

## ОПТИМАЛЬНЫЕ РЕЖИМЫ ТОРМОЖЕНИЯ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ СИММЕТРИЧНОГО ТЕЛА

Б. А. Смольников

(Ленинград)

Управление вращательным движением твердого тела при помощи системы сопловых реактивных двигателей, создающих вращающие моменты, сводится к выбору режимов программирования тяги этих двигателей в соответствии с условиями конкретной задачи. Ниже исследуется задача определения оптимального закона работы двигателей при торможении угловой скорости симметричного твердого тела, совершающего первоначально свободное движение в пространстве вокруг своего центра инерции. Рассматриваются два режима торможения: торможение за кратчайшее время (при незаданном расходе рабочего вещества) и торможение с минимальным расходом рабочего вещества (при незаданном времени). Хотя в отдельных частных случаях оба этих режима и могут оказаться совпадающими, в общем случае они носят различный характер и требуют поэтому отдельного рассмотрения.

В проводимом анализе предполагается, что сопловые двигатели создают управляющие моменты вокруг главных осей инерции тела и что при расходовании рабочего вещества моменты инерции тела остаются практически неизменными (так же как и направления главных осей в теле). Управляющие моменты считаются ограниченными по величине.

В результате исследования найдено, что в первом случае все три управляющих момента действуют реверсивно до полной остановки тела, во втором же случае поперечные моменты включаются поочередно, тогда как продольный момент (направленный вдоль оси симметрии тела) остается включенным вплоть до полной ликвидации продольной компоненты угловой скорости тела. Дается построение фазовых траекторий в задаче о ликвидации прецессионного движения тела при неизменности его продольной компоненты скорости.

1. Задача о торможении за кратчайшее время. Рассмотрим задачу о нахождении оптимального по быстродействию режима торможения симметричного твердого тела. Полагая для определенности, что полярный момент инерции тела  $C$  больше его экваториального момента инерции  $A$ , запишем систему дифференциальных уравнений движения тела в виде

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_x + \varepsilon \omega_y \omega_z &= \frac{m_x}{A}, & \dot{\omega}_y - \varepsilon \omega_x \omega_z &= \frac{m_y}{A}, & \dot{\omega}_z &= \frac{m_z}{C} \\ \left( \varepsilon = \frac{C - A}{A} > 0 \right) & & & & \end{aligned} \quad (1.1)$$

Требуется определить такой закон изменения управляющих моментов  $m_x, m_y, m_z$  (относительно главных осей инерции  $x, y, z$ ), при котором компоненты угловой скорости  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  (играющие в дальнейшем роль фазовых координат) за кратчайшее время примут заданные конечные значения. В случае полного торможения тела конечные значения угловых скоростей должны стать равными нулю, в случае же неполного торможения, например при ликвидации только прецессионного движения тела,

должны стать равными нулю лишь поперечные компоненты  $\omega_x(T)$  и  $\omega_y(T)$ , где  $T$  — время окончания процесса. Ввиду линейности управляющих моментов относительно производных в уравнениях (1.1) для постановки вариационной задачи удобно воспользоваться принципом максимума [1]. Составим функцию  $H$  рассматриваемой задачи

$$H = \sum_k p_k \dot{\omega}_k = p_x \left( \frac{m_x}{A} - \varepsilon \omega_y \omega_z \right) + p_y \left( \frac{m_y}{A} + \varepsilon \omega_x \omega_z \right) + p_z \frac{m_z}{C} \quad (1.2)$$

и запишем систему уравнений для фазовых импульсов

$$p_k = - \partial H / \partial \omega_k$$

В развернутом виде она будет (1.3)

$$p_x \dot{+} \varepsilon p_y \omega_z = 0, \quad p_y \dot{-} \varepsilon p_x \omega_z = 0, \quad p_z \dot{-} \varepsilon (p_x \omega_y - p_y \omega_x) = 0$$

Не конкретизируя пока граничных условий задачи, построим необходимые интегралы уравнений (1.1) и (1.3) и исследуем общий характер оптимального режима управления. Для этого, пользуясь принципом максимума, установим оптимальный закон изменения управлений  $m_k$ . Так как функция  $H$  зависит от управлений линейно, то она достигает своего максимума при значениях управлений, равных их предельным значениям, причем если множитель  $p_k$  при  $m_k$  положителен, то управление берется на верхнем своем пределе, если же этот множитель отрицателен, — то на нижнем. Таким образом, при  $p_k \neq 0$  оптимальный режим изменения моментов  $m_k$  будет релейным<sup>1</sup> и определится следующими соотношениями: (1.4)

$$m_k(t) = \max m_k \text{ при } p_k(t) > 0, \quad m_k(t) = \min m_k \text{ при } p_k(t) < 0$$

Если пределы изменения  $m_k$  симметричны относительно нуля, то

$$m_k(t) = \max |m_k| \operatorname{sgn} p_k(t) \quad (1.5)$$

Здесь  $\max |m_k|$  — амплитудная величина  $k$ -го управления. В дальнейшем в настоящей задаче под  $m_k$  будет подразумеваться величина, определяемая соотношением (1.5).

2. Интегрирование уравнений оптимального движения. Чтобы получить решение системы уравнений (1.1) и (1.3), в которых управления определены согласно условиям (1.5), выделим сначала следующую подсистему, содержащую переменные  $p_x$ ,  $p_y$  и  $\omega_z$

$$p_x \dot{+} \varepsilon p_y \omega_z = 0, \quad p_y \dot{-} \varepsilon p_x \omega_z = 0, \quad \omega_z \dot{=} m_z / C \quad (2.1)$$

Согласно (1.5) на каждом отдельном участке движения момент  $m_z$  постоянен, так что решение последнего из написанных уравнений на участке будет

$$\omega_z = \omega_{z0} + C^{-1} m_z t \quad (2.2)$$

Таким образом,  $z$ -я компонента угловой скорости тела в оптимальном режиме торможения представляет собой кусочно-линейную функцию, точки излома которой, согласно (1.5), соответствуют корням функции  $p_z$ .

<sup>1</sup> Если  $p_k \equiv 0$ , то возникают особые режимы, которые могут отличаться от релейных. Подробнее эти режимы обсуждаются в работе Ли [3].

Введем в рассмотрение комплексную функцию

$$p = p_x + ip_y \quad (2.3)$$

Из первых двух уравнений (2.1) можно получить

$$p' - i\varepsilon\omega_z p = 0 \quad (2.4)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$p = p_0 \exp \left( i\varepsilon \int_0^t \omega_z dt \right) \quad (2.5)$$

Принимая во внимание выражение (2.2), находим

$$\varepsilon \int_0^t \omega_z dt = \frac{\varepsilon m_z}{2C} t^2 + \varepsilon \omega_{z0} t = \lambda (\omega_z^2 - \omega_{z0}^2) \quad \left( \lambda = \frac{\varepsilon C}{2m_z} \right) \quad (2.6)$$

Теперь вместо (2.5) будем иметь

$$p \exp (-i\lambda\omega_z^2) = \text{const} \quad (2.7)$$

Выражение для функции  $p$  можно представить также и в таком виде

$$p = P \exp [i(\lambda\omega_z^2 + \alpha)] \quad (2.8)$$

где  $P$  и  $\alpha$  — вещественные константы интегрирования, определяемые из граничных условий задачи. Отсюда для  $p_x$  и  $p_y$  имеем

$$p_x = P \cos (\lambda\omega_z^2 + \alpha), \quad |p_y = P \sin (\lambda\omega_z^2 + \alpha) \quad (2.9)$$

Умножая второе уравнение (1.1) на  $i$  и складывая его с первым, получим уравнение для комплексной поперечной угловой скорости тела

$$\omega' - i\varepsilon\omega_z\omega = A^{-1}m \quad (\omega = \omega_x + i\omega_y, m = m_x + im_y) \quad (2.10)$$

Общий интеграл этого уравнения согласно [2] имеет вид

$$\omega = \left[ \omega_0 + \frac{m}{A} \int_0^t \exp \left( -i\varepsilon \int_0^t \omega_z dt \right) dt \right] \exp \left( i\varepsilon \int_0^t \omega_z dt \right) \quad (2.11)$$

Принимая во внимание выражение (2.6) и переходя затем от переменной  $t$  к  $\omega_z$ , в результате интегрирования получим

$$\omega = \omega_0 \exp [i\lambda(\omega_z^2 - \omega_{z0}^2)] + \frac{m(\varepsilon + 1)}{m_z} \left( \frac{\pi}{2|\lambda|} \right)^{1/2} [C - C_0 - i \operatorname{sgn} \lambda (S - S_0)] \exp (i\lambda\omega_z^2) \quad (2.12)$$

$$(S = S(\omega_z \sqrt{|\lambda|}), S_0 = S(\omega_{z0} \sqrt{|\lambda|}))$$

Здесь  $|C(w)|$  и  $S(w)$  — интегралы Френеля,

$$C(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^w \cos v^2 dv, \quad S(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^w \sin v^2 dv \quad (2.13)$$

Интеграл (2.12) можно представить также в следующем виде:

$$\omega \exp (-i\lambda\omega_z^2) - \frac{m(\varepsilon + 1)}{m_z} \sqrt{\frac{\pi}{2|\lambda|}} [C - i \operatorname{sgn} \lambda S] = D = \text{const} \quad (2.14)$$

Для определения функции  $p_z$  можно обойтись без интегрирования соответствующего дифференциального уравнения: эта функция входит в интеграл задачи  $H$ , который можно записать в такой форме

$$m_z C^{-1} p_z - \varepsilon \omega_z (p_x \omega_y - p_y \omega_x) + A^{-1} (p_x m_x + p_y m_y) = 1 \quad (2.15)$$

Правая часть этого интеграла остается единой постоянной на протяжении всего процесса торможения. Объясняется это тем, что здесь релейные управления  $m_k$  стоят множителями перед соответствующими функциями  $p_k$ , обращающимися в нуль в моменты переключения управлений.

**3. Исследование решения.** Найденные интегралы для фазовых координат и импульсов содержат достаточное число постоянных для решения рассматриваемой двухточечной краевой задачи. В качестве трех постоянных, определяющих начальное положение фазовой точки в фазовом пространстве, можно выбрать, например, начальные значения скоростей  $\omega_{x0}$ ,  $\omega_{y0}$ ,  $\omega_{z0}$ . Тогда для удовлетворения конечных условий задачи (например для получения  $\omega_x(T) = \omega_y(T) = \omega_z(T) = 0$  в случае полного торможения) остаются величины  $P$ ,  $\alpha$ ,  $T$ , где  $T$  — длительность процесса торможения, а  $P$  и  $\alpha$  — постоянные интегрирования, входящие в уравнения (2.9). Из требования непрерывности  $p_x$  и  $p_y$  в точках переключения моментов  $m_k$  следует, что их амплитуда  $P$  и фаза  $(\lambda \omega_z^2 + \alpha)$  также должны быть непрерывны. Это в свою очередь говорит о том, что константа  $P$  сохраняет свое значение на протяжении всего процесса торможения, а константа  $\alpha$  изменяется скачкообразно на величину  $\pm 2|\lambda|\omega_z^2$  — в точках переключения момента  $m_z$ , оставаясь непрерывной в точках переключения моментов  $m_x$  и  $m_y$ .

Принимая во внимание выражения (2.9) для  $p_x$  и  $p_y$ , а также учитывая соотношения (1.5), перепишем интеграл (2.15) в виде

$$|p_z m_z| C^{-1} + P A^{-1} [ |m_x \cos(\lambda \omega_z^2 + \alpha)| + |m_y \sin(\lambda \omega_z^2 + \alpha)| ] - \varepsilon P \omega_z [ \omega_y \cos(\lambda \omega_z^2 + \alpha) - \omega_x \sin(\lambda \omega_z^2 + \alpha) ] = 1 \quad (3.1)$$

Отсюда видно, что полученный интеграл определяет лишь модуль функции  $p_z$ , но не знак ее. Можно выразить  $|p_z|$  и как явную функцию  $\omega_z$ , исключив отсюда  $\omega_x$  и  $\omega_y$  при помощи выражения (2.14). Однако для численных расчетов, по-видимому, удобнее пользоваться непосредственно выражением (3.1).

Законы переключения моментов  $m_x$  и  $m_y$  задаются следующими выражениями:

$$m_x = |m_x|_{\max} \operatorname{sgn} \cos(\lambda \omega_z^2 + \alpha), \quad m_y = |m_y|_{\max} \operatorname{sgn} \sin(\lambda \omega_z^2 + \alpha) \quad (3.2)$$

При этом переключения моментов  $m_x$  и  $m_y$  происходят соответственно в точках, определяемых уравнениями

$$\lambda \omega_z^2 + \alpha = n\pi + 1/2\pi, \quad \lambda \omega_z^2 + \alpha = n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (3.3)$$

Фазовая траектория системы определяется уравнением (2.14), правая часть которого скачкообразно изменяется в точках переключения моментов  $m_x$ ,  $m_y$ ,  $m_z$ . Найдем величину этого скачка в точке переключения

момента  $m_z$ . В силу непрерывности  $\omega$  и  $\omega_z$  получим

$$\Delta D (\Delta m_z) = D_2 - D_1 = 2i\omega \sin \lambda \omega_z^2 + \frac{2m(\varepsilon + 1)}{(m_z)_1} \left( \frac{\pi}{2|\lambda|} \right)^{1/2} C \quad (3.4)$$

В точке переключения момента  $m$  для  $\Delta D$  будем иметь

$$\Delta D (\Delta m) = D_2 - D_1 = \frac{(m_1 - m_2)(\varepsilon + 1)}{m_z} \left( \frac{\pi}{2|\lambda|} \right)^{1/2} (C - i \operatorname{sgn} \lambda S) \quad (3.5)$$

Здесь индекс 1 означает величину до переключения, индекс 2 — после переключения,  $D$  — константа, определяемая интегралом (2.14). Соотношения (3.4) и (3.5) позволяют сопрягать фазовую траекторию в точках переключения управлений при численном расчете процесса торможения. Уравнение (2.14) эквивалентно двум вещественным уравнениям:

$$\begin{aligned} \omega_x \cos \lambda \omega_z^2 + \omega_y \sin \lambda \omega_z^2 &= \operatorname{Re} D + \frac{\varepsilon + 1}{m_z} \left( \frac{\pi}{2|\lambda|} \right)^{1/2} (m_x C + m_y \operatorname{sgn} \lambda S) \\ \omega_x^2 + \omega_y^2 &= |D|^2 + \frac{2(\varepsilon + 1)}{m_z} \left( \frac{\pi}{2|\lambda|} \right)^{1/2} [C \operatorname{Re} (D\bar{m}) - \operatorname{sgn} \lambda S \operatorname{Im} (D\bar{m})] + \\ &+ \frac{|m|^2 (\varepsilon + 1)^2 \pi}{2m_z^2 |\lambda|} (C^2 + S^2) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Отсюда видно, что фазовая траектория представляет собой линию пересечения линейчатой геликоидальной поверхности с поверхностью вращения, т. е. некоторую пространственную спиралевидную кривую переменного радиуса и переменного шага, накручивающуюся вокруг оси  $\omega_z$ .

При достаточно больших значениях  $\omega_z$ , когда  $\lambda \omega_z^2 \gg 1$ , можно упростить выражение для угловой скорости  $\omega$  как функции  $\omega_z$ . Подставляя асимптотические разложения для интегралов Френеля

$$C(\omega_z \sqrt{|\lambda|}) \approx \frac{1}{2} + \frac{\sin |\lambda| \omega_z^2}{\omega_z \sqrt{2\pi |\lambda|}}, \quad S(\omega_z \sqrt{|\lambda|}) \approx \frac{1}{2} - \frac{\cos |\lambda| \omega_z^2}{\omega_z \sqrt{2\pi |\lambda|}} \quad (3.7)$$

в соотношение (2.14) и опуская несущественные постоянные, получим

$$\left( \omega - \frac{im}{\omega_z (C - A)} \right) \exp(-i\lambda \omega_z^2) = \operatorname{const} \quad (3.8)$$

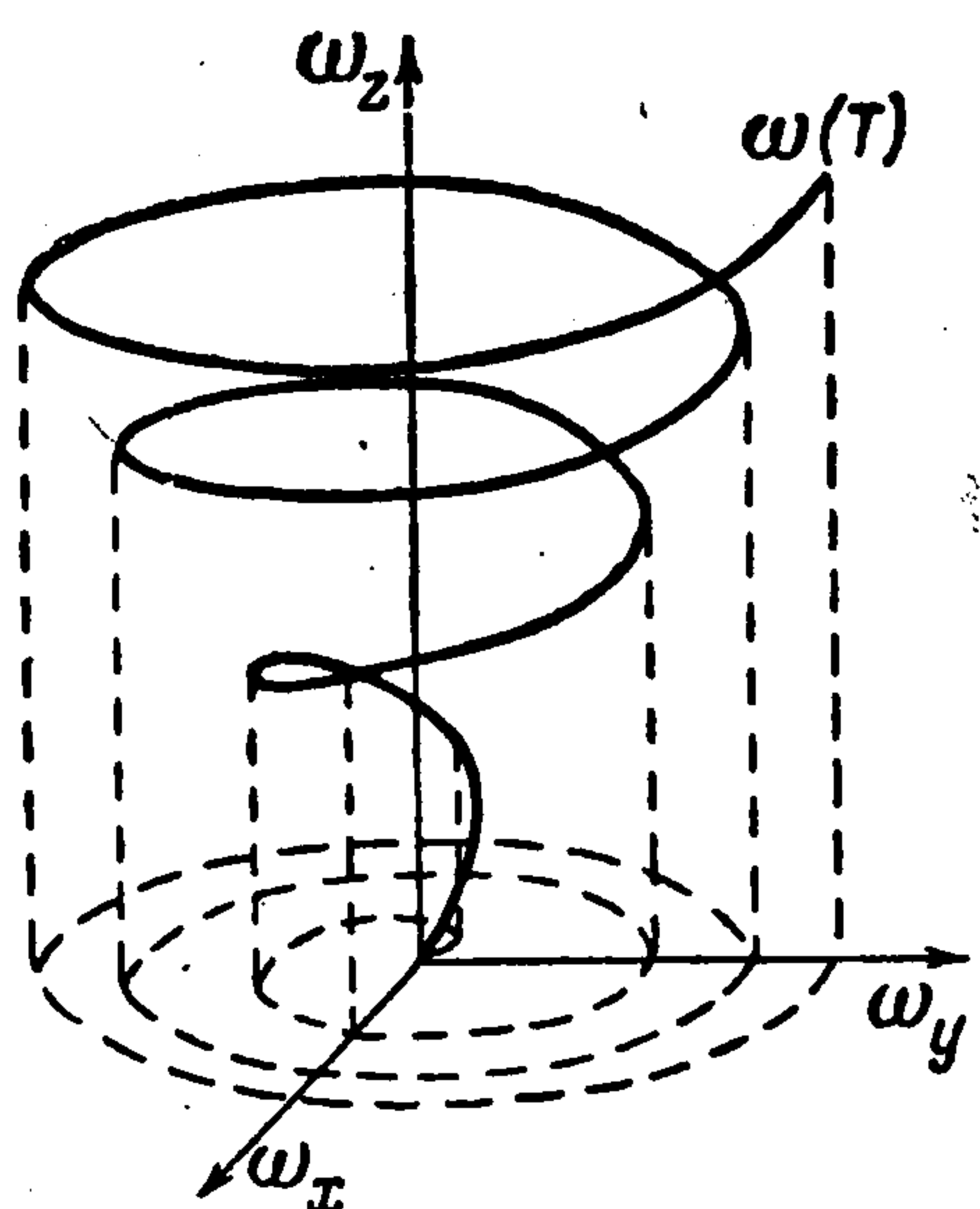
Умножив обе части (3.8) на сопряженные им величины, найдем

$$\left( \omega_x + \frac{m_y}{\omega_z (C - A)} \right)^2 + \left( \omega_y - \frac{m_x}{\omega_z (C - A)} \right)^2 = \operatorname{const} \quad (3.9)$$

|| Как видно при достаточно больших значениях  $\omega_z$ , проекция фазовой траектории на плоскость  $\omega_x \omega_y$  будет состоять из последовательности дуг, близких к дугам окружностей.

|| Таким образом, построенные решения для координат  $\omega_k$  и импульсов  $p_k$  позволяют, в принципе произвести расчет неособого оптимального режима торможения симметричного тела. Однако в эти интегралы входят две неизвестные постоянные  $P$  и  $\alpha$ , определяемые из граничных условий задачи. Поэтому для конкретного расчета процесса торможения удобнее рассматривать его в обратном направлении, полагая, например, что в начальный

момент  $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$ . Тогда, задавшись значениями  $P$  и  $\alpha$ , можно рассчитать весь ход фазовой траектории вплоть до некоторой точки  $\omega_x(T)$ ,  $\omega_y(T)$ ,  $\omega_z(T)$ . Меняя затем исходные значения  $P$  и  $\alpha$ , можно «попасть» в точку фазового пространства, отстоящую сколь угодно близко от заданной точки. Заметим, что из формулы для начального значения моду-



Фиг. 1

ля  $p_{z0}$

$$|p_{z0}| = \frac{C}{|m_z|} \left[ 1 - \frac{P}{A} (|m_x \cos \alpha_0| + |m_y \sin \alpha_0|) \right] \quad (3.10)$$

вытекает условие

$$0 \leq P < \frac{A}{|m_x \cos \alpha_0| + |m_y \sin \alpha_0|} \quad (3.11)$$

В зависимости от выбора знака величины  $p_{z0}$  получим две фазовые траектории, симметричные относительно плоскости  $\omega_z = 0$ . Для определенности можно положить  $p_{z0} > 0$ , а следовательно, и  $m_{z0} > 0$ ,  $\lambda_0 > 0$ . Знаки управляющих моментов  $m_{x0}$  и  $m_{y0}$  в зависимости от величины угла  $\alpha_0$  определяются с помощью выражений (3.2).

На фиг. 1 представлена одна из фазовых траекторий рассматриваемой задачи, построенная описанным способом, т. е. фактически для процесса разгона тела от нулевой начальной скорости до некоторого ее конечного значения. В силу обратимости решения вариационной задачи эта траектория будет оптимальной и для процесса торможения тела из этой точки  $\omega_x(T)$ ,  $\omega_y(T)$ ,  $\omega_z(T)$  фазового пространства до точки  $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$ .

4. Торможение с минимальным расходом массы. Полагая, что управляющие моменты  $m_k$  создаются сопловыми двигателями с постоянной скоростью истечения, причем двигатели, создающие моменты  $m_x$  и  $m_y$ , идентичны, примем в качестве функционала задачи следующий интеграл

$$M = \int_0^T (\mu |m_x| + \mu |m_y| + \nu |m_z|) dt \quad (4.1)$$

где  $M$  — величина, пропорциональная массе, израсходованной на торможение, а  $\mu$  и  $\nu$  — положительные коэффициенты. Таким образом, в этой задаче к системе уравнений движения (1.1) нужно добавить дополнительное уравнение для функции  $M$

$$M' = \mu |m_x| + \mu |m_y| + \nu |m_z| \quad (4.2)$$

и искать такой режим переключения управляющих моментов  $m_k$ , при котором  $M(T)$  будет минимальна. Однако уравнение (4.2) неудобно тем, что в него входят модули знакопеременных функций. Чтобы избавиться от этого неудобства, будем полагать, что величины  $m_k$  могут быть только положительными или равными нулю

$$0 \leq m_k \leq |m_k|_{\max} \quad (4.3)$$

а знак их в уравнениях (1.1) зададим путем введения добавочных управ-

лений  $u_k$ , все множество допустимых значений которых ограничивается лишь двумя точками  $u_k = \pm 1$ . Тогда вместо систем (1.1) и (4.2) будем иметь

$$\begin{aligned} \omega_x \dot{+} \varepsilon \omega_y \omega_z &= \frac{m_x u_x}{A}, & \omega_y \dot{-} \varepsilon \omega_x \omega_z &= \frac{m_y u_y}{A} \\ \omega_z \dot{=} \frac{m_z u_z}{C}, & M &= \mu m_x + \mu m_y + \nu m_z \end{aligned} \quad (4.4)$$

Легко видеть, что дифференциальные уравнения, а следовательно, и интегралы для функций  $p_x$  и  $p_y$  останутся прежними. Интеграл же, определяющий  $p_z$ , изменится, так как изменится вид функции  $H$ , куда, очевидно, должна будет войти новая величина  $p_M$ , являющаяся сопряженной к переменной  $M$ . Из формулировки задачи следует, что величина  $p_M$  будет единой постоянной, равной  $-1$  на протяжении всего процесса торможения. С учетом этого функцию  $H$  можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} H &= m_x \left( \frac{p_x u_x}{A} - \mu \right) + m_y \left( \frac{p_y u_y}{A} - \mu \right) + \\ &+ m_z \left( \frac{p_z u_z}{C} - \nu \right) - \varepsilon \omega_z (p_x \omega_y - p_y \omega_x) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Из условия максимума этой функции по управлениям  $m_k$  и  $u_k$  вытекает, что

$$u_k = \operatorname{sgn} p_k, \quad m_k = |m_k|_{\max} \operatorname{Sg} (p_k u_k - I_k) \quad (4.6)$$

Здесь

$$I_x = I_y = \mu A, \quad I_z = \nu C, \quad \operatorname{Sg} w = 1 \text{ при } w > 0, \quad \operatorname{Sg} w = 0 \text{ при } w < 0$$

Что касается функции  $p_z$ , то она, как и ранее, определяется непосредственно из интеграла (4.5), который с учетом (4.6) можно записать следующим образом:

$$m_x \left( \frac{|p_x|}{A} - \mu \right) + m_y \left( \frac{|p_y|}{A} - \mu \right) + m_z \left( \frac{|p_z|}{C} - \nu \right) = \omega_z p_z \quad (4.7)$$

Так как левая часть этого уравнения в оптимальном режиме не может быть отрицательной, то

$$\operatorname{sgn} p_z = \operatorname{sgn} \omega_z \quad (4.8)$$

Из соотношения (4.7) следует, что в конце процесса торможения, когда  $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$ , левая часть его также должна быть равной нулю, т. е. должны выполняться условия

$$|p_k(T)| \leq I_k \quad (4.9)$$

В тех случаях, когда на протяжении некоторого участка выполняется условие

$$|p_k| = I_k \quad (4.10)$$

могут возникать особые режимы управления, когда величина управляющих моментов может принимать не только свои граничные значения.

Очевидно, что особый режим по поперечным моментам  $m_x$  и  $m_y$  может возникать только одновременно для них обоих и причем лишь тогда, когда продольная скорость  $\omega_z$  полностью ликвидирована, так как в противном случае, согласно (2.4), функции  $p_x$  и  $p_y$  не могут стать постоянными величинами, удовлетворяющими условию (4.10). По продольному моменту  $m_z$  возникновение особого режима характеризуется условиями  $\omega_z \neq 0$ ,  $|p_z| = vC$ . Из этого следует, что  $p_z' = 0$ , т. е. либо  $\omega_x = \omega_y = 0$ , либо  $p_x\omega_y = p_y\omega_x$ .

Первый случай отвечает режиму чистого вращения тела вокруг продольной оси, и здесь, естественно, закон изменения момента  $m_z$  не влияет на общий расход рабочего вещества.

Второй случай, как нетрудно показать, может иметь место только на пассивных зонах по поперечному моменту, т. е. на участках, где  $m = 0$ . Заметим, что в общем случае на пассивных зонах, где  $m = 0$ , производная  $p_z'$  принимает постоянное значение (что легко обнаружить при помощи выражений (2.5) и (2.11)), и, следовательно, функция  $p_z$  изменяется на этих промежутках времени линейно.

Из формы интеграла (4.7) следует, что и на протяжении всего процесса торможения функция  $p_z$  изменяется монотонно, непрерывно возрастая или непрерывно уменьшаясь в зависимости от знака начальной скорости  $\omega_{z0}$ . Если предположить, что в начальный момент  $\omega_{z0} > 0$ , то, согласно (4.8), будет  $p_{z0} > 0$ , и функция  $p_z$  будет возрастать. В этом случае необходимо, чтобы было выполнено условие  $p_{z0} < -vC$ , так как в противном случае ввиду наличия уравнений (4.4) и (4.6) угловая скорость  $\omega$  начнет непрерывно увеличиваться и торможение осуществляться не будет.

Аналогично, если  $\omega_{z0} < 0$ , то начальное значение  $p_{z0}$  должно быть больше  $vC$ . Так как сказанное остается справедливым для любого момента времени, можем заключить, что знак функции  $p_z$  всегда должен быть противоположен знаку  $\omega_z$ , т. е.

$$u_z = -\operatorname{sgn} \omega_z \quad (4.11)$$

Таким образом, торможение продольной угловой скорости происходит путем включения момента  $m_z$  в направлении, противоположном направлению  $\omega_z$ . Если величина этого момента остается все время неизменной, то продолжительность его действия  $\tau$  определится формулой

$$\tau = \frac{|\omega_{z0}| C}{|m_z|} \quad (4.12)$$

причем

$$|p_z(\tau)| = vC \quad (4.13)$$

Закон изменения  $\omega_z$  будет тогда линейным, так что, полагая для определенности  $\omega_{z0} > 0$ , будем иметь

$$\omega_z = \omega_{z0} - m_z C^{-1} t \quad (4.14)$$

Ввиду этого до тех пор, пока  $t < \tau$ , т. е. пока скорость  $\omega_z$  не обратится в нуль, можно, как и ранее, в качестве независимой переменной исполь-

зовать  $\omega_z$  вместо времени  $t$ . Тем самым на промежутке  $0 \leq t \leq \tau$  остаются справедливыми интегралы (2.8) и (2.14), куда следует лишь ввести управления  $u_k$  перед соответствующими моментами  $m_k$ . При этом, разумеется, нужно иметь в виду, что в отличие от задачи о быстродействии здесь в управлениях  $m_x$  и  $m_y$  появляются пассивные зоны, т. е. участки, на которых  $m_k = 0$  ( $k = x, y$ ).

Положение этих зон определяется условием

$$|p_x| \leq \mu A, \quad |p_y| \leq \mu A \quad (4.15)$$

Из требования, что эти условия в конечный момент времени должны выполняться одновременно, для амплитуды  $P$  имеем неравенство

$$\mu A \leq P \leq \mu A \sqrt{2} \quad (4.16)$$

5. Торможение поперечной скорости. Частным случаем рассмотренной задачи является задача о ликвидации прецессионного движения тела, т. е. о снятии поперечных компонент угловой скорости симметричного тела  $\omega_x$  и  $\omega_y$  при  $m_z \equiv 0$ . В этих условиях форма решения будет иной, так как  $\omega_z = \omega_{z0} = \text{const}$  и, следовательно, вместо системы (1.1) будем иметь систему линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Обозначая

$$\varepsilon \omega_{z0} = \rho \quad (5.1)$$

для комплексной угловой скорости  $\omega$  и функции  $p = p_x + ip_y$  будем иметь следующие интегралы

$$\left( \omega - \frac{im}{\rho A} \right) e^{-i\rho t} = \text{const}, \quad p e^{-i\rho t} = \text{const} \quad (5.2)$$

Отсюда следует, что фазовая траектория на плоскости  $\omega_x \omega_y$  будет представлять собой кривую, составленную из дуг окружностей. В отличие от задачи на быстродействие здесь в состав этих дуг войдут и дуги с центром в начале координат, соответствующие тем зонам, где  $m_x = m_y = 0$ .

Для построения фазовой траектории системы построим предварительно диаграмму в виде окружности радиуса  $P$  и квадрата со стороной  $2\mu A$ , как показано на фиг. 2. Тогда конец вектора  $p = P e^{i(\rho t + \alpha)}$  при движении по этой окружности будет попадать в зоны, соответствующие различным значениям управлений  $m_x$  и  $m_y$ , причем, как можно видеть, заштрихованным сегментам отвечают участки включения моментов  $m_x$  и  $m_y$ , незаштрихованным — пассивные зоны, т. е. участки  $m_x = m_y = 0$ . Легко видеть, что ширина пассивной зоны  $\gamma$ , так же как и ширина каждой из активных зон  $\delta$ , зависят от величины отношения  $\mu A / P$  и подчинены следующим соотношениям:

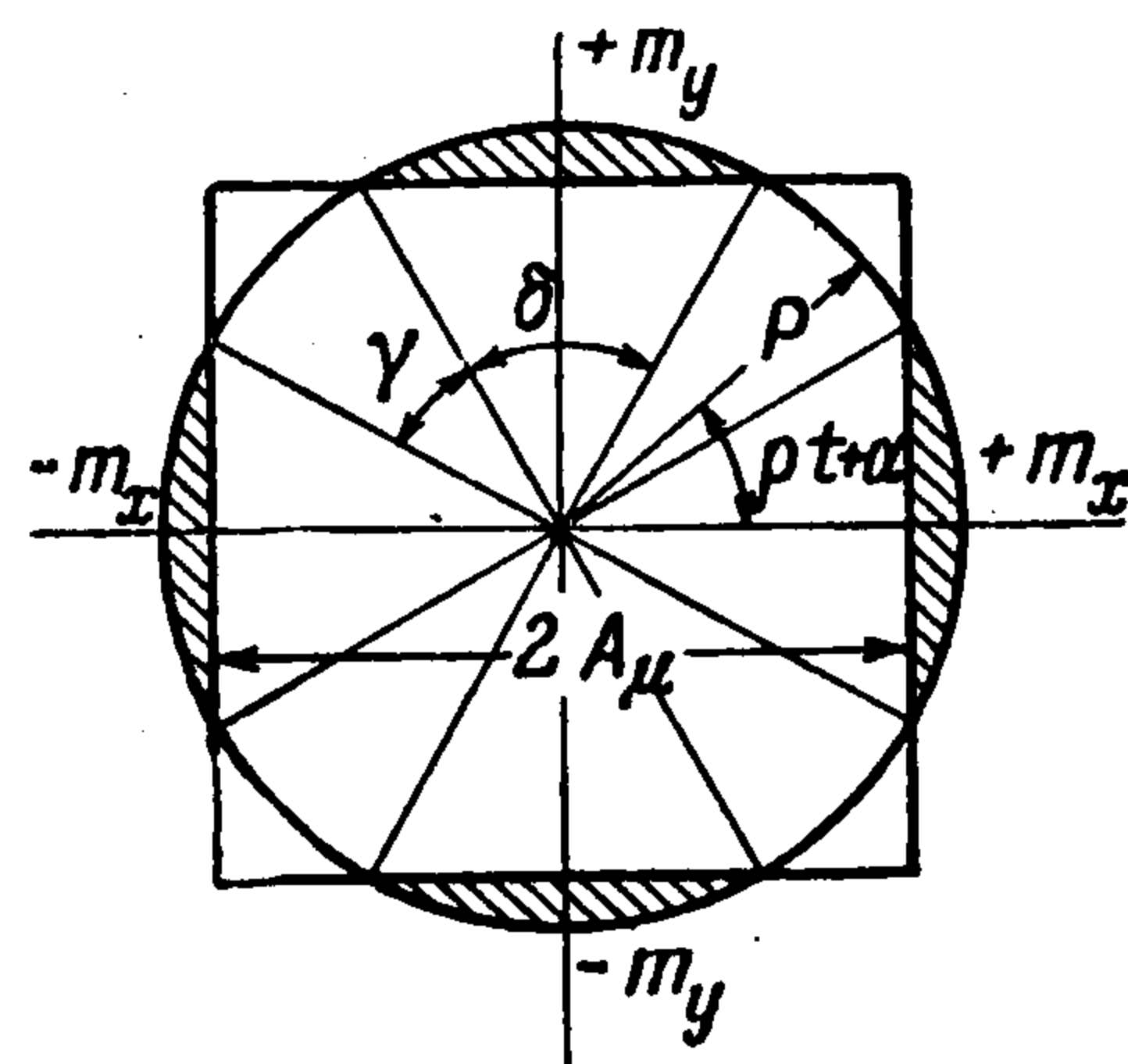
$$\cos \frac{1}{2}\delta = \mu A / P, \quad \gamma + \delta = \frac{1}{2}\pi \quad (5.3)$$

При помощи этой диаграммы можно построить семейство фазовых траекторий, исходящих из начала координат. Очевидно, что первый участок должен быть активным, например  $m_x \neq 0$ , причем для определенности положим, что  $\cos \alpha_0 > \mu A / P$ , так что  $u_x = 1$ .

Тогда, согласно (5.2), уравнение начального участка фазовой кривой будет

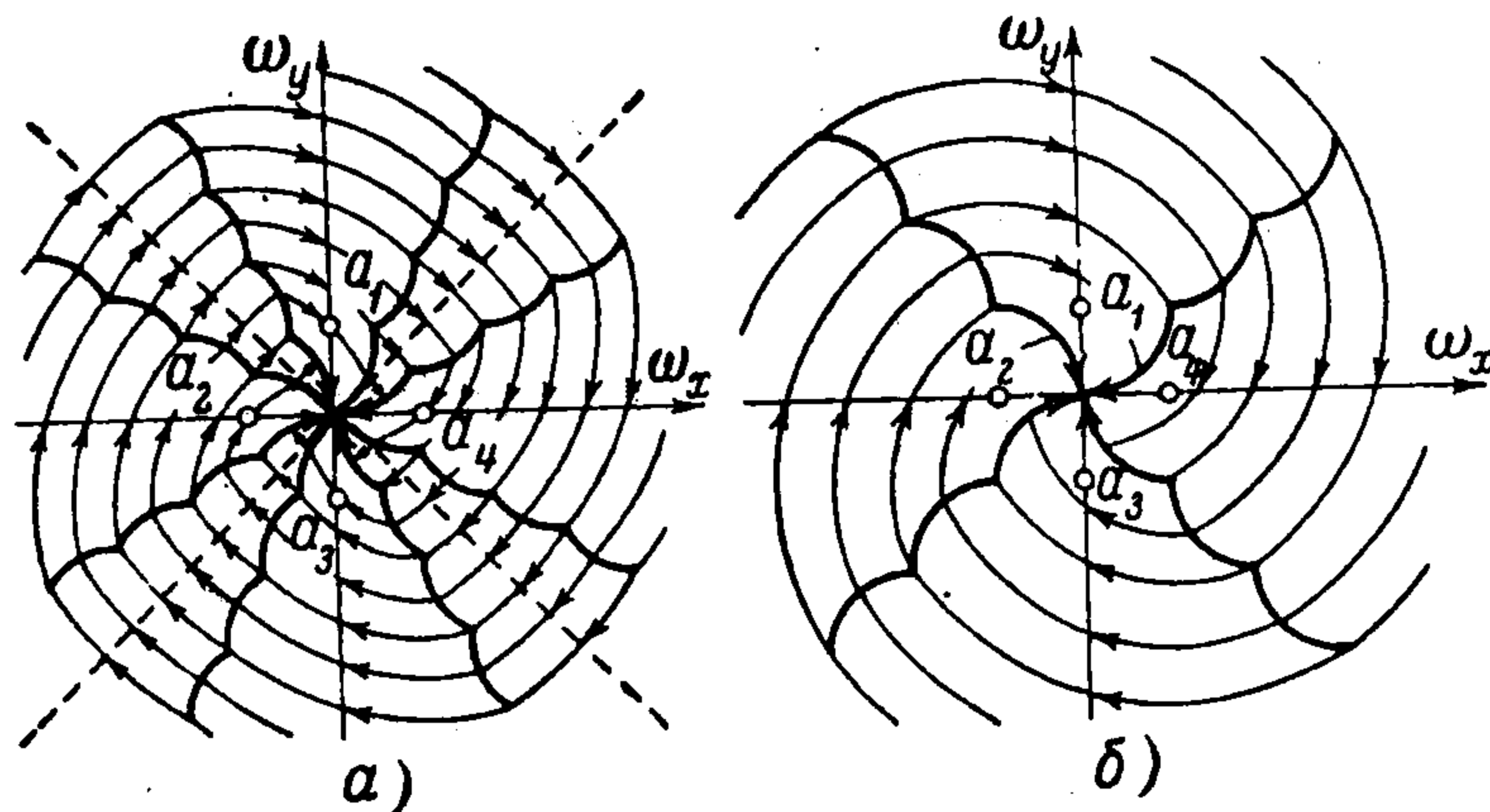
$$\omega_x^2 + \left( \omega_y - \frac{m_x}{\rho A} \right)^2 = \left( \frac{m_x}{\rho A} \right)^2 \quad (5.4)$$

Как только комплексный вектор  $p$  на фиг. 2 повернется до угла  $\frac{1}{2}\delta$ , т. е. комплексный



Фиг. 2

вектор  $\omega - i(m_x/\rho A)$  на фазовой плоскости повернется относительно точки  $a_1$  на угол  $1/2 \delta - \alpha$ , момент  $m_x$  выключится, и далее фазовая кривая представится дугой окружности, описанной из начала координат на центральный угол  $\gamma$ . Затем включится момент  $m_y$ , и фазовая траектория пойдет по дуге окружности, описанной из центра в точке  $a_2$  ( $\omega_y = 0, \omega_x = -m_y/\rho A$ ), причем длина дуги составит, очевидно, угол  $\delta$ . После этого произойдет выключение момента  $m_y$ , и траектория представится отрезком дуги  $\gamma$ , описанным из начала координат.



Фиг. 3

Продолжая этот процесс, можно показать, что семейство фазовых траекторий в осях  $\omega_x \omega_y$  будет иметь вид, изображенный на фиг. 3а. Как видим, вся фазовая плоскость оказывается разделенной на восемь секторов линиями переключения, составленными из дуг окружностей, длина каждой из которых в угловой мере равна  $\delta$ . Четыре из этих секторов отвечают активным зонам торможения, а четыре других — пассивным зонам, где происходит движение по инерции. Заметим, что ширина пассивной зоны  $\gamma$  в настоящей задаче, где не предусматривается управление продольной скоростью, может быть произвольной в пределах  $0 \leq \gamma \leq 1/2 \pi$ . Влияние ширины этой зоны сказывается лишь на длительности процесса торможения и не сказывается на расходе массы. В предельном случае, когда  $\gamma \rightarrow 0$ , пассивные зоны исчезают, и картина фазовой плоскости принимает вид, показанный на фиг. 3б. Следует заметить, что здесь картина фазовых траекторий фактически не отличается от фазовых траекторий в аналогичной задаче о быстродействии, за исключением поворота всей фазовой плоскости на угол  $1/4 \pi$ .

Таким образом, сравнивая между собой режимы, оптимальные по быстродействию и по расходу массы рабочего вещества, можно прийти к выводу, что качественное различие их состоит в том, что в последних поперечные управляющие моменты  $m_x$  и  $m_y$  действуют не одновременно, а включаются попеременно; кроме того, продольный момент  $m_z$  не реверсирует в процессе торможения, имея всегда знак, противоположный знаку продольной компоненты угловой скорости  $\omega_z$ .

В заключение необходимо отметить, что практическая реализация рассмотренных оптимальных режимов крайне затруднена ввиду сложного характера поверхностей переключения, расположенных в фазовом пространстве системы. Однако построенные решения дают возможность найти предельно возможное быстродействие или экономичность работы системы управления и оценить с этой точки зрения качество произвольно выбранного неоптимального режима управления.

Поступила 14 X 1963

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. Физматгиз, 1961.
2. Лурье А. И. Аналитическая механика. Физматгиз, 1961.
3. Lee E. B. ARS journal, 1962, v. 32, No 6, p. 981—982.