Прикладная математика и механика. Том 28, 1964

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ЖИДКОСТЬЮ, ОБЛАДАЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТНЫМ НАТЯЖЕНИЕМ

В. В. Румянцев

(Москва)

В статье [1] установлены теоремы, сводящие вопрос об устойчивости стационарного движения (в частности равновесия) твердого тела с полостью, полностью или частично наполненной идеальной или вязкой жидкостью, к задаче минимума измененной потенциальной энергии. При этом поверхностное натяжение жидкости не принималось во внимание. Однако в ряде случаев, в особенности в условиях невесомости, учет поверхностного натяжения может оказаться существенным [2]. Ниже доказываются теоремы об устойчивости равновесия и стационарного движения твердого тела, имеющего полость, наполненную жидкостью, обладающей поверхностным натяжением.

1. Представим себе твердое тело, имеющее односвязную полость, стесненное некоторыми стационарными связями без трения или свободное. Обозначим через q_j $(j = 1, 2, \ldots, n;\ n \leqslant 6)$ лагранжевы координаты, определяющие положение твердого тела в неподвижной системе осей координат $O_1\xi\eta\zeta$. Пусть на тело действуют заданные потенциальные силы, обладающие силовой функцией, которую представим в виде $U(q_1, \ldots, q_n)$. Наряду с неподвижной системой координат, будем рассматривать также подвижную систему осей координат $Oxyz$, жестко связанную с твердым телом. Предположим, что полость тела целиком заполнена двумя однородными, несжимаемыми, идеальными, несмешивающимися жидкостями 1 и 2, обладающими поверхностным натяжением и находящимися под действием массовых сил с силовой функцией $U_1(\xi, \eta, \zeta)$.

Обозначим: ρ_i — плотность, p_i — давление, τ_i — объем, S_i — площадь поверхности каждой из жидкостей $(i = 1, 2)$. Вообще говоря, $S_i = S_{12} + \sigma_{i3}$, где S_{12} — площадь поверхности раздела жидкостей, σ_{i3} — площадь поверхности стенок полости, с которыми соприкасается i-я жидкость. Линию пересечения поверхности раздела жидкостей со стенками полости обозначим через σ, и в дальнейшем для простоты будем считать, что в окрестности этой линии поверхность стенок полости не имеет острых ребер. Может, однако, представиться случай, когда одна из жидкостей целиком находится внутри другой жидкости и не соприкасается со стенками полости. В этом случае линия σ не существует, а площадь поверхности внутренней жидкости $S_i = S_{12}$.

Отметим, что рассматриваемая постановка задачи включает в себя случай, когда полость тела частично заполнена однородной несжимаемой жидкостью. В этом случае свободная поверхность жидкости S_{12} граничит или с воздухом, давление p_2 которого принимается постоянным, или с вакуумом, где давление p_2 считается равным нулю.

Следуя Гауссу, будем считать, что следствием соприкосновения вдоль некоторой поверхности двух разнородных сред будут силы натяжения, имеющие потенциал, равный произведению площади поверхности соприкосновения на коэффициент поверхностного натяжения [3], зависящий от природы обеих сред, α_{ir} ($i = 1, 2$; $r = 1, 2, 3$), причем, очевидно, $\alpha_{ir} = \alpha_{ri}$.

Как известно [4], вид дифференциальных уравнений движения жидкости не зависит от наличия или отсутствия сил поверхностного натяжения, влияющих, однако, на вид граничных условий на поверхности раздела жидкостей. Граничные условия, как и уравнения движения системы, можно вывести из принципа наименьшего действия в форме Гамильтона — Остроградского [5]. Согласно этому принципу для действительного движения системы

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[\delta T + \sum_{\nu}(X_\nu \delta\xi_\nu + Y_\nu \delta\eta_\nu + Z_\nu \delta\zeta_\nu)\right]dt = 0 \tag{1.1}$$

где T — кинетическая энергия системы, X_ν, Y_ν, Z_ν — проекции на неподвижные оси активных сил, δ — символ вариации (изменения на возможном перемещении) соответствующей величины, причем

$$\delta\xi_\nu = \delta\eta_\nu = \delta\zeta_\nu = 0 \quad \text{при } t = t_0,\ t = t_1$$

С учетом сделанных выше предположений о силах, приложенных к системе, сумма их элементарных работ на возможном перемещении

$$\sum_{\nu}(X_\nu \delta\xi_\nu + Y_\nu \delta\eta_\nu + Z_\nu \delta\zeta_\nu) = -\delta V - \alpha_{12}\delta S_{12} - \alpha_{13}\delta\sigma_{13} - \alpha_{23}\delta\sigma_{23}$$

где

$$V = -U - \rho_1 \int_{\tau_1} U_1 d\tau_1 - \rho_2 \int_{\tau_2} U_1 d\tau_2$$

обозначает потенциальную энергию приложенных к системе внешних сил.

Нетрудно убедиться [3], что

$$\delta S_{12} = \int_{S_{12}} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\delta\varkappa ds + \int_{\sigma} \delta\varkappa_1 d\sigma, \qquad \delta\sigma_{13} = -\delta\sigma_{23} = \int_{\sigma} \delta\varkappa_2 d\sigma \tag{1.2}$$

Здесь R_1 и R_2 обозначают главные радиусы кривизны поверхности S_1 в данной точке, считаемые положительными, если соответствующий центр кривизны лежит с той же стороны от этой поверхности, что и жидкость 1, и отрицательными — в противном случае;

$$\delta\varkappa = \delta\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}, \qquad \delta\varkappa_1 = \delta\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}_1, \qquad \delta\varkappa_2 = \delta\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}_2$$

где $\delta\mathbf{r}$ — возможное перемещение относительно твердого тела точки поверхности S_1 или линии σ, $\mathbf{n}$ — орт внешней нормали к поверхности S_1, $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ — орты внешних нормалей к контуру σ поверхностей S_{12} и σ_{13}, расположенные, соответственно, в касательных плоскостях к этим поверхностям. Очевидно, что для части S_{12} поверхности S_2 орт $\mathbf{n}$ будет внутренней нормалью; на поверхности σ_{i3} вследствие непроницаемости твердых стенок $\delta\varkappa = 0$. Угол между нормалями $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ обозначим через θ; легко видеть, что

$$\delta\varkappa_1 = \delta\varkappa_2 \cos\theta \tag{1.3}$$

Принимая во внимание условия неразрывности для жидкости и вводя неопределенные множители $p_i\,(x, y, z, t)$, определяющие гидродинамические давления, из (1.1) получим уравнения движения системы [5] (которые здесь не приводятся, так как в дальнейшем не понадобятся), а также уравнение

$$\int_{t_0}^{t_1}\left\{\int_{S_{12}}\left[p_1 - p_2 - \alpha_{12}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\right]\delta\varkappa\, ds - \int_{\sigma}(\alpha_{12}\cos\theta + \alpha_{13} - \alpha_{23})\,\delta\varkappa_2\, d\sigma\right\} dt = 0$$

Вследствие произвольности (с точностью до условия неразрывности возможных перемещений частиц жидкости получаем формулу Лапласа [4] для давлений на поверхности раздела жидкостей

$$p_1 - p_2 = \alpha_{12}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \tag{1.4}$$

а также формулу для краевого угла θ

$$\cos\theta = (\alpha_{23} - \alpha_{13})\,/\,\alpha_{12} \tag{1.5}$$

которые должны выполняться в любой момент времени. Отметим, что формула (1.5) имеет точно такой же вид, что и формула для краевого угла при равновесии жидкостей, которую обычно получают или из принципа возможных перемещений [3], или из условия равновесия трех сил поверхностного натяжения [4]. Следовательно, при движении поверхность раздела двух разнородных жидкостей образует с твердой стенкой такой же краевой угол, как и при равновесии, если, разумеется, считать величины α_{ir} одними и теми же постоянными.

Для воздуха коэффициент α_{23} обычно считают равным нулю, и формула (1.5) принимает вид

$$\cos\theta = -\,\alpha_{13}\,/\,\alpha_{12} \tag{1.6}$$

Далее будем рассматривать лишь случаи, когда движение твердого тела является непрерывным, а движение жидкости совершается сплошным образом, так что координаты частиц жидкости — непрерывные функции их начальных значений и времени.

В силу предположения о идеальности и стационарности связей, наложенных на твердое тело, по теореме о кинетической энергии системы имеем

$$dT = -\,dV - \alpha_{12}dS_{12} - \alpha_{13}d\sigma_{13} - \alpha_{23}d\sigma_{23}$$

Отсюда получаем интеграл энергии

$$T + V + \alpha_{12}S_{12} + \alpha_{13}\sigma_{13} + \alpha_{23}\sigma_{23} = \text{const} \tag{1.7}$$

Замечание. Интеграл (1.7) можно получить и из уравнений движения системы. В самом деле, из последних обычным путем [5] можно получить уравнение

$$\frac{d}{dt}\,(T + V) = -\int_{S_{12}}(p_1 - p_2)\,u_n\, dS$$

где u_n обозначает проекцию относительной скорости жидкости на нормаль $\mathbf{n}$ к поверхности S_{12}. Используя формулы (1.2) — (1.5), из этого уравнения немедленно получаем интеграл (1.7).

Таким образом, при рассматриваемых условиях полная механическая энергия системы, состоящая из кинетической энергии T твердого тела и жидкости, потенциальной энергии приложенных к системе внешних сил V и поверхностной энергии жидкости $\alpha_{12}S_{12} + \alpha_{13}\sigma_{13} + \alpha_{23}\sigma_{23}$, остается постоянной во все время движения.

2. Потенциальную энергию системы обозначим через $F = V + \alpha_{12}S_{12} + \alpha_{13}\sigma_{13} + \alpha_{23}\sigma_{23}$. Согласно принципу возможных перемещений, уравнение

$$\delta F = 0 \tag{2.1}$$

представляет собою условие равновесия твердого тела с жидкостью в его полости. Переходя от абсолютных координат ξ, η, ζ частиц жидкости к относительным координатам x, y, z, выражение силовой функции массовых сил представим в виде $U_1(x, y, z, q_j)$, сохраняя прежнее обозначение.

Уравнение (2.1) запишем в явном виде

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial q_j}\delta q_j - \sum_{i=1}^{2} \rho_i \int\limits_{\tau_i} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x}\delta x + \frac{\partial U_1}{\partial y}\delta y + \frac{\partial U_1}{\partial z}\delta z\right) d\tau_i + \\ + \alpha_{12}\int\limits_{S_{12}} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\delta\varkappa\, ds = 0$$

Ввиду независимости δq_j и δx, δy, δz, из этого уравнения немедленно получаем уравнения равновесия твердого тела с жидкостью

$$\frac{\partial V}{\partial q_j} = 0 \qquad (j = 1, \ldots, n) \tag{2.2}$$

Оставшаяся часть равенства приводит к уравнению поверхности раздела жидкостей S_{12} при равновесии. В самом деле, применяя формулу Грина и учитывая условия несжимаемости, получаем

$$\sum_{i=1}^{2} \rho_i \int\limits_{\tau_i} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x}\delta x + \frac{\partial U_1}{\partial y}\delta y + \frac{\partial U_1}{\partial z}\delta z\right) d\tau_i - \alpha_{12}\int\limits_{S_{12}} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\delta\varkappa\, ds = \\ = \int\limits_{S_{12}} \left[(\rho_1 - \rho_2)\, U_1 - \alpha_{12}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\right]\delta\varkappa\, ds = 0$$

В силу сохранения объема жидкости функция $\delta\varkappa$ должна удовлетворять условию

$$\int\limits_{S_{12}} \delta\varkappa\, ds = 0$$

а в остальном она произвольна; поэтому из последнего равенства получаем уравнение поверхности раздела жидкостей при равновесии

$$(\rho_1 - \rho_2)\, U_1 - \alpha_{12}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \mathrm{const} \tag{2.3}$$

Рассмотрим теперь случай, когда наложенные на твердое тело связи допускают вращение всей системы как одного твердого тела вокруг некоторой неподвижной прямой, например оси ζ, а действующие на систему силы не дают момента относительно этой прямой. При этом кинетическая и потенциальная энергии системы не зависят, очевидно, от угла q_n поворота тела около оси ζ, и уравнения движения допускают интеграл площадей [5]

$$G_\zeta = k = \text{const} \tag{2.4}$$

где G_ζ — проекция на ось ζ момента количеств движения системы.

Введем в рассмотрение также систему осей координат $O_1\xi_1\eta_1\zeta$, вращающуюся вокруг оси ζ с угловой скоростью ω. Если величину ω выбрать так, чтобы в любой момент времени выполнялось соотношение

$$\omega J = k \tag{2.5}$$

то интеграл энергии (1.7) можно представить в виде [1]

$$T_* + \frac{1}{2}\frac{k^2}{J} + V + \alpha_{12}S_{12} + \alpha_{13}\sigma_{13} + \alpha_{23}\sigma_{23} = \text{const} \tag{2.6}$$

Здесь T_* обозначает кинетическую энергию системы в ее движении относительно осей координат $O_1\xi_1\eta_1\zeta$, а J — момент инерции системы относительно оси ζ.

Введем обозначение для измененной потенциальной энергии системы

$$W = \frac{1}{2}\frac{k_0^2}{J} + V + \alpha_{12}S_{12} + \alpha_{13}\sigma_{13} + \alpha_{23}\sigma_{23} \tag{2.7}$$

Из принципа Даламбера — Лагранжа следует [1], что уравнение

$$\delta W = 0 \tag{2.8}$$

представляет собою условие для установившегося движения, при котором вся система вращается как одно твердое тело вокруг оси ζ с угловой скоростью $\omega_0 = k_0 / J_0$, где k_0 и J_0 — значения постоянной площадей k и момента инерции J для установившегося движения системы.

Из условия (2.8) легко получаем уравнения

$$\frac{\partial W}{\partial q_j} = -\frac{1}{2}\omega_0^2\frac{\partial J}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = 0 \qquad (j = 1, \ldots, n-1) \tag{2.9}$$

для координат q_j твердого тела в установившемся движении, а также уравнение поверхности раздела жидкостей при этом движении

$$(\rho_1 - \rho_2)\left[U_1 + \frac{1}{2}\omega_0^2(\xi^2 + \eta^2)\right] - \alpha_{12}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \text{const} \tag{2.10}$$

При $\omega_0 = 0$ уравнение (2.10) принимает вид уравнения (2.3).

Постоянные, фигурирующие в правых частях уравнений (2.3) или (2.10), определяются по известным значениям радиусов кривизны R_i и силовой функции U_1 для какой-либо точки поверхности раздела [3].

В дифференциальной геометрии известна формула для средней кривизны $1/R_1 + 1/R_2$ поверхности, определяемой через коэффициенты первой и второй квадратичных форм Гаусса [6]. Уравнения (2.3) и (2.10) представляют собою, таким образом, дифференциальные уравнения поверхности раздела жидкостей при равновесии или в установившемся движении, форма которой определяется в результате интегрирования этих уравнений. Интегралы уравнений (2.3) и (2.10) должны удовлетворять граничным условиям вида (1.5) или (1.6), если поверхность раздела пересекается со стенками полости. Как показывает опыт, угол θ может быть как острым, так и прямым и тупым, что зависит от природы соприкасающихся сред. В случае поверхности жидкость — воздух для «несмачиваемых» стенок угол θ является тупым, и $\alpha_{13}>0$, а для «смачиваемых» стенок угол θ — острый, и в этом случае следует считать $\alpha_{13} < 0$.

Если $|\alpha_{13}/\alpha_{12}| > 1$, то не существует линии пересечения свободной поверхности жидкости со стенками полости, жидкость расплывается по всей поверхности стенок полости.

Вдали от стенок полости форма поверхности раздела жидкостей при равновесии зависит от соотношения между величинами поверхностного натяжения и действующих на жидкость массовых сил. Так, например, в поле силы тяжести форма свободной поверхности определяется [4] величиной капиллярной постоянной $a = \sqrt{2\alpha_{12}/g\varrho}$.

3. Рассмотрим теперь вопрос об устойчивости равновесия или установившегося движения твердого тела с жидкостью в его полости. Условимся под устойчивостью рассматриваемой системы с бесконечным числом степеней свободы понимать устойчивость по отношению к координатам q_j и скоростям q_j' твердого тела, кинетической энергии жидкости $T_*^{(2)}$ и удалению l поверхности раздела от поверхности равновесия (или уклонению ∇ формы жидкости от формы равновесия), добавляя к условиям (2.1) работы [1] требование достаточной малости наклона начальной возмущенной поверхности раздела к поверхности равновесия в каждой ее точке. Будем предполагать, что поверхность равновесия является связной, направление нормали к ней изменяется непрерывным образом при непрерывном изменении положения точки на поверхности, а кривизны главных нормальных сечений ее везде остаются конечными. Удаление l всегда будем выбирать меньшим наименьшего из всех радиусов кривизны главных нормальных сечений поверхности равновесия. При этом справедливы следующие теоремы.

Теорема 3.1. Если для положения равновесия твердого тела и жидкости в его полости выражение

$$F = V + \alpha_{12}S_{12} + \alpha_{13}\sigma_{13} + \alpha_{23}\sigma_{23}$$

имеет изолированный минимум F_0, то положение равновесия устойчиво.

Теорема 3.2. Если для состояния установившегося движения твердого тела с жидкостью в его полости выражение

$$W = \frac{1}{2}\frac{k_0^2}{J} + V + \alpha_{12}S_{12} + \alpha_{13}\sigma_{13} + \alpha_{23}\sigma_{23}$$

имеет изолированный минимум W_0, то установившееся движение устойчиво.

Минимум выражений F или W здесь понимается в том же самом смысле, что и в работе [1], т. е. или по отношению к q_j, l (при $\nabla > \varepsilon l$), или по отношению к q_j, ∇.

Доказательство. Выведем систему из рассматриваемого установившегося движения, сообщая ее точкам некоторые достаточно малые начальные отклонения и скорости. Предоставленная самой себе, система далее будет двигаться в соответствии с интегралом энергии (2.6), который можно переписать в виде

$$T_* + W + \frac{1}{2}\frac{k^2 - k_0^2}{J} = T_*^{(0)} + W^{(0)} + \frac{1}{2}\frac{k^2 - k_0^2}{J^{(0)}} \qquad (3.1)$$

где (0) обозначает начальное значение соответствующей величины, k — значение постоянной интеграла площадей для возмущенного движения.

Пусть A — некоторое произвольно малое положительное число, не превосходящее заданного числа L, определяющего область устойчивости, которое во всяком случае будем предполагать меньшим числа E, определяющего область минимума W [1]. Обозначим через W_1 наименьшее возможное значение, какое может принять выражение W, если удаление l или одна из координат q_j $(j = 1, \ldots, n - 1)$ по абсолютной величине равны A, а остальные из этих величин и уклонение ∇ удовлетворяют условиям $|q_j| \leqslant A$, $|l| \leqslant A$, $\nabla \geqslant \varepsilon l$, причем, очевидно, $W_1 > W_0$. Выберем число A настолько малым, чтобы было удовлетворено неравенство $|W_1 - W_0| < L$.

Начальные положения и скорости точек системы выберем так, чтобы выполнялось неравенство

$$T_*^{(0)} + W^{(0)} + \frac{1}{2}(k^2 - k_0^2)\left(\frac{1}{J^{(0)}} - \frac{1}{J}\right) < W_1$$

для всех значений, которые может принимать J при выполнении условий

$$|q_j| \leqslant A, \qquad |l| \leqslant A, \qquad \nabla \geqslant \varepsilon l \qquad (3.2)$$

При таком выборе начальных условий во все последующее время движения, пока выполняются неравенства (3.2), будем, согласно интегралу энергии (3.1), иметь неравенство

$$T_* + W < W_1 \qquad (3.3)$$

из которого следует, что $W < W_1$. Это неравенство будет удовлетворено, по крайней мере, до тех пор, пока $|q_j|$ и $|l|$ не превосходят числа A. Но начальные значения $|q_j|$ и $|l|$ выбираются, разумеется, меньшими числа A, причем начальное уклонение $\nabla > \varepsilon l$, и так как q_j, l, ∇ меняются непрерывно со временем, то $|q_j|$ и $|l|$ не могут сделаться превосходящими A, не сделавшись предварительно равными A.

Равенства же

$$|q_j| = A, \qquad |l| = A$$

в силу неравенства (3.3) при условии $\nabla \geqslant \varepsilon l$ невозможны. Следовательно, если движение системы происходит непрерывно, так что q_j, l, ∇ непрерывно изменяются со временем, то, начиная от начального момента времени, будем иметь неравенства

$$|q_j| < L, \qquad |q_j'| < L, \qquad |l| < L, \qquad |T_*^{(2)}| < L, \qquad \nabla \geqslant \varepsilon l$$

и все они не перестанут выполняться, пока соблюдается последнее из них. Таким образом, теорема 3.2 доказана. Из доказанного следует справедливость и теоремы 3.1.

Отметим, что теорему, аналогичную теореме 3.1, можно установить и для случая относительного равновесия твердого тела с полостью, наполненной жидкостью, обладающей поверхностным натяжением, если к телу, помимо потенциальных сил, приложен момент других сил, направленный по оси ζ, благодаря которому угловая скорость ω вращения тела вокруг оси ζ остается постоянной во все время движения. При этих условиях справедлива [1] следующая теорема.

Теорема 3.3. Если для положения относительного равновесия твердого тела и жидкости в его полости выражение

$$W_* = V + \alpha_{12}S_{12} + \alpha_{13}\sigma_{13} + \alpha_{23}\sigma_{23} - {}^1/_2\omega^2 J$$

имеет изолированный минимум, то положение относительного равновесия устойчиво.

Так как условие $\delta W_* = 0$ при $\omega = \text{const}$ эквивалентно условию $\delta W = 0$ при $k_0 = \text{const}$, в чем легко убедиться непосредственно, учитывая равенство $\omega J_0 = k_0$, то положения относительного равновесия можно сопоставлять с установившимися движениями системы. Нетрудно при этом видеть [1], что если для некоторого положения относительного равновесия выражение W_* имеет минимум, то для соответствующего установившегося движения выражение W также имеет минимум.

Выше предполагалось, что жидкость является идеальной. Но теоремы (3.1) — (3.3) остаются справедливыми и для вязкой жидкости.

В самом деле, в случае вязкой жидкости уравнения Эйлера заменяются уравнениями Навье — Стокса; скорости частиц жидкости, соприкасающихся со стенками полости, принимаются равными скоростям соответствующих точек стенок, а динамическое условие (1.4) на свободной поверхности заменяется условием [4]

$$(p_1 - p_2)\, n_i = (\sigma_{ik}'^{(1)} - \sigma_{ik}'^{(2)})\, n_k + \alpha_{12}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) n_i \tag{3.4}$$

где $\sigma_{ik}'^{(1)}$ и $\sigma_{ik}'^{(2)}$ обозначают «вязкие» тензоры напряжений. При этих условиях уравнения движения системы приводят к уравнению для скорости рассеяния энергии

$$\frac{d}{dt}(T + V + \alpha_{12}S_{12} + \alpha_{13}\sigma_{13} + \alpha_{23}\sigma_{23}) = -\mu_1 \int\limits_{\tau_1} \Phi_1 d\tau_1 - \mu_2 \int\limits_{\tau_2} \Phi_2 d\tau_2$$

где Φ_i определяются по формуле Навье — Стокса [1], μ_i — коэффициенты вязкости. Поэтому в случае вязкой жидкости вместо интеграла энергии (1.7) имеем неравенство

$$T + V + \alpha_{12}S_{12} + \alpha_{13}\sigma_{13} + \alpha_{23}\sigma_{23} \leqslant T^{(0)} + V^{(0)} + \alpha_{12}S_{12}^{(0)} + \alpha_{13}\sigma_{13}^{(0)} + \alpha_{23}\sigma_{23}^{(0)} \tag{3.5}$$

и в доказательстве приведенных выше теорем ничего не меняется.

Аналогичным образом можно убедиться в справедливости теорем 3.1 и 3.2 работы [1], с учетом обозначения (2.7), для случая вязкой жидкости, обладающей поверхностным натяжением.

Автор благодарен Н. Н. Красовскому, Н. Н. Моисееву и Г. К. Пожарицкому за обсуждение данной работы.

Поступила 6 V 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Румянцев В. В. Об устойчивости установившихся движений твердых тел с полостями, наполненными жидкостью. ПММ, 1962, т. 26, вып. 6.
2. Moisseyev N. N. Sur certains problèmes mathématiques du mouvement relatif des satellites. Dynamics of satellites. Symposium Paris, 1962.
3. Кирхгоф Г. Механика. Изд-во АН СССР, 1962.
4. Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. Гостехиздат, 1953.
5. Румянцев В. В. Уравнения движения твердого тела, имеющего полости, не полностью наполненные жидкостью. ПММ, 1954, т. 18, вып. 6.
6. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. II. Гостехиздат, 1952.
7. Пожарицкий Г. К., Румянцев В. В. Задача минимума в вопросе об устойчивости движения твердого тела с полостью, заполненной жидкостью. ПММ, 1963, т. 27, вып. I.