac{1}{2} \rho g \int_{S_0} \zeta^2 \, dS + \rho f V \right\} dt$$

Можно показать, что эти функции должны удовлетворять условию

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla\varphi)^2 + g\zeta = f \qquad \text{при } z = \zeta\,(x, y, t)$$

Этот результат является непосредственным обобщением результата Н. Н. Моисеева [1].

2. Стационарные значения действия (2.8) можно искать на более узком классе функций, у которых $\delta\zeta = 0$ на контуре L. Тогда вариационная формулировка задачи о движении жидкости под действием сил тяжести и сил поверхностного натяжения будет иметь вид: в классе функций, удовлетворяющих условиям (2.5), (2.6) и условию $\delta\zeta = 0$ на контуре L, найти те, которые удовлетворяют условию $\delta J = 0$ для

$$J = \int_0^{t_1} \left\{ \frac{1}{2} \rho \int_V (\nabla\varphi)^2 \, dV - \frac{1}{2} \rho g \int_{S_0} \zeta^2 \, dS - \sigma S + \rho f V \right\} dt$$

Можно показать, что эти функции будут удовлетворять условию

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla\varphi)^2 + g\zeta - \frac{\sigma}{\rho} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = f \qquad \text{при } z = \zeta\,(x, y, t)$$

3. Вариационная формулировка задачи о равновесии жидкости в сосуде конечных размеров под действием силы тяжести и сил поверхностного натяжения также получается как частный случай рассмотренной задачи: в классе непрерывных функций найти те, которые удовлетворяют условию $\delta U = 0$ для

$$U = \frac{1}{2} \rho g \int_{S_0} \zeta^2 \, dS + \sigma S + \sigma_1 \Sigma_1 + \sigma_2 \Sigma_2 - \rho f V$$

Оказывается, что эти функции удовлетворяют условиям

$$g\zeta - \frac{\sigma}{\rho} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = f \quad \text{при } z = \zeta\,(x, y)$$
$$\sigma_2 = \sigma_1 + \sigma \cos\theta \quad \text{на контуре } L \tag{4.1}$$

Если искать решение этой задачи в классе функций, которые удовлетворяют условию $\delta\zeta = 0$ на контуре L, то

$$U = \frac{1}{2} \rho g \int_{S_0} \zeta^2 \, dS + \sigma S - \rho f V$$

и искомые функции будут удовлетворять первому из условий (4.1).

Автор благодарит Н. Н. Моисеева и А. Д. Мышкиса за ряд полезных советов.

Поступила 6 V 1964

Вычислительный центр АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Моисеев Н. Н. Вариационные задачи в теории колебаний жидкости и тела с жидкостью. В сб. статей «Вариационные методы в задачах о колебаниях жидкости и тела с жидкостью», ВЦ АН СССР, М., 1962.