Прикладная математика и механика. Том 28, 1964

# ОБ АППРОКСИМАЦИИ ОДНОЙ ЗАДАЧИ АНАЛИТИЧЕСКОГО КОНСТРУИРОВАНИЯ РЕГУЛЯТОРОВ В СИСТЕМЕ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Н. Н. Красовский

(Свердловск)

Рассматривается задача об оптимальном управлении, минимизирующем квадратичную ошибку в системе с последействием. Исследуется аппроксимация этой задачи аналогичной проблемой для системы, описываемой обыкновенными дифференциальными уравнениями. Доказывается сходимость приближенного решения.

1. Рассмотрим управляемую систему, описываемую уравнением

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bx(t-\gamma) + bu \tag{1.1}$$

где $x$ — $n$-мерный вектор фазовых координат, $u$ — скалярное управляющее воздействие, $\gamma > 0$ — постоянное запаздывание, $A, B, b$ — постоянные матрицы. Движение системы (1.1) будем рассматривать на отрезке времени $0 \leqslant t \leqslant T$. Функционалы $\eta\,[t, x(\vartheta)]$, определенные при $0 \leqslant t \leqslant T$ на вектор-функциях $x(\vartheta)$ $(-\gamma \leqslant \vartheta \leqslant 0)$ и такие, что уравнение (1.1) при $u = \eta\,[t, x(t+\vartheta)]$ имеет решение $x(t, t_0, z(\vartheta), \eta)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant T)$ для любых начальных условий $t_0$, $x(t_0 + \vartheta) = z(\vartheta)$, где $z(\vartheta)$ — кусочно-непрерывные функции $(-\gamma \leqslant \vartheta \leqslant 0)$, будем называть допустимыми управлениями. Качество процесса (1.1) оценим функционалом

$$J\,[t_0, z(\vartheta), u] = \int_{t_0}^{T} \{\omega\,[t, x(t, t_0, z(\vartheta), u)] + u^2(t)\}\,dt + \rho\,[x(T, t_0, z(\vartheta), u)]$$

где $\omega\,[t, x]$ и $\rho\,[x]$ — знакоположительные формы

$$\omega[t, x] = \sum_{i,j=1}^{n} \omega_{ij}(t)\,x_i x_j, \qquad \rho\,[x] = \sum_{i,j=1}^{n} \rho_{ij} x_i x_j$$

Задача об аналитическом конструировании регулятора [1] для системы (1.1) может быть сформулирована следующим образом [2,3].

*Задача* 1.1. Среди допустимых управлений $\eta$ найти такое $\eta^\circ\,[t, x(\vartheta)]$, для которого

$$J\,[t_0, z(\vartheta), \eta^\circ] \leqslant J\,[t_0, z(\vartheta), \eta]$$

каковы бы ни были начальные условия $t_0$, $z(\vartheta)$.

Эта задача имеет решение в форме линейного функционала [2,3]

$$\eta^\circ\,[t, x(\vartheta)] = \sum_{i=1}^{n} \left[\alpha_i(t)\,x_i(0) + \int_{-\gamma}^{0} \beta_i(t, \vartheta)\,x_i(\vartheta)\,d\vartheta\right] \tag{1.2}$$

Однако вычисление функций $\alpha_i$, $\beta_i$ затруднительно. Поэтому целесообразно аппроксимировать задачу 1.1 аналогичной проблемой для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Такая аппроксимация рассмотрена в работе [4], но без исследования сходимости приближений. Методы решения задачи 1.1 на основе аппроксимации (1.1) обыкновенными уравнениями разработаны и испытаны Ю. М. Репиным и В. Е. Третьяковым.

В настоящей статье описывается возможный подход к обоснованию подобной аппроксимации.

Рассмотрим систему уравнений [1]

$$\frac{dy^{(i)}}{dt} + my^{(i)} = my^{(i-1)} \qquad \frac{dy^\circ}{dt} = Ay^\circ + By^{(m)} + bu \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{1.3}$$

где $m$ — натуральное число, $y^\circ$, $y^{(i)}$ — $n$-мерные векторы, $A$, $B$, $b$ — матрицы из (1.1). Вектор $y^\circ$, $y^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, m)$ обозначим символом $\{y\}_m$. Функции $\xi_m\,[t, \{y\}_m]$, определенные при $0 \leqslant t \leqslant T$ и такие, что система (1.3) при $u = \xi_m\,[t, \{y\,(t)\}_m]$ имеет решение $\{y\,(t, t_0, \{z\}_m, \xi_m)\}_m$ для любых начальных условий $t_0, \{y\,(t_0)\}_m = \{z\}_m$, назовем допустимыми управлениями (для (1.3)). Обозначим

$$J_m\,[t_0, \{z\}_m, u] =$$
$$= \int_{t_0}^{T} \{\omega\,[t, y^\circ\,(t, t_0, \{z\}_m, u)] + u^2\,(t)\}\,dt + \rho\,[y^\circ\,(T, t_0, \{z\}_m, u)]$$

*Задача* 1.2. Среди допустимых управлений $\xi_m$ найти такое $\xi_m{}^\circ\,[t, \{y_m\}]$, для которого

$$J_m\,[t_0, \{z\}_m, \xi_m{}^\circ] \leqslant J_m\,[t_0, \{z\}_m, \xi_m]$$

каковы бы ни были начальные условия $t_0$, $\{z\}_m$.

Задача 1.2 имеет решение в виде линейной функции [1,5]

$$\xi_m{}^\circ\,[t, \{y\}_m] = \sum_{i=1}^{n} \left[\alpha_i{}^{(m)}\,(t)\,y_i{}^\circ + \sum_{j=1}^{m} \beta_i{}^{(m)}\,(t, j)\,y_i{}^{(j)}\right] \tag{1.4}$$

коэффициенты которой $\alpha_i{}^{(m)}$, $\beta_i{}^{(m)}$ можно вычислять интегрированием обыкновенных дифференциальных уравнений [6].

Цель настоящей статьи — исследовать связь между решениями задач 1.1 и 1.2 при больших $m$.

---

[1] Система (1·3) получается из (1.1) при замене звена $q\,(t + \gamma) = x\,(t)$, осуществляющего в системе (1.1)

$$\frac{dx}{dt} = Ax\,(t) + Bq\,(t) + bu$$

сдвиг сигнала по времени на величину $\gamma = 1$, последовательной цепочкой из $m$ апериодических звеньев $dy^{(i)}/dt + my^{(i)} = my^{(i-1)}$, каждое из которых осуществляет приближенно сдвиг сигнала по времени на величину $\Delta t = 1\,/\,m$ в соответствии с формулой Тейлора

$$y^{(i-1)}(t) \approx y^{(i)}(t + \Delta t) = y^{(i)}(t) + (dy^{(i)}\,/\,dt)\,\Delta t + \ldots$$

2. Исследуем связь между решениями уравнений (1.1) и (1.3) при $u(t) \equiv 0$. Будем предполагать, что $\gamma = 1$. Символ $\| z \|$ будет обозначать евклидову норму $z$, т. е. $\| z \| = (z_1^2 + \ldots + z_n^2)^{1/2}$. Начальные функции $z(\vartheta)$ удобно считать элементами пространства $L_2\,[-1, 0]$ с нормой

$$\| z(\vartheta) \|^{(2)}_{[-1,0]} = \left[ \| z(0) \|^2 + \int_{-1}^{0} \| z(\vartheta) \|^2 \, d\vartheta \right]^{1/2}$$

Движению $x(t)$ (1.1), порожденному начальными условиями $x(t_0+\vartheta) = z(\vartheta)$, сопоставим движение $\{y(t)\}_m$ (1.3) с начальными условиями

$$y^\circ(t_0) = z^\circ = z(0), \qquad y^{(i)}(t_0) = z^{(i)} = m \int_{i/m}^{-(i-1)/m} z(\vartheta)\, d\vartheta \tag{2.1}$$

Решение $x(t)$ уравнения (1.1) удовлетворяет интегральному уравнению

$$x(t) = z(0) + \int_{t_0}^{t} \{Ax(\tau) + \varphi[t, \tau]\, Bx(\tau)\}\, d\tau +$$
$$+ \int_{-1}^{0} \varphi^*[t_0, t, \vartheta]\, Bz(\vartheta)\, d\vartheta \tag{2.2}$$

где функции $\varphi$ и $\varphi^*$ определены равенствами

$$\begin{gathered}\varphi[t, \tau] = 1 \quad \text{при } \tau < t-1, \qquad \varphi[t, \tau] = 0 \quad \text{при } t-1 \leqslant \tau \leqslant t \\ \varphi^*[t_0, t, \vartheta] = 1 \quad \text{при } -1 \leqslant \vartheta < \min(0, t-t_0-1) \\ \varphi^*[t_0, t, \vartheta] = 0 \quad \text{при } t-t_0-1 \leqslant \vartheta \leqslant 0\end{gathered} \tag{2.3}$$

Решение $y^\circ(t)$ (1.3) удовлетворяет уравнению

$$y^\circ(t) = y^\circ(0) + \int_{t_0}^{t} \{Ay^\circ(\tau) + By^{(m)}(\tau)\}\, d\tau \tag{2.4}$$

Интегрируя последовательно уравнения (1.3), получим

$$y^{(m)}(t) = \frac{m^m}{(m-1)!} \int_{t_0}^{t} y^\circ(\tau)\,(t-\tau)^{m-1} e^{-m(t-\tau)}\, d\tau +$$
$$+ \sum_{i=1}^{m} y^{(i)}(0) \frac{[m(t-t_0)]^{m-i}}{(m-i)!} e^{-m(t-t_0)} \tag{2.5}$$

Из (2.1), (2.4), (2.5) следует уравнение для $y^\circ(t)$

$$y^\circ(t) = z(0) + \int_{t_0}^{t} \{Ay^\circ(\tau) + \varphi_m[t, \tau]\, By^\circ(\tau)\}\, d\tau +$$
$$+ \int_{-1}^{0} \varphi_m^*[t_0, t, \vartheta]\, Bz(\vartheta)\, d\vartheta \tag{2.6}$$

где функции $\varphi_m$ и $\varphi_m^*$ определяются равенствами

$$\begin{gathered}\varphi_m[t, \tau] = \int_{\tau}^{t} \frac{m^{m+1}}{m!} (\zeta - \tau)^{m-1} e^{-m(\zeta-\tau)}\, d\zeta \\ \varphi_m^*[t_0, t, \vartheta] = m \int_{0}^{t-t_0} \frac{(m\zeta)^{m-i}}{(m-i)!} e^{-m\zeta}\, d\zeta\end{gathered} \tag{2.7}$$

Исследуем функцию $\varphi_m$. Зададим малое число $\varepsilon > 0$. Заменяя $m!$ по формуле Стирлинга [7], получим из (2.7)

$$\varphi_m = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{t-\tau} [\zeta e^{1-\zeta}]^{m-1} e^{1-\zeta+\theta}\, d\zeta \qquad \left(|\theta| \leqslant \frac{1}{12m}\right)$$

Пусть сначала $\tau \geqslant t - 1 + \varepsilon$. Тогда $\zeta e^{1-\zeta} \leqslant \lambda < 1$ и, следовательно,

$$\lim \varphi_m\, [t, \tau] = 0 \quad \text{при } m \to \infty \tag{2.8}$$

равномерно по $\tau \geqslant t - 1 + \varepsilon$, $t \leqslant T$.

Пусть теперь $\tau \leqslant t - 1 - \varepsilon$. Тогда

$$\varphi_m = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_0^{1-\delta} + \int_{1-\delta}^{1+\delta} + \int_{1+\delta}^{t-\tau} \right\}. \qquad (0 < \delta < \varepsilon) \tag{2.9}$$

Подобно предыдущему проверяется, что в (2.9) первое и третье слагаемые сходятся к нулю при $m \to \infty$, равномерно по $\tau$, $t \leqslant \tau$. Рассмотрим величину

$$\nu = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2\pi}} \int_{1-\delta}^{1+\delta} = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\delta}^{\delta} [(1+\zeta)\, e^{-\zeta}]^{m-1} e^{\theta-\zeta}\, d\zeta = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\delta}^{\delta} \exp\left(-\frac{\xi^2 (m-1)}{2 + 0(\delta)}\right) d\zeta \tag{2.10}$$

Из (2.10) по известным свойствам функции $\exp(-{}^1/_2\zeta^2)$ следует, что $\nu \to 1 + \varkappa(\delta)$ при $m \to \infty$, причем $\varkappa(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$. Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ существует $N(\varepsilon)$ такое, что

$$|\varphi_m\, [t, \tau] - 1| < \varepsilon \quad \text{при } m \geqslant N(\varepsilon),\ \tau \leqslant t - 1 - \varepsilon$$

равномерно по $t \leqslant T$. Кроме того, при всех $t$, $\tau$ функция $\varphi_m$ равномерно ограничена. Аналогичным образом исследуется функция $\varphi_m{}^*$, в результате чего следует вывод.

*Лемма* 2.1. Функции $\varphi_m$ и $\varphi_m{}^*$ равномерно ограничены и для любого $\varepsilon > 0$ можно указать число $N(\varepsilon)$ такое, что

$$\operatorname{mes}(|\varphi_m\, [t, \tau] - \varphi\, [t, \tau]| > \varepsilon) < \varepsilon \qquad (t_0 \leqslant \tau \leqslant t) \tag{2.11}$$

$$\operatorname{mes}(|\varphi_m{}^*\, [t, t, \vartheta] - \varphi^*\, [t_0, t, \vartheta]| > \varepsilon) < \varepsilon \qquad (-1 \leqslant \vartheta \leqslant 0) \tag{2.12}$$

при всех $0 \leqslant t_0 \leqslant t \leqslant T$, если только $m \geqslant N(\varepsilon)$.

Следовательно, функции $\varphi_m$ и $\varphi_m{}^*$ сходятся при $m \to \infty$ к функциям $\varphi$ и $\varphi^*$ по мере [8] на отрезках $[t_0 \leqslant \tau \leqslant t]$ и $[-1 \leqslant \vartheta \leqslant 0]$ равномерно по $t$. Более того, вследствие их равномерной ограниченности, функции $\varphi_m$ и $\varphi_m{}^*$ сходятся равномерно к функциям $\varphi$ и $\varphi^*$ на тех же отрезках в среднем [8].

Из уравнений (2.2) и (2.6) по свойствам функций $\varphi$, $\varphi^*$, $\varphi_m$ и $\varphi_m{}^*$ следует, что движения $x(t)$, $y^\circ(t)$, соответствующие начальным условиям

$$\| z(\vartheta) \|^{(2)}_{[-1,\, 0]} \leqslant 1 \tag{2.13}$$

равномерно ограничены. Разность $f(t) = y^\circ(t) - x(t)$, согласно (2.2) и (2.6), удовлетворяет уравнению

$$f(t) = \int_{t_0}^{t} \{A + \varphi_m[t, \tau] B\} f(\tau)\, d\tau + \int_{t_0}^{t} \{\varphi_m[t, \tau] - \varphi[t, \tau]\} Bx(\tau)\, d\tau +$$

$$+ \int_{-1}^{0} \varphi_m{}^*[t_0, t, \vartheta] - \varphi^*[t_0, t, \vartheta]\} Bz(\vartheta)\, d\vartheta \qquad (2.14)$$

Будем рассматривать $f(t)$ как элемент пространства $L_2[t_0, T)$ с нормой

$$\| f(t) \|^{(2)}{}_{[t_0, T)} = \left[\int_{t_0}^{T} \| f(t) \|^2 dt\right] \qquad (2.15)$$

Оператор

$$H[f] = f(t) - \int_{t_0}^{t} \{A + \varphi_m B\} f(\tau)\, d\tau \qquad (2.16)$$

имеет обратный оператор [9,10] $H^{-1}$, который ограничен равномерно по $t_0 \leqslant T$ и $m$. Из (2.14) следует

$$f(t) = H^{-1}\left[\int_{t_0}^{t} \{\varphi_m - \varphi\} Bx(\tau)\, d\tau + \int_{-1}^{0} \{\varphi_m{}^* - \varphi^*\} Bz(\vartheta)\, d\vartheta\right] \qquad (2.17)$$

и по свойствам функций $\varphi_m$, $\varphi$, $\varphi_m{}^*$, $\varphi^*$, (2.11), (2.12), $z(\vartheta)$ (2.13) и $x(t)$ заключаем, что

$$\lim \| f(t) \|^{(2)}{}_{[t_0, T)} = 0 \quad \text{при } m \to \infty \qquad (2.18)$$

равномерно по $t_0 \leqslant T$ и $z(\vartheta)$ (2.13). Из (2.14) и (2.18) следует

$$\lim \| f(t) \|^{c}{}_{[t_0, T]} = 0 \quad \text{при } m \to \infty \qquad (2.19)$$

равномерно по $t_0 \leqslant T$ и $z(\vartheta)$ (2.13). Здесь

$$\| f(t) \|^{c}{}_{[t_0, T]} = \max (\| f(t) \| \text{ при } t_0 \leqslant t \leqslant T) \qquad (2.20$$

Обозначим символами $h_{ij}[t, t_0]$ и $h_{ij}^{(m)}[t, t_0]$ решения $x_i(t)$ и $y_i{}^\circ(t)$ систем (1.1) и (1.3), порожденные при $u = 0$ начальными условиями $z(\vartheta, j)$, где

$$z_j(0, j) = 1, \quad z_k(0, j) = 0, \quad z(\vartheta, j) = 0 \quad (k \neq j, -1 \leqslant \vartheta < 0)$$

Символами $h_{(\delta)}[t, t_0]$ и $h_{(\delta)}^{(m)}[t, t_0]$ обозначим импульсные переходные функции систем (1.1) и (1.3), т. е. движения этих систем, порожденные при $t = t_0$ нулевыми начальными условиями и управлением $u(t) = \delta(t - t_0)$, где $\delta$ — дельта-функция. Имеем

$$h_{(\delta)i} = \sum_{j=1}^{n} h_{ij} b_j(t_0), \qquad h_{(\delta)i}^{(m)} = \sum_{j=1}^{n} h_{ij}{}^{(m)} b_j(t_0)$$

Из (2.20) следует вывод.

*Лемма* 2.2 Для любого $\varepsilon > 0$ можно указать число $N_\varepsilon$ такое, что

$$\| y^\circ(t) - x(t) \|^{c}{}_{[t_0, T]} < \varepsilon \qquad (2.21)$$

$$\| h_j[t, t_0] - h_j{}^{(m)}[t, t_0] \|^{c}{}_{[t_0, T]} < \varepsilon \qquad (2.22)$$

при всех $t_0 \leqslant T$, $z(\vartheta)$ (2.13), если только $m \geqslant N_\varepsilon$.

*Примечание* 2.1. Интегралы

$$\int_{-1}^{0} \varphi^* Bz(\vartheta)\,d\vartheta, \qquad \int_{-1}^{0} \varphi_m^* Bz(\vartheta)\,d\vartheta$$

в уравнениях (2.2) и (2.6) можно трактовать как математические ожидания некоторых случайных величин $\varkappa[\vartheta, \tau]$ и $\varkappa_m[\vartheta, \tau]$, порожденных функцией $z(\vartheta)$ и вероятностным распределением Пуассона [11], причем $\varkappa = \varkappa_m = Bz(\vartheta)$ и плотность распределения вероятностей $p_m[\vartheta, \tau]$ определена равенствами

$$p_m[\vartheta, \tau] = \frac{m}{(m-i)!}(m\tau)^{m-i}e^{-m\tau} \text{ при } -\frac{i}{m} \leqslant \vartheta < -\frac{i-1}{m}; \quad \tau \leqslant t, \; p_m[\vartheta, \tau] = 0$$

(при других $\vartheta$, $\tau$, а распределение $p[\vartheta, \tau]$ будет предельным для $p_m$ при $m \to \infty$.

Аналогичным образом можно трактовать и интегралы

$$\int_{t_0}^{t} \varphi Bx\,d\tau, \qquad \int_{t_0}^{t} \varphi_m By^\circ d\tau$$

Поэтому естественно, что сходимость, рассмотренная в § 2, аналогична соответствующим предельным соотношениям в теории вероятностей [11].

3. Рассмотрим связь между оптимальными управлениями $\eta^\circ$ и $\xi_m^\circ$ задач 1.1 и 1.2. Оптимальное управление для задачи 1.1 при начальном условии $x(t_0 + \vartheta) = z(\vartheta)$, рассматриваемое как функция времени, будем обозначать символом $u^\circ(t, t_0, z(\vartheta))$.

Аналогичное управление для задачи 1.2 при начальном условии $\{y(t_0)\}_m$ (2.1) обозначим $u_m^\circ(t, t_0, \{z\}_m) = u_m^\circ(t, t_0, z(\vartheta))$. Кроме того, обозначим

$$v[t, z(\vartheta)] = J[t, z(\vartheta), u^\circ]$$

$$v_m[t, z(\vartheta)] = v_m[t, \{z\}_m] = J_m[t, z(\vartheta), u_m^\circ]$$

Функционалы $v$ и $v_m$ удовлетворяют уравнению Р. Беллмана [12], откуда следует [1-3]

$$\begin{aligned} u^\circ(t, t_0, z(\vartheta)) &= -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial v[t, x(t+\vartheta)]}{\partial x_i(t)} = -\frac{1}{2}b\psi \\ u_m^\circ(t, t_0, \{z\}_m) &= -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial v_m[t, \{y(t)\}_m]}{\partial y_i^\circ(t)} = -\frac{1}{2}b\psi_m \end{aligned} \tag{3.1}$$

Здесь векторы $\{\partial v / \partial x_i\}$ и $\{\partial v_m\}/\partial y_i^\circ\}$ имеют смысл вектора $\psi$ из принципа максимума Л. С. Понтрягина [13]. Согласно (3.1)

$$\begin{aligned} u^\circ(t, t_0, z(\vartheta)) = -\sum_{i=1}^{n} b_i \Bigg[\int_t^T \Bigg\{\sum_{j,\,l=1}^{n} \omega_{jl} x_j^*(\tau) \frac{\partial x_l^*(\tau)}{\partial x_i(t)}\Bigg\} d\tau\, + \\ + \sum_{j,\,l=1}^{n} \rho_{jl} x_j^*(T) \frac{\partial x_l^*(T)}{\partial x_i(t)}\Bigg] \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned} u_m^\circ(t, t_0, z(\vartheta)) = -\sum_{i=1}^{n} b_i \Bigg[\int_t^T \Bigg\{\sum_{j,\,l=1}^{n} \omega_{jl} y_j^{\circ *}(\tau) \frac{\partial y_l^{\circ *}(\tau)}{\partial y_i^\circ(t)}\Bigg\} d\tau\, + \\ + \sum_{j,\,l=1}^{n} \rho_{jl} y_j^{\circ *}(T) \frac{\partial y_l^{\circ *}(T)}{\partial y_i^\circ(t)}\Bigg] \end{aligned} \tag{3.3}$$

где $x^*$, $y^{\circ *}$ — оптимальные движения, соответствующие начальным условиям $x(t_0+\vartheta)=z(\vartheta)$ и $\{y(t_0)\}_m$ (2.1), координаты $x_l^*(\tau)$ и $y_l^{\circ *}(\tau)$ дифференцируются по координатам $x_i(t)$ и $y_i^\circ(t)$ при неизменных $u^\circ$ и $u_m^\circ$, так как вследствие оптимальности $u^\circ$ и $u_m^\circ$ вариации функционалов $v=J$ и $v_m=J_m$, вызываемые варьированием управлений, равны нулю. Оптимальные движения определяются формулой Коши [14]

$$x^*(t)=x(t)+\int_{t_0}^{t} h_{(\delta)}[t,\tau]\,u^\circ(\tau,t_0,z(\vartheta))\,d\tau \qquad (3.4)$$
$$y^{\circ *}(t)=y^\circ(t)+\int_{t_0}^{t} h_{(\delta)}{}^{(m)}[t,\tau]\,u_m^\circ(\tau,t_0,z(\vartheta))\,d\tau$$

где $x(t)$, $y^\circ(t)$ — решения соответствующих однородных уравнений. Кроме того,

$$\frac{\partial x_l(\tau)}{\partial x_i(t)}=h_{li}[\tau,t],\qquad \frac{\partial y_l^\circ(\tau)}{\partial y_i^\circ(t)}=h_{li}^*[\tau,t] \qquad (3.5)$$

Из (3.2) — (3.5) следуют интегральные уравнения для $u^\circ$ и $u_m^\circ$

$$u^\circ(t)=-\sum_{i=1}^{n} b_i\Bigg[\int_t^T\Bigg\{\sum_{j,\,l=1}^{m}\omega_{jl}h_{li}[\tau,t]\Bigg(\int_{t_0}^{\tau}h_{(\delta)j}[\tau,\zeta]\,u^\circ(\zeta)\,d\zeta+ \qquad (3.6)$$
$$+x_j(\tau)\Bigg)\Bigg\}d\tau+\sum_{j,\,l=1}^{n}\rho_{jl}h_{li}[T,t]\Bigg(\int_{t_0}^{T}h_{(\delta)j}[T,\zeta]\,u^\circ(\zeta)\,d\zeta+x_j(T)\Bigg)\Bigg]$$

$$u_m^\circ(t)=-\sum_{i=1}^{n} b_i\Bigg[\int_t^T\Bigg\{\sum_{j,\,l=1}^{n}\omega_{jl}h_{li}{}^{(m)}[\tau,t]\Bigg(\int_{t_0}^{\tau}h_{(\delta)j}{}^{(m)}[\tau,\zeta]\,u_m^\circ(\zeta)\,d\zeta+ \qquad (3.7)$$
$$+y_j^\circ(\tau)\Bigg)\Bigg\}d\tau+\sum_{j,\,l=1}^{n}\rho_{jl}h_{li}{}^{(m)}[T,t]\Bigg(\int_{t_0}^{T}h_{(\delta)j}{}^{(m)}[T,\zeta]\,u^\circ(\zeta)\,d\zeta+\mathring{y}_j(T)\Bigg)\Bigg]$$

Оператор $G[u]$, соответствующий уравнению (3.6),

$$G[u]=u(t)+\sum_{i=1}^{n} b_i\sum_{j,l=1}^{n}\Bigg\{\int_t^T\omega_{jl}h_{li}[\tau,t]\Bigg(\int_{t_0}^{\tau}h_{(\delta)j}[\tau,\zeta]\,u(\zeta)\,d\zeta\Bigg)d\tau+ \qquad (3.8)$$
$$+\rho_{jl}h_{li}[T,t]\int_{t_0}^{T}h_{(\delta)j}[T,\zeta]\,u(\zeta)\,d\zeta\Bigg\}$$

и рассматриваемый в пространстве $L_2[t_0,T]$, имеет обратный оператор $G^{-1}$, ограниченный равномерно по $t_0\leqslant T$. В самом деле, пусть $G[u]=f(t)$.

Из (3.8) следует

$$\int_{t_0}^{T}f(t)\,u(t)\,dt=\int_{t_0}^{T}u^2(t)\,dt+ \qquad (3.9)$$
$$+\int_{t_0}^{T}\sum_{j,\,l=1}^{n}\omega_{jl}(\tau)\Bigg[\int_{t_0}^{\tau}h_{(\delta)l}[\tau,t]\,u(t)\,dt\Bigg]\Bigg[\int_{t_0}^{\tau}h_{(\delta)j}[\tau,\zeta]\,u(\zeta)\,d\zeta\Bigg]d\tau+$$
$$+\sum_{j,\,l=1}^{n}\rho_{jl}\Bigg(\int_{t_0}^{T}h_{(\delta)l}[T,t]\,u(t)\,dt\Bigg)\Bigg(\int_{t_0}^{T}h_{(\delta)j}[T,\zeta]\,u(\zeta)\,d\zeta\Bigg)\geqslant\int_{t_0}^{T}u^2(t)\,dt$$

вследствие знакоположительности $\omega\,[t, x]$ и $\rho\,[x]$. Поэтому норма

$$\| f \|^{(2)}{}_{[t_0,\, T)} \geqslant \| u \|^{(2)}{}_{[t_0,\, T)}$$

откуда следует [9,10] существование и равномерная ограниченность $G^{-1}$. Аналогичное заключение справедливо и для оператора $G_m$, соответствующего (3.7). По свойствам операторов $G^{-1}$ и $G_m{}^{-1}$, а также по свойствам движений $x(t)$, $y^\circ(t)$ и функций $h_j$, $h_j{}^{(m)}$, отмеченным в лемме 2.2, заключаем о справедливости следующего утверждения.

*Теорема* 3.1. Оптимальные управления $u^\circ(t, t_0, z(\vartheta))$ и $u_m{}^\circ(t, t_0, \{z\}_m)$, соответствующие начальным условиям (2.13), (2.1), равномерно ограничены.

Для любого $\varepsilon > 0$ можно указать число $N_\varepsilon$ такое, что

$$| u^\circ(t, t_0, z(\vartheta)) - u_m{}^\circ(t, t_0, z(\vartheta)) | < \varepsilon \qquad (\| z(\vartheta) \|^{(2)}{}_{[-1, 0]} \leqslant 1) \qquad (3.10)$$

для всех $t_0 \leqslant T$, если только $m \geqslant N_\varepsilon$.

Из сходимости движений $y^\circ(t)$ к $x(t)$ (2.21), (2.22) и из сходимости (3.10) управлений $u_m{}^\circ$ к $u^\circ$ следует вывод.

*Лемма* 3.1. Оптимальные движения $y^{\circ *}(t, t_0, \{z_m\})$ сходятся равномерно к движениям $x^*(t, t_0, z(\vartheta))$ для всех $t_0 < T$ и всех начальных кривых $z(\vartheta)$ (2.13) и $\{z\}_m$ (2.1).

По определению $u^\circ$, $u_m{}^\circ$ и $\eta^\circ$, $\xi_m{}^\circ$ справедливы равенства

$$\eta^\circ[t, z(\vartheta)] = u^\circ(t, t, z(\vartheta)), \qquad \xi_m{}^\circ[t, z(\vartheta)] = u_m{}^\circ(t, t, z(\vartheta))$$

Следствием теоремы 3.1 и леммы 3.1 будет утверждение.

*Теорема* 3.2. Для любого $\varepsilon > 0$ можно указать число $N_\varepsilon$ такое, что

$$| \eta^\circ[t, z(\vartheta)] - \xi_m{}^\circ[t, \{z\}_m] | \leqslant \varepsilon \, \| z(\vartheta) \|^{(2)}{}_{[-1,\, 0]} \qquad (3.11)$$

$$| J[t, z(\vartheta), \eta^\circ] - J_m[t, \{z\}_m, \xi_m{}^\circ] | \leqslant \varepsilon \, (\| z(\vartheta) \|^{(2)}{}_{[-1,\, 0]})^2 \qquad (3.12)$$

для всех $t \in [0, T]$ и $\{z\}_m$ (2.1), если только $m \geqslant N_\varepsilon$.

4. Теоремы § 3 устанавливают определенную сходимость решений вспомогательной задачи к решениям исходной проблемы. Однако здесь еще остается не выясненным основной вопрос: будут ли близки к оптимальным те движения системы (1.1), которые порождаются в объекте (1.1) законом управления, найденным из решения вспомогательной задачи. Обсудим здесь этот вопрос.

Пусть начальные кривые $z(\vartheta)$ $(-1 \leqslant \vartheta \leqslant 0)$ выбираются из какого-нибудь компактного семейства функций $z(\vartheta)$. Для определенности, будем, например, предполагать, что начальные состояния $z(\vartheta)$ выбираются среди кусочно-непрерывных функций, равномерно ограниченных $\| z(\vartheta) \| \leqslant 1$, имеющих не более чем одну точку разрыва. Будем предполагать, что на участках непрерывности функции $z(\vartheta)$ равностепенно непрерывны. Оптимальные движения $x(t)$ и $y^\circ(t)$ систем (1.1) и (1.3), порожденные такими начальными состояниями, равномерно ограничены и равностепенно непрерывны. Обозначим символом $w_m(t)$ движение системы (1.1) при $u = \xi_m[t, \{w_m(t)\}_m]$, где вектор $\{w_m(t)\}_m = \{w_m(t), w_m(t - 1/m), w_m(t - 1)\}$.

Иначе говоря, $w_m(t)$ — движение системы (1.1), которое получится, если к объекту (1.1) с последействием применить закон регулирования, найденный для вспомогательной задачи 1.2. Движения $w_m(t)$ также будут равномерно ограниченными и равностепенно непрерывными при ограничении начальных состояний указанным выше семейством функций $z(\vartheta)$, которое обозначим $[z(\vartheta)]_{(k)}$. Но в таком случае из оценок § 3 следует справедливость утверждения.

*Теорема* 4.1. Для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $N_\varepsilon$ такое, что

$$\| x(t, t_0, z(\vartheta), \eta^\circ) - w_m(t, t_0, z(\vartheta), \xi_m^\circ) \| < \varepsilon \quad \text{при } t \geqslant t_0 \tag{4.1}$$

для всех $t_0$, $z(\vartheta) \in [z(\vartheta)]_{(k)}$ и $m \geqslant N_\varepsilon$.

Аналогичное заключение о сходимости справедливо и для значения минимизируемой величины $J$.

*Примечание* 4.1. Ограничение класса начальных кривых $z(\vartheta)$ компактным семейством $[z(\vartheta)]_{(k)}$ несущественно для справедливости (4.1), так как равномерная сходимость $w_m(t) \to x(t)$ сохраняется, например, и для всех начальных условий $\|z(\vartheta)\| \leqslant 1$, где $z(\vartheta) \in L_2[-1, 0]$, напротив, равномерной сходимости минимизируемых величин $J$ при таком расширении класса начальных состояний $z(\vartheta)$ уже не получается. Доказательство и анализ утверждений, высказанных в этом примечании, выходят за рамки настоящей статьи.

Поступила 14 IV 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Летов А. М. Аналитическое конструирование регуляторов. Метод динамического программирования. Автоматика и телемеханика, 1961, т. XXII, № 4.
2. Красовский Н. Н. Об аналитическом конструировании оптимального регулятора в системе с запаздываниями времени. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 1.
3. Красовский Н. Н. Оптимальные процессы в системах с запаздыванием. Тр. II конгр. ИФАК, Национальный комитет СССР по автомат. управ. М., 1963.
4. Салуквадзе М. Е. К задаче синтеза оптимального регулятора в линейных системах с запаздыванием, подверженных постоянно действующим возмущениям. Автоматика и телемеханика, 1962, т. XXIII, № 2.
5. Kalman R. E., Contributions to the theory of optimal control. Proceedings Symposium of Ordinary Differential Equations, Mexico City, 1959; Bol. Soc. Mat. Mexicana, 1960, v. 5.
6. Репин Ю. М., Третьяков В. Е. Решение задачи об аналитическом конструировании регулятора на моделирующих устройствах. Автоматика и телемеханика, 1963, т. XXIV, № 6.
7. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа, М., ч. II, Физматгиз, 1963.
8. Колмогоров А. Н. и Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. Изд. МГУ, 1960.
9. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Изд-во иностр. лит., 1962.
10. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. IV, Гостехиздат, М.—Л., 1961.
11. Лоэв М. Теория вероятностей. Изд-во иностр. лит., 1962.
12. Беллман Р., Гликсберг И., Гросс О. Некоторые вопросы математической теории процессов управления. Изд-во иностр. лит., 1962.
13. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. Физматгиз, 1961.
14. Немыцкий В. В. и Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений, Изд. 2-е, Гостехиздат, М.—Л., 1949.