

## О ДВИЖЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ПОЛОСТЬЮ, СОДЕРЖАЩЕЙ ИДЕАЛЬНУЮ ЖИДКОСТЬ И ПУЗЫРЬ ВОЗДУХА

Ф. Л. Черноусько

(Москва)

Движение твердого тела с полостью, частично заполненной жидкостью, изучалось обычно в тех случаях, когда перемещения свободной поверхности относительно полости невелики. Библиография по этому вопросу имеется, например, в обзорной статье В.В. Румянцева [1]. В данной работе предполагается, что жидкость почти целиком заполняет полость, а имеющийся воздух образует пузырь, форма которого близка к сферической. Задача состоит в определении движения жидкости и пузыря в полости, а также в определении движения твердого тела, содержащего эту полость.

Пусть  $a$  — радиус пузыря,  $\rho, \mu$  — плотность и вязкость жидкости,  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения на границе жидкости и пузыря, а  $v$  — характерная величина скорости жидкости относительно полости. Влиянием вязкости на движение можно пренебречь при условии  $\rho va \gg \mu$ . Отличие формы пузыря от сферической будет малым, если динамические добавки к давлению (порядка  $\rho v^2$ ) малы по сравнению с давлением  $\sigma/a$ , обусловленным поверхностным натяжением. Оба этих условия

$$va \gg \mu / \rho, \quad v^2 a \ll \sigma / \rho$$

в дальнейшем считаем выполненными. Для ряда жидкостей, в том числе для воды, они выполняются в довольно широком диапазоне значений  $v, a$ . При соблюдении этих условий пузырь можно считать недеформируемой сферой радиуса  $a$ , а жидкость — идеальной.

Такая постановка, конечно, не позволяет рассмотреть движение, когда пузырь соприкасается со стенками полости и теряет сферическую форму.

Ниже составляются уравнения движения и разбираются некоторые примеры.

1. Рассматривается движение твердого тела  $B$  с односвязной полостью  $D$ , ограниченной поверхностью стенок  $S$ . Внутри полости находится идеальная несжимаемая жидкость плотности  $\rho$  и недеформируемая подвижная сфера  $E$  радиуса  $a$ , массы  $m$  (для пузыря можно положить  $m = 0$ ). Отношение  $a/l = \varepsilon$ , где  $l$  — минимальное расстояние от центра  $P$  сферы  $E$  до поверхности стенок  $S$ , считается малым:  $\varepsilon \ll 1$ .

Пусть центр инерции сферы расположен в ее геометрическом центре  $P$ . Так как жидкость идеальна, то движение сферы относительно ее центра  $P$  не влияет на движение жидкости и тела  $B$  и, с этой точки зрения, несущественно. В дальнейшем изучается лишь движение тела  $B$ , жидкости и центра сферы, и поэтому, без нарушения общности, движение сферы  $E$  считается поступательным, а действующие на нее силы заменяются их главным вектором, приложенным в точке  $P$ .

Пусть система координат  $Ox_1x_2x_3$  жестко связана с телом;  $\mathbf{R}, \mathbf{r}$  — радиусы-векторы какой-либо точки относительно неподвижного и относительно подвижного полюса  $O$  соответственно.

Объемные силы, действующие на жидкость, считаем потенциальными с потенциалом  $U(\mathbf{r}, t)$ , и тогда потенциальная энергия жидкости равна

$$\Pi = \rho \int_D U dv - \rho \int_E U dv \quad (1.1)$$

Течение жидкости предполагается потенциальным с потенциалом скоростей  $\varphi(\mathbf{r}, t)$ . Функция  $\varphi(\mathbf{r}, t)$  гармонична в области  $D_1$ , занятой жидкостью и ограниченной снаружи поверхностью стенок  $S$ , а изнутри — поверхностью  $\Sigma$  сферы  $E$ . На этих поверхностях  $\varphi$  удовлетворяет граничным условиям

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = (\mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \mathbf{n} \quad \text{на } S, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = \mathbf{v}_p \boldsymbol{\nu} \quad \text{на } \Sigma \quad (1.2)$$

Здесь  $\mathbf{n}$ ,  $\boldsymbol{\nu}$  — орты внешних нормалей к поверхностям  $S$ ,  $\Sigma$  соответственно (фиг. 1),  $\mathbf{v}_p$  — абсолютная скорость точки  $P$ ,  $\mathbf{v}_0$  — абсолютная скорость полюса  $O$ ,  $\boldsymbol{\omega}$  — абсолютная угловая скорость твердого тела.

Положение системы, состоящей из тела  $B$ , жидкости и сферы  $E$ , будем определять радиус-вектором  $\mathbf{R}_0$  полюса  $O$ , радиус-вектором  $\mathbf{r}_p$  точки  $P$  относительно  $O$  ( $\mathbf{r}_p = \mathbf{R}_p - \mathbf{R}_0$ ) и какими-либо тремя параметрами

$\gamma_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), задающими угловое положение твердого тела (например, углами Эйлера). Введенные величины связаны со скоростями  $\mathbf{v}_0$ ,  $\mathbf{v}_p$ ,  $\boldsymbol{\omega}$  кинематическими соотношениями (штрих будет означать дифференцирование по времени  $t$  в подвижной системе  $Ox_1x_2x_3$ )

$$d\mathbf{R}_0 / dt = \mathbf{v}_0, \quad \mathbf{v}_p = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_p + \mathbf{r}_p' \quad (1.3)$$

а также тремя уравнениями, связывающими проекции  $\boldsymbol{\omega}$  с параметрами  $\gamma_i$  (всего 9 скалярных уравнений для 18 скалярных переменных  $\mathbf{R}_0$ ,  $\mathbf{r}_p$ ,  $\gamma_i$ ,  $\mathbf{v}_0$ ,  $\mathbf{v}_p$ ,  $\boldsymbol{\omega}$ ). Через эти переменные (координаты и скорости) и через текущий

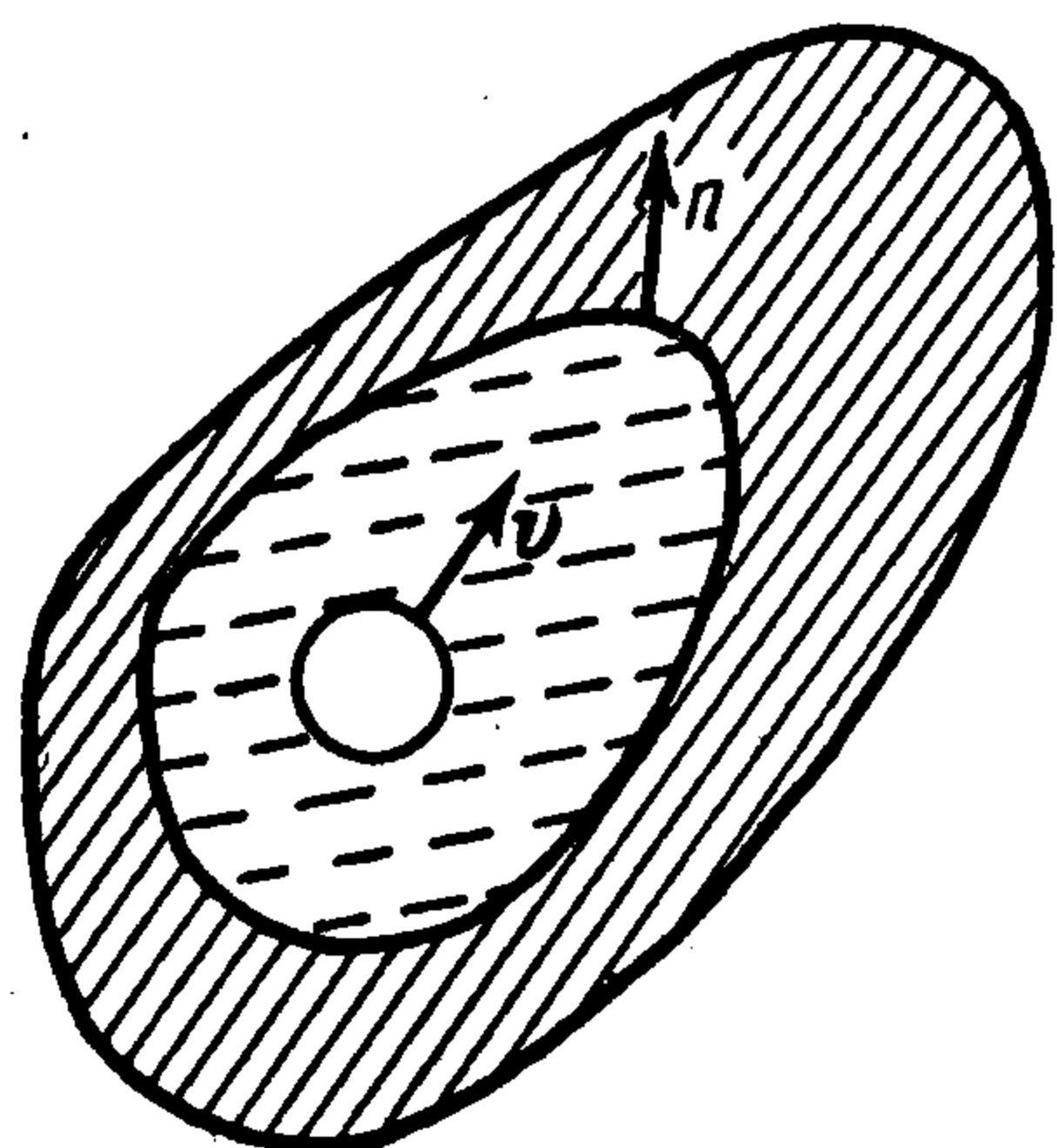
радиус-вектор  $\mathbf{r}$  можно, очевидно, выразить положение и скорость любой точки тела  $B$  и сферы  $E$  (последняя движется поступательно). Кроме того, через эти же переменные выражается и потенциал скоростей  $\varphi(\mathbf{r}, t)$ , подчиненный условиям (1.2), а следовательно, и распределение скоростей в жидкости. Таким образом, количество движения  $\mathbf{Q}$ , кинетический момент  $\mathbf{K}$  относительно точки  $O$  и кинетическая энергия  $T$  системы «тело  $B$  + жидкость + сфера  $E$ » в любой момент времени могут быть выражены как функции  $\mathbf{R}_0$ ,  $\mathbf{r}_p$ ,  $\gamma_i$ ,  $\mathbf{v}_0$ ,  $\mathbf{v}_p$ ,  $\boldsymbol{\omega}$ . Отметим равенства

$$\mathbf{Q} = \partial T / \partial \mathbf{v}_0, \quad \mathbf{K} = \partial T / \partial \boldsymbol{\omega} \quad (1.4)$$

которые легко получить, например, из соотношений гл. 9 книги [2]. Формулы (1.4) справедливы, если считать  $T$  функцией переменных  $\mathbf{R}_0$ ,  $\mathbf{r}_p$ ,  $\gamma_i$ ,  $\mathbf{v}_0$ ,  $\boldsymbol{\omega}$ ,  $\mathbf{r}_p'$  ( $\mathbf{v}_p$  исключено при помощи (1.3)).

Уравнения движения системы запишем в виде

$$d\mathbf{Q} / dt = \mathbf{F}, \quad d\mathbf{K} / dt + \mathbf{v}_0 \times \mathbf{Q} = \mathbf{m}_0 \quad (1.5)$$



Фиг. 1

где  $\Gamma$  — главный вектор всех внешних сил, приложенных к системе,  $m_0$  — главный момент этих сил относительно точки  $O$ . К (1.5) присоединим уравнение движения сферы  $E$ , которое запишем в форме Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}_p} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{R}_p} = \mathbf{Q}_p \quad (1.6)$$

В уравнении (1.6), в отличие от (1.4), энергия  $T$  считается функцией  $\mathbf{R}_0, \mathbf{R}_p, \gamma_i, \mathbf{v}_0, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}_p$ . Обобщенную силу  $\mathbf{Q}_p$  можно представить в виде

$$\mathbf{Q}_p = \mathbf{F}_p - \partial \Pi / \partial \mathbf{R}_p \quad (1.7)$$

Здесь  $\mathbf{F}_p$  — главный вектор внешних (не связанных с давлением жидкости) сил, действующих на сферу,  $\Pi$  — потенциальная энергия жидкости (1.1), а потенциальную энергию тела  $B$  считаем не зависящей от положения сферы  $E$ .

Итак, если  $T, \mathbf{Q}, \mathbf{K}$  найдены как функции переменных  $\mathbf{R}_0, \mathbf{r}_p$  (или  $\mathbf{R}_p$ ),  $\gamma_i, \mathbf{v}_0, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}_p$  (или  $\mathbf{r}_p'$ ), то уравнения (1.5), (1.6) могут быть составлены, и вместе с кинематическими соотношениями они образуют замкнутую систему. Предполагается, что  $\mathbf{F}, m_0, \mathbf{F}_p$  выражены через те же переменные.

Количество движения всей системы определяется очевидной формулой

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^\circ + (m - \rho \Omega) \mathbf{v}_p \quad (1.8)$$

где  $\mathbf{Q}^\circ$  — количество движения системы, состоящей из твердого тела с полостью  $D$ , целиком заполненной жидкостью. Величины с индексом  $^\circ$  вверху в дальнейшем относятся к этой системе и считаются известными функциями координат и скоростей твердого тела.

Кинетическая энергия системы равна

$$T = T_1 + T_2 + \frac{1}{2} m v_p^2 \quad (1.9)$$

где  $T_1$  — известное выражение для кинетической энергии [2] твердого тела,  $T_2$  — кинетическая энергия жидкости

$$T_2 = \frac{1}{2} \rho \int_{D_1} (\nabla \varphi)^2 dv = \frac{1}{2} \rho \left( \oint_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds - \oint_\Sigma \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} ds \right) \quad (1.10)$$

а последнее слагаемое в (1.9) — кинетическая энергия сферы  $E$ .

Итак, необходимо найти потенциал  $\varphi$ , вычислить  $T_2$  согласно (1.10), после чего  $T$  и  $\mathbf{K}$  определяются (1.9), (1.4), а  $\mathbf{Q}$  дается формулой (1.8).

2. Задачу Неймана для функции  $\varphi$ , гармонической в области  $D_1$  и удовлетворяющей краевым условиям (1.2), будем решать альтернирующим методом Шварца. Потенциал  $\varphi$  ищем в виде бесконечного ряда

$$\varphi = \varphi^\circ + \varphi^1 + \varphi^2 + \dots \quad (2.1)$$

где  $\varphi^{2k}$  — функции, гармонические в области  $D$  (всюду внутри  $S$ ), а  $\varphi^{2k+1}$  — функции, гармонические вне сферы  $E$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ). Функция  $\varphi^\circ$  удовлетворяет первому условию (1.2) и является потенциалом течения жидкости, целиком заполняющей полость. Функцию  $\varphi^1$  подчиним условию

$$\partial \varphi^1 / \partial \nu = \mathbf{v}_p \boldsymbol{\nu} - \partial \varphi^\circ / \partial \nu \quad \text{на } \Sigma \quad (2.2)$$

так что сумма  $\varphi^0 + \varphi^1$  удовлетворяет точно второму условию (1.2). Дальнейшие члены ряда удовлетворяют краевым условиям

$$\frac{\partial \varphi^{2k}}{\partial n} = - \frac{\partial \varphi^{2k-1}}{\partial n} \quad \text{на } S \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (2.3)$$

для функций  $\varphi^{2k}$  и

$$\frac{\partial \varphi^{2k+1}}{\partial \nu} = - \frac{\partial \varphi^{2k}}{\partial \nu} \quad \text{на } \Sigma \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (2.4)$$

для функций  $\varphi^{2k+1}$ . Задачи Неймана для функций  $\varphi^{2k+1}$ , гармонических вне сферы  $E$ , решаются элементарно, а задачи для  $\varphi^{2k}$  могут быть решены эффективно, если известна функция Грина задачи Неймана для области  $D$ . Сходимость альтернирующего процесса Шварца (ряда (2.1)) в случае задачи Дирихле доказана для областей весьма общего вида [3]; для задачи Неймана в данном случае сходимость, по-видимому, также имеет место. Если ряд сходится, то условия (1.2), очевидно, выполняются. Отметим, что метод Шварца может быть применен и в том случае, если  $E$  — не сфера, а какое-либо другое тело, для которого можно решить внешнюю задачу Неймана.

Выпишем решение для функции  $\varphi^{2k+1}$ , удовлетворяющей на  $\Sigma$  условию

$$\frac{\partial \varphi^{2k+1}}{\partial \nu} = - \frac{\partial u}{\partial \nu} \quad (2.5)$$

где  $u = \varphi^{2k}$  при  $k \geq 1$  (2.4) и  $u = \varphi^0 - v_p r$  при  $k = 0$  (2.2). Введем систему координат  $P y_1 y_2 y_3$  с началом в точке  $P$ , оси которой параллельны осям системы  $O x_1 x_2 x_3$ . Пусть  $v_i$  — проекция единичной нормали  $\nu$  на ось  $y_i$ , тогда, очевидно,  $y_i = v_i a$  на  $\Sigma$ . Разложим правую часть (2.5) в ряд Тейлора с центром в точке  $P$

$$\frac{\partial \varphi^{2k+1}}{\partial \nu} = - \sum_i v_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = - \frac{1}{a} \left( \sum_i u_i y_i + \frac{1}{1!} \sum_{ij} u_{ij} y_i y_j + \frac{1}{2!} \sum_{ijk} u_{ijk} y_i y_j y_k + \dots \right) \quad (2.6)$$

Здесь  $u_i$ ,  $u_{ij}$ , и т. д. — частные производные от  $u$  по  $x_i$ ,  $x_i$  и  $x_j$ , и т. д., взятые в точке  $P$ , а суммирование по индексам  $i, j, \dots$  ведется от 1 до 3. Суммы в (2.6) представляют собой последовательные члены разложения гармонической функции в ряд Тейлора и, следовательно, являются однородными гармоническими полиномами [4]. На сфере  $\Sigma$  они могут быть записаны в виде ( $Y_n$  — сферическая функция)

$$\frac{1}{(n-1)!} \sum_{(n)} u_{ij\dots k} y_i y_j \dots y_k = \frac{a^n}{(n-1)!} \sum_{(n)} u_{ij\dots k} v_i v_j \dots v_k = Y_n$$

Здесь символ  $(n)$  указывает число индексов  $i, j, \dots, k$ , т. е. степень полинома, а суммирование по каждому индексу производится от 1 до 3. Решение внешней задачи Неймана для сферы  $\Sigma$  с условием (2.6) будет

$$\begin{aligned} \varphi^{2k+1} &= \frac{1}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n+2}}{(n+1)! r_1^{n+1}} Y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{2n+1}}{(n-1)! (n+1) r_1^{n+1}} \sum_{(n)} u_{ij\dots k} v_i v_j \dots v_k = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{2n+1}}{(n-1)! (n+1) r_1^{2n+1}} \left( \sum_{(n)} u_{ij\dots k} y_i y_j \dots y_k \right) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Здесь  $r_1 = r - r_p$  — радиус-вектор из точки  $P$  ( $r_1 = a$  на  $\Sigma$ .)

Потенциал  $\varphi^\circ$  можно записать в виде

$$\varphi^\circ = v_0 r + \omega_1 \Phi^1 + \omega_2 \Phi^2 + \omega_3 \Phi^3 \quad (2.8)$$

где  $\omega_i$  — проекции вектора  $\omega$  на оси  $x_i$  (или  $y_i$ ), а  $\Phi^i$  — гармонические в  $D$  функции (потенциалы Жуковского [5]), удовлетворяющие на  $S$  условиям

$$\partial \Phi^i / \partial n = (\mathbf{r} \times \mathbf{n})_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

Индекс  $i$  в правой части означает проекцию вектора на ось  $x_i$ .

Оценим порядки по  $\varepsilon = a/l$  функций  $\varphi^k$  и их производных. Пусть единица длины есть величина порядка характерного размера полости, и расстояние  $l$  от  $P$  до  $S$  имеет тот же порядок, тогда  $l \sim 1$ ,  $a \sim \varepsilon$ . Тогда  $\varphi^\circ$  и все ее производные суть  $O(1)$ . Из (2.7) находим, что вдали от сферы  $E$  ( $r_1 \sim l \sim 1$ , в частности, на  $S$ ) функция  $\varphi^1$  и ее производные имеют порядок  $O(\varepsilon^3)$ . Из той же формулы найдем при  $r_1 \sim a \sim \varepsilon$  (в частности, на  $\Sigma$ ) оценки:  $|\varphi^1| \sim \varepsilon$ ,  $|\nabla \varphi^1| \sim 1$ . Функция  $\varphi^2$  гармонична в области  $D$ , характерный размер которой есть  $O(1)$ , и имеет, согласно (2.3), нормальную производную порядка  $\varepsilon^3$  на  $S$ . Отсюда следует, что  $|\varphi^2| \sim |\nabla \varphi^2| \sim \varepsilon^3$  всюду в  $D$ : Аналогично получим оценки  $|\varphi^{2k}| \sim |\nabla \varphi^{2k}| \sim \varepsilon^{3k}$  всюду в области  $D$  и  $|\varphi^{2k+1}| \sim |\nabla \varphi^{2k+1}| \sim \varepsilon^{3k+3}$  вдали от  $E$  (при  $r_1 \sim l$ , в частности, на  $S$ ), а вблизи сферы  $E$  (при  $r_1 \sim a$ , в частности на  $\Sigma$ ) будем иметь:

$$|\varphi^{2k+1}| \sim \varepsilon^{3k+1}, \quad |\nabla \varphi^{2k+1}| \sim \varepsilon^{3k}$$

Из этих оценок следует, что  $\varphi = \varphi^\circ + \varphi^1$  на поверхности  $\Sigma$  с точностью до  $O(\varepsilon^3)$ . Функцию  $\varphi^\circ$  на  $\Sigma$  представим отрезком ряда Тейлора с центром в точке  $P$

$$\varphi^\circ = \varphi_p^\circ + \sum_i \varphi_i^\circ y_i + \frac{1}{2} \sum_{ij} \varphi_{ij}^\circ y_i y_j + O(\varepsilon^3) \quad (2.9)$$

Здесь  $\varphi_p^\circ = \varphi^\circ(\mathbf{r}_p, t)$ ,  $\varphi_i^\circ$ ,  $\varphi_{ij}^\circ$  — производные в точке  $P$ .

Из равенства (2.7) на  $\Sigma$  при  $k=0$ , учитывая, что  $u_i = \varphi_i^\circ - v_{pi}$ , найдем

$$\varphi^1 = \frac{1}{2} \sum_i (\varphi_i^\circ - v_{pi}) y_i + \frac{1}{3} \sum_{ij} \varphi_{ij}^\circ y_i y_j + O(\varepsilon^3) \quad (2.10)$$

причем суммирование по всем индексам производится от 1 до 3.

Складывая (2.9) и (2.10), получим  $\varphi$  на  $\Sigma$

$$\varphi = \varphi_p^\circ + \frac{1}{2} \sum_i (3\varphi_i^\circ - v_{pi}) y_i + \frac{5}{6} \sum_{ij} \varphi_{ij}^\circ y_i y_j + O(\varepsilon^3) \quad (2.11)$$

3. Преобразуем выражение кинетической энергии жидкости (1.10), учитывая, что  $\partial \varphi / \partial n = \partial \varphi^\circ / \partial n$  на  $S$ , и применяя теорему Грина

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{\rho}{2} \left( \oint_S \varphi \frac{\partial \varphi^\circ}{\partial n} ds - \oint_\Sigma \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial v} ds \right) = \frac{\rho}{2} \left[ \oint_S \varphi \frac{\partial \varphi^\circ}{\partial n} ds - \oint_\Sigma \varphi \frac{\partial \varphi^\circ}{\partial v} ds + \right. \\ &+ \left. \oint_\Sigma \varphi \left( \frac{\partial \varphi^\circ}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) ds \right] = \frac{\rho}{2} \left\{ \oint_S \varphi^\circ \frac{\partial \varphi^\circ}{\partial n} ds + \oint_\Sigma \left[ -\varphi^\circ \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \varphi \left( \frac{\partial \varphi^\circ}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) \right] ds \right\} = T_2^\circ + T_2' \quad (3.1) \end{aligned}$$

Первый из интегралов (3.1)

$$T_2^\circ = \frac{1}{2} \rho \oint_S \varphi^\circ \frac{\partial \varphi^\circ}{\partial n} ds \quad (3.2)$$

представляет собой кинетическую энергию жидкости, целиком заполняющей полость, и предполагается известным. Этот интеграл выражается через присоединенные моменты инерции полости [5], которые можно вычислить, если известны  $\Phi^i$ .

Второй интеграл в (3.1), учитывая (1.2), запишем в виде

$$T_2' = \frac{1}{2} \rho \oint_\Sigma \left[ -\varphi^\circ \mathbf{v}_p \mathbf{v} + \varphi \left( \frac{\partial \varphi^\circ}{\partial \mathbf{v}} - \mathbf{v}_p \mathbf{v} \right) \right] ds \quad (3.3)$$

Подставим сюда выражение  $\varphi^\circ$  из (2.9) и  $\varphi$  из (2.11), а  $\partial \varphi^\circ / \partial \mathbf{v}$  заменим отрезком ряда Тейлора аналогично (2.9) (с точностью до  $O(\varepsilon^3)$ ), при этом учтем также равенство  $av_i = y_i$  на  $\Sigma$ . Тогда подынтегральное выражение в (3.3) сведется, с точностью  $\sim \varepsilon^3$ , к простому полиному от  $y_i$ , и интеграл (3.3) легко вычисляется и дает (площадь поверхности  $\Sigma$  есть  $O(\varepsilon^2)$ )

$$T_2' = \frac{3}{4} \rho \Omega (\nabla \varphi_p^\circ - \mathbf{v}_p)^2 - \frac{1}{2} \rho \Omega v_p^2 + O(\varepsilon^5) \quad (3.4)$$

где  $\nabla \varphi_p^\circ$  — значение  $\nabla \varphi^\circ$  в точке  $P$ , равное, согласно (2.8),

$$\nabla \varphi_p^\circ = \mathbf{v}_0 + \sum_s \omega_s \nabla \Phi_p^s \quad (3.5)$$

Учитывая (3.1), (3.4), запишем (1.10) в виде

$$T = T^\circ + \frac{3}{4} \rho \Omega (\nabla \varphi_p^\circ - \mathbf{v}_p)^2 + \frac{1}{2} (m - \rho \Omega) v_p^2 + O(\varepsilon^5) \quad (3.6)$$

где  $T^\circ = T_1 + T_2^\circ$  — кинетическая энергия тела  $B$  с полостью  $D$ , целиком заполненной жидкостью (этот член считаем известным).

Выражая  $\mathbf{v}_p$ ,  $\nabla \varphi_p^\circ$  через  $\omega$  формулами (1.3), (3.5) и дифференцируя согласно (1.4), найдем

$$\begin{aligned} \mathbf{K} = & \mathbf{K}^\circ + \frac{3}{2} \rho \Omega \sum_s \mathbf{e}_s [(\nabla \varphi_p^\circ - \mathbf{v}_p) \cdot \nabla \Phi_p^s] + \\ & + \frac{1}{2} \rho \Omega (3 \nabla \varphi_p^\circ - \mathbf{v}_p) \times \mathbf{r}_p + m \mathbf{r}_p \times \mathbf{v}_p + O(\varepsilon^5) \end{aligned} \quad (3.7)$$

где  $\mathbf{e}_s$  — единичный вектор, параллельный оси  $x_s$  (или  $y_s$ ).

Перейдем к составлению уравнения движения сферы. Функцию  $U$  в области  $E$  представим рядом Тейлора, опуская члены, которые после интегрирования по  $E$  в (1.1) будут иметь порядок  $\varepsilon^5$  (объем  $\Omega$  области  $E$  есть  $O(\varepsilon^3)$ ).

Из (1.1) получим

$$\Pi = \rho \int_D U dv - \rho \int_E (U_p + \mathbf{r}_1 \cdot \nabla U_p) dv + O(\varepsilon^5)$$

Интеграл по  $E$  от второго слагаемого равен нулю в силу нечетности функции  $\mathbf{r}_1 \cdot \nabla U_p$ , а интеграл по  $D$  не зависит от  $\mathbf{R}_p$ . Тогда, согласно (1.7),

$$\mathbf{Q}_p = \mathbf{F}_p + \rho \Omega \nabla U_p + O(\varepsilon^5) \quad (3.8)$$

причем второе слагаемое есть архимедова сила.

Подставим (3.6), (3.8) в (1.6), учитывая, что  $T^\circ$  не зависит от координат и скоростей точки  $P$

$$\left(m + \frac{1}{2} \rho \Omega\right) \frac{dv_p}{dt} - \frac{3}{2} \rho \Omega \left\{ \frac{d}{dt} (\nabla \Phi_p^\circ) + [(\nabla \Phi_p^\circ - v_p) \nabla] \nabla \Phi_p^\circ \right\} = \\ = F_p + \rho \Omega \nabla U_p + O(\varepsilon^5) \quad (3.9)$$

Дифференцирование по  $t$  проводится вдоль траектории точки  $P$ , т. е.

$$\frac{d}{dt} \nabla \Phi^\circ(\mathbf{R}_p, t) = \frac{\partial}{\partial t} [\nabla \Phi^\circ(\mathbf{R}_p, t)] + (v_p \nabla) \nabla \Phi^\circ(\mathbf{R}_p, t)$$

Учитывая это равенство и опуская члены  $O(\varepsilon^5)$ , перепишем уравнение (3.9) в окончательном виде

$$\left(m + \frac{1}{2} \rho \Omega\right) \frac{dv_p}{dt} = F_p + \rho \Omega \nabla U_p + \frac{3}{2} \rho \Omega w_p^\circ \quad (3.10)$$

Здесь  $w_p^\circ$  — ускорение частицы жидкости, которая находилась бы в точке  $P$ , если бы полость была полностью заполнена, или, другими словами, производная скорости по  $t$  вдоль траектории жидкой частицы при отсутствии сферы  $E$

$$w_p^\circ = \frac{\partial (\nabla \Phi_p^\circ)}{\partial t} + (\nabla \Phi_p^\circ \nabla) \nabla \Phi_p^\circ \quad (3.11)$$

Эта величина подчиняется уравнению движения жидкости

$$\rho w^\circ = - \nabla p^\circ - \rho \nabla U$$

где  $p^\circ$  — давление в жидкости, целиком заполняющей полость.

Выпишем явное выражение  $w_p^\circ$  через потенциалы Жуковского, дифференцируя (3.5) вдоль траектории жидкой частицы

$$w_p^\circ = \frac{dv_0}{dt} + \sum_s \frac{d\omega_s}{dt} \nabla \Phi_p^s + \omega \times \sum_s \omega_s \nabla \Phi_p^s + \\ + \sum_{sij} \omega_s e_i \Phi_{ij}^s \left[ \sum_k \omega_k \Phi_j^k - (\omega \times r_p)_j \right] \quad (3.12)$$

В формуле (3.12) все производные функций  $\Phi^s$  по координатам  $x_i$  вычисляются в точке  $P$ . Из уравнения (3.10) можно найти равнодействующую сил гидродинамического давления

$$N = m \frac{dv_p}{dt} - F_p = \rho \Omega \nabla U_p + \frac{3}{2} \rho \Omega w_p^\circ - \frac{1}{2} \rho \Omega \frac{dv_p}{dt}$$

Итак, величины  $T$ ,  $K$ ,  $Q$  определены формулами (3.6), (3.7), (1.8) с погрешностью  $\sim \varepsilon^5$ , что обеспечивает высокую точность даже при не слишком малом  $\varepsilon$ . Следовательно, уравнения (1.5), (3.10) с точностью до  $\varepsilon^5$  могут быть составлены (потенциал  $\Phi^\circ$  и величины  $T^\circ$ ,  $Q^\circ$ ,  $K^\circ$ , как указывалось выше, считаем известными). Полученные уравнения движения, очевидно, эквивалентны уравнениям движения системы, состоящей из твердого тела и материальной точки  $P$ , взаимодействующих друг с другом.

Разность  $T - T^\circ$  имеет порядок  $\varepsilon^3 (\Omega \sim a^3)$ , т. е. порядок отношения объемов сферы  $E$  и полости  $D$ . Именно таков порядок возмущений в урав-

нениях движения тела с жидкостью за счет сферы  $E$  (если массы тела и жидкости — одного порядка). Поэтому, не теряя точности, уравнения движения можно интегрировать следующим образом. Сначала решаем уравнения движения тела с жидкостью, целиком заполняющей полость, т. е. определяем невозмущенное движение. Затем интегрируем уравнение (3.10) движения сферы  $E$ , считая движение тела невозмущенным. После этого подставляем координаты и скорости точки  $P$  в уравнения (1.5) и определяем возмущенное движение тела с жидкостью.

4. Рассмотрим некоторые примеры. Пусть при отсутствии сферы  $E$  жидкость в полости движется поступательно ( $\nabla\Phi^0 \equiv \mathbf{v}_0$ ), что может быть либо при поступательном движении тела ( $\omega = 0$ ), либо в случае сферической полости (все  $\Phi^i = 0$ ). Жидкость, целиком заполняющая полость, в этом случае эквивалентна материальной точке массы  $\mu$ , расположенной в центре инерции жидкости. Полагая  $F_p = 0$ ,  $U = 0$ , из (3.10), (3.12) найдем ( $\mathbf{c}$  — произвольный постоянный вектор)

$$\frac{d\mathbf{v}_p}{dt} = \frac{3\rho\Omega}{\rho\Omega + 2m} \frac{d\mathbf{v}_0}{dt}, \quad \mathbf{v}_p = \frac{3\rho\Omega}{\rho\Omega + 2m} \mathbf{v}_0 + \mathbf{c} \quad (4.1)$$

Этот результат можно легко получить также из теории присоединенных масс. В частности, для пузыря ( $m = 0$ )

$$d\mathbf{v}_p/dt = 3d\mathbf{v}_0/dt$$

т. е. его абсолютное ускорение втрое больше абсолютного ускорения полости [6].

Подставляя (4.1) в (3.6), найдем, с точностью до несущественного постоянного слагаемого,

$$T = T^0 + \frac{3(m - \rho\Omega)\rho\Omega}{2(\rho\Omega + 2m)} v_0^2 \quad (4.2)$$

Таким образом, наличие сферы  $E$  в полости (при поступательном движении) эквивалентно изменению массы жидкости на постоянную величину. Если сфера  $E$  — пузырь, то эквивалентная масса полости с жидкостью и пузырем равна  $\mu - 3\rho\Omega$ .

Изучим еще в качестве примера движение сферы  $E$  в эллипсоидальной полости

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1$$

Пусть  $\mathbf{v}_0 = 0$ ,  $F_p = 0$ ,  $U = 0$ , а движение полости задано и представляет собой равномерное вращение вокруг неподвижной оси, проходящей через центр симметрии эллипсоида — точку  $O$ . При этих предположениях уравнение (3.10) с учетом (3.12) примет вид

$$\begin{aligned} & \mathbf{r}'' + 2\omega \times \mathbf{r}' + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}) = \\ & = \alpha \left\{ \omega \times \sum_s \omega_s \nabla \Phi^s + \sum_{sij} \omega_s e_i \Phi_{ij}^s \left[ \sum_k \omega_k \Phi_j^k - (\omega \times \mathbf{r})_j \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\alpha = 3\rho\Omega / (\rho\Omega + 2m) \quad (0 \leq \alpha \leq 3) \quad (4.4)$$

Здесь абсолютное ускорение точки  $P$  выражено через переносное, относительное и кориолисово, а индекс  $p$  всюду опущен. Потенциалы Жуковского для эллипсоидальной полости известны [5]

$$\Phi^3 = k_3 x_1 x_2, \quad k_3 = (a_1^2 - a_2^2) / (a_1^2 + a_2^2) \quad (|k_3| \leq 1) \quad (4.5)$$

Остальные  $\Phi^i$  получаются из (4.5) циклической перестановкой индексов. Подставляя (4.5) в (4.3), получим линейную систему с постоянными коэффициентами, описывающую движение точки  $P$ .

Примем для простоты, что полость вращается вокруг своей оси симметрии ( $\omega_1 = \omega_2 = 0, \omega_3 = \omega$ ). Тогда, после подстановки (4.5) в (4.3) и проектирования на оси  $x_i$ , получим

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 - 2\omega\dot{x}_2 - \omega^2 x_1 &= \alpha\omega^2 k(k-2)x_1 & (k = k_3) \\ \ddot{x}_2 + 2\omega\dot{x}_1 - \omega^2 x_2 &= \alpha\omega^2 k(k+2)x_2, & \ddot{x}_3 = 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Из (4.6) видно, что движение точки  $P$  вдоль оси вращения  $x_3$  происходит по инерции. Поэтому, как и следовало ожидать, положения равновесия сферы на оси вращения ( $x_1 = x_2 = 0, x_3 = x_3^0$ ) неустойчивы, и других положений равновесия система (4.6) не имеет.

Рассмотрим движение точки  $P$  в плоскости вращения  $x_1 x_2$ . Элементарное исследование характеристического уравнения для первой пары уравнений (4.6) позволяет получить условия устойчивости положения равновесия  $x_1 = x_2 = 0$  в плоскости  $x_1 x_2$ . Эти условия (необходимые и достаточные) имеют вид

$$(2|k| - k^2)^{-1} > \alpha > 1, \quad 0 < |k| < 1 \quad (4.7)$$

При выполнении условий (4.7) характеристическое уравнение имеет некрратные чисто мнимые корни (диссипация в системе отсутствует), и сфера не будет удаляться от оси вращения. Преобразуем (4.7), подставляя  $\alpha$  и  $k$  из (4.4), (4.5) и полагая для определенности  $a_1 \geq a_2$

$$1 > \frac{m}{\rho\Omega} > 1 - \frac{6a_2^4}{(a_1^2 + a_2^2)^2}, \quad a_1 > a_2 \quad (4.8)$$

Для пузыря ( $m = 0$ ) из (4.8) получим условия устойчивости равновесия в плоскости вращения в виде

$$1 < a_1 / a_2 < (\sqrt{6} - 1)^{1/2} \approx 1.20$$

5. Рассмотрим реакцию твердого тела с полостью, содержащей жидкость и пузырь воздуха, на ударные воздействия. Пусть в некоторый момент времени к твердому телу приложены импульсивные (ударные) силы и моменты, вызывающие мгновенное изменение величин  $v_0, \omega, v_p$  на  $\delta v_0, \delta\omega, \delta v_p$ . Одновременно  $T, K, Q$  также получают конечные приращения  $\delta T, \delta K, \delta Q$ . Здесь уже нельзя считать пузырь недеформируемой сферой. Импульсом сил поверхностного натяжения, как и импульсами других ограниченных по величине сил, можно пренебречь за время удара.

Гидродинамический потенциал получает в момент удара конечное приращение  $\delta\phi(\mathbf{r})$ . Функция  $\delta\phi$  гармонична в области  $D_1$  и удовлетворяет краевым условиям ( $C$  — произвольная константа)

$$\frac{\partial\delta\phi}{\partial n} = (\delta v_0 + \delta\omega \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} \quad \text{на } S, \quad \delta\phi = C \quad \text{на } \Sigma \quad (5.1)$$

Второе условие (5.1) выражает отсутствие импульсивных воздействий на поверхности  $\Sigma$ .

Краевую задачу для  $\delta\phi$  также можно решать методом Шварца, полагая, аналогично (2.1),

$$\delta\phi = \delta\phi^0 + \delta\phi^1 + \delta\phi^2 + \dots \quad (5.2)$$

Функции  $\delta\phi^{2k}$  гармоничны в  $D$ , а  $\delta\phi^{2k+1}$  — вне  $E$ , причем  $\delta\phi^0$  удовлетворяет первому условию (5.1), а остальные функции подчинены условиям

$$\frac{\partial\delta\phi^{2k}}{\partial n} = -\frac{\partial\delta\phi^{2k-1}}{\partial n} \quad \text{на } S, \quad \delta\phi^{2k+1} = -\delta\phi^{2k} + \delta\phi_p^{2k} \quad \text{на } \Sigma \quad (5.3)$$

для  $\delta\phi^{2k}, \delta\phi^{2k+1}$  соответственно. Индекс  $p$  относится к значению в точке  $P$ , а постоянные слагаемые  $\delta\phi_p^{2k}$  в (5.3) выбираются для удобства. Функции  $\delta\phi^i$  имеют те же порядки по  $\varepsilon$ , что и  $\phi^i$  в п. 2.

Потенциал  $\delta\phi^0$  определяется равенством, аналогичным (2.8)

$$\delta\phi^0 = \delta v_0 \cdot \mathbf{r} + \delta\omega_1 \Phi^1 + \delta\omega_2 \Phi^2 + \delta\omega_3 \Phi^3$$

Выпишем еще  $\delta\varphi^1$ , предварительно разложив условие (5.3) при  $k = 1$  в ряд Тейлора с центром в  $P$

$$\delta\varphi^1 = - \sum_i \delta\varphi_i^\circ y_i - \frac{1}{2!} \sum_{ij} \delta\varphi_{ij}^\circ y_i y_j - \dots \quad (5.4)$$

Здесь  $\delta\varphi_i^\circ$ ,  $\delta\varphi_{ij}^\circ$  и т. д. по-прежнему означают соответствующие частные производные в точке  $P$ . Решение внешней задачи Дирихле для сферы  $E$  с граничным условием (5.4) дается формулой, аналогичной (2.7)

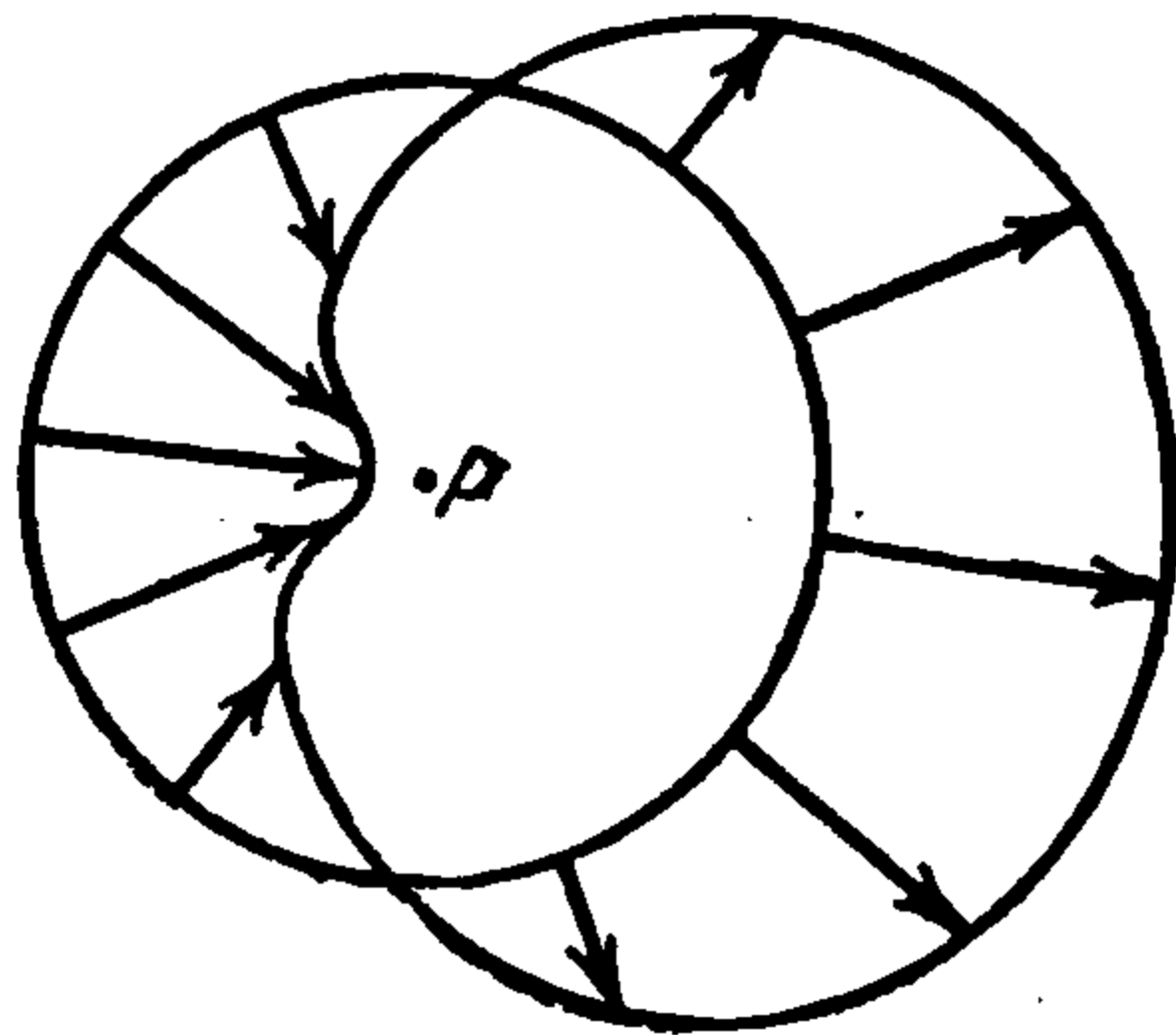
$$\delta\varphi^1 = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{2n+1}}{n! r_1^{2n+1}} \left( \sum_{(n)} \delta\varphi_{ij\dots k}^\circ y_i y_j \dots y_k \right) \quad (5.5)$$

Вычислим приращение кинетической энергии жидкости, исходя из формулы

$$\delta T_2 = \frac{1}{2} \rho \int_{D_1} [(\nabla\varphi + \nabla\delta\varphi)^2 - (\nabla\varphi)^2] dv = \frac{1}{2} \rho \int_{D_1} (2\nabla\varphi + \nabla\delta\varphi) \nabla\delta\varphi dv$$

Преобразуя это выражение аналогично (3.1), пользуясь теоремой Грина и равенствами

$$\frac{\partial\delta\varphi}{\partial n} = \frac{\partial\delta\varphi^\circ}{\partial n} \quad \text{на } S, \quad \delta\varphi = C \quad \text{на } \Sigma$$



Фиг. 2

придем к формуле ( $\delta T_2^\circ$  — приращение  $T_2^\circ$  из (3.2))

$$\delta T_2 = \delta T_2^\circ - \frac{1}{2} \rho \oint_{\Sigma} (2\varphi^\circ + \delta\varphi^\circ) (\mathbf{v} \nabla\delta\varphi) ds \quad (5.6)$$

Функцию  $\nabla\delta\varphi$ , входящую в интеграл (5.6)

$$\nabla\delta\varphi = \nabla\delta\varphi^\circ + \nabla\delta\varphi^1 + O(\varepsilon^3)$$

найдем, представляя  $\nabla\delta\varphi^\circ$  рядом Тейлора аналогично (2.9) и вычисляя  $\nabla\delta\varphi^1$  путем дифференцирования (5.5).

После указанных вычислений получим на поверхности  $\Sigma$

$$\nabla\delta\varphi = \frac{r_1}{a^2} \left[ 3 \sum_i \delta\varphi_i^\circ y_i + \frac{5}{2} \sum_{ij} \delta\varphi_{ij}^\circ y_i y_j + \frac{7}{6} \sum_{ijk} \delta\varphi_{ijk}^\circ y_i y_j y_k \right] + O(\varepsilon^3) \quad (5.7)$$

Отсюда виден характер деформации сферического пузыря при ударе. Точки поверхности  $\Sigma$  приобретают при ударе дополнительные скорости, направленные по радиусу сферы и равные в первом приближении  $3u \cos \theta$  ( $u$  — дополнительная скорость, которую получила бы при таком же ударе частица жидкости, находящаяся в точке  $P$  внутри целиком заполненной полости,  $\theta$  — угол, отсчитываемый от направления  $u$ ). Эюра скоростей, приобретаемых поверхностью пузыря при ударе, изображена на фиг. 2. Такое распределение скоростей качественно согласуется с результатами экспериментальных исследований движения пузыря в жидкости (например [7]).

Пользуясь (5.7) и представляя  $\varphi^\circ$  формулой (2.9), а  $\delta\varphi^\circ$  — аналогичной формулой, нетрудно вычислить интеграл (5.6), после чего приращение кинетической энергии всей системы можно записать в виде

$$\delta T = \delta T^\circ - \frac{3}{2} \rho \Omega (2\nabla\varphi_p^\circ + \nabla\delta\varphi_p^\circ) \nabla\delta\varphi_p^\circ + O(\varepsilon^5) \quad (5.8)$$

Рассмотрим теперь явление удара в том случае, когда пузырь остается при ударе недеформируемой жесткой сферой с массой  $m = 0$ . При таком подходе можно пользоваться формулами п. 3. В уравнениях (3.10), (3.12) заменим производные скоростей по времени их конечными приращениями за время удара и пренебрежем импульсами сил  $F_p$ ,  $\rho \Omega \nabla U$  за это время. Тогда получим

$$\delta v_p = 3 \nabla\delta\varphi_p^\circ = 3 (\delta v_\theta + \sum_s \delta \omega_s \nabla \Phi_p^s) \quad (5.9)$$

Теперь нетрудно, пользуясь (3.6) и (5.9), подсчитать приращение  $\delta T$  за время удара. После простых вычислений получим выражение, в точности совпадающее с (5.8). Следовательно, с точностью до членов  $O(\varepsilon^5)$ , поведение рассматриваемой системы при ударе не зависит от того, считать ли первоначально сферический пузырь деформируемым (со свободной поверхностью) или жестким. Значит, приращения  $\delta Q$ ,  $\delta K$  можно (с точностью до  $O(\varepsilon^5)$ ) вычислять при помощи формул (1.8), (3.7), учитывая равенства (5.9) и  $m = 0$ . Вычисление дает

$$\delta Q = \delta Q^\circ - 3\rho\Omega \nabla \delta \varphi_p^\circ, \quad \delta K = \delta K^\circ - 3\rho\Omega \sum_s e_s (\nabla \Phi_p^s \cdot \nabla \delta \varphi_p^\circ)$$

Полученные формулы позволяют рассчитывать поведение системы при ударе.

6. Отметим, что уравнение (3.10) справедливо с точностью  $\sim \varepsilon^2 \sim a^2 l^{-2}$  и в том случае, когда сфера  $E$  движется в любом потенциальном течении жидкости с характерным масштабом  $l$ , если  $l \gg a$  (не обязательно внутри некоторой полости). Используя уравнение движения жидкости, запишем (3.10) в виде

$$(m + 1/2 \rho \Omega) dv_p / dt = F_p - 1/2 \rho \Omega \nabla U - 3/2 \Omega \nabla p^\circ \quad (6.1)$$

где  $p^\circ$ , как и прежде, давление в точке  $P$  в невозмущенном потоке, т. е. при отсутствии сферы. При помощи уравнения (6.1) можно изучать движение малой жесткой сферы в любом потенциальном течении идеальной несжимаемой жидкости.

Пусть невозмущенное движение жидкости — установившееся, сила  $F_p$  — потенциальна ( $F_p = -\nabla W$ ), и  $W$  и  $U$  не зависят от времени. Тогда уравнение движения сферы  $E$  имеет первый интеграл

$$1/2 (m + 1/2 \rho \Omega) v_p^2 + \Phi = C, \quad \Phi = W + 1/2 \rho \Omega U + 3/2 \Omega p^\circ$$

где  $\Phi$  играет роль потенциальной энергии, а  $p^\circ$  можно выразить через скорость  $v^\circ$  невозмущенного течения при помощи интеграла Бернулли.

Положениям равновесия сферы в потоке соответствуют стационарные точки функции  $\Phi$  (где  $\nabla \Phi = 0$ ), а их устойчивость определяется характером этих стационарных точек. Пусть потенциалы внешних сил — гармонические функции ( $\Delta W = \Delta U = 0$ ), что справедливо, например, для сил тяжести. На стр. 62 книги [6] показано, что в этом случае всюду  $\Delta p^\circ \leq 0$ , и, следовательно,  $\Delta \Phi \leq 0$ , т. е.  $\Phi$  — супергармоническая функция. Известно, что минимум таких функций достигается на границе области [3], и внутренние стационарные точки не являются строгими минимумами. Поэтому при сделанных предположениях в большинстве случаев следует ожидать неустойчивости положений равновесия сферы внутри установившегося потенциального потока идеальной несжимаемой жидкости.

Поступила 24 I 1964

Вычислительный центр  
АН СССР

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Румянцев В. В. Методы Ляпунова в исследовании устойчивости движения твердых тел с полостями, наполненными жидкостью. Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1963, № 6.
2. Лурье А. И. Аналитическая механика. Физматгиз, М., 1962.
3. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. IV. Физматгиз, М., 1958.
4. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики, т. II. Гостехтеоретиздат, М.—Л., 1945.
5. Жуковский Н. Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородною капельною жидкостью. Избр. соч., т. I. Гостехтеоретиздат, М.—Л., 1948, стр. 31—152.
6. Биркгоф Г. Гидродинамика. Изд. иностр. лит., М., 1954.
7. Walters J. K., Davidson T. F. The initial motion of a gas bubble formed in an inviscid liquid, part 2. J. Fluid Mech., 1963, v. 17, p. 3.