Прикладная математика и механика. Том 28, 1964

ОБ УРАВНЕНИЯХ ГЕККЕЛЕРА В ТЕОРИИ ГИРОКОМПАСОВ

В. Н. Кошляков

(Киев)

Настоящая работа посвящена исследованию собственных движений двухроторного гирокомпаса, не обладающего свойствами пространственного гирогоризонткомпаса [1].

В рамках прецессионной теории рассматривается допустимость перехода к упрощенным уравнениям теории гирокомпасов, полученным Геккелером.

Исследуется устойчивость тривиального решения уравнений в вариациях для случая равномерной циркуляции корабля. Получены явные выражения для характеристических показателей системы уравнений с периодическими коэффициентами, описывающей движение чувствительного элемента гирокомпаса во время циркуляции.

1. Уравнения в вариациях, характеризующие движение чувствительного элемента двухроторного гирокомпаса типа Аншютца, в котором предусмотрена полная компенсация вынужденных баллистических девиаций, имеют вид [2]

$$\begin{gathered}\frac{Pl}{g}(V\alpha)^{\cdot} - Pl\beta - 2B\sin\varepsilon_0\Omega\delta = 0, \qquad \gamma^{\cdot} + \frac{s}{2B\sin\varepsilon_0}\delta + \Omega\beta = 0 \\ \beta^{\cdot} + \frac{V\alpha}{R} - \Omega\gamma = 0, \qquad (2B\sin\varepsilon_0\delta)^{\cdot} - Pl\gamma + \frac{Pl}{g}\Omega V\alpha = 0\end{gathered} \tag{1.1}$$

Здесь обозначения те же, что и в работе [2]; точка означает дифференцирование по времени.

Если в (1.1) пренебречь слагаемыми, содержащими в качестве множителя угловую скорость Ω (точнее, проекцию абсолютной угловой скорости компаса на вертикальную ось z° трехгранника $Ox^\circ y^\circ z^\circ$, ориентированного по вектору V скорости точки подвеса [1,2]), то система (1.1) распадается на две независимые системы вида

$$\begin{gathered}\frac{Pl}{g}(V\alpha)^{\cdot} - Pl\beta = 0, \qquad \gamma^{\cdot} + \frac{s}{2B\sin\varepsilon_0}\delta = 0 \\ \beta^{\cdot} + \frac{V\alpha}{R} = 0, \qquad (2B\sin\varepsilon_0\delta)^{\cdot} - Pl\gamma = 0\end{gathered} \tag{1.2}$$

Системы, имеющие структуру (1.2), впервые рассматривал, по-видимому, Геккелер в работах [3,4], известных специалистам в области теории и практики гирокомпасов. Строгого доказательства допустимости перехода к системам (1.2) Геккелер не приводит.

Применительно к пространственному гирогоризонткомпасу [1] указанное обоснование проведено в работе [5], в которой показано, что уравнения этого компаса для общего случая движения основания по земной сфере приводимы к системам типа (1.2). Аналогичного исследования применительно к гирокомпасам, не обладающим свойствами пространственного гирогоризонткомпаса, насколько известно автору, не имеется; в связи с этим вопрос о переходе к системам типа (1.2) подвергается здесь специальному рассмотрению.

2. В дальнейшем понадобятся некоторые вспомогательные системы, извлекаемые из (1.1) и (1.2). Полагая в (1.1)

$$V\alpha = x_1, \qquad 2B \sin \varepsilon_0 g\delta \,/\, Pl = x_4 \tag{2.1}$$

и обозначая β и γ, соответственно, через x_2 и x_3, получим

$$\begin{aligned} &x_1^{\cdot} - gx_2 - \Omega x_4 = 0, \quad x_3^{\cdot} + \frac{p^2}{g} x_4 + \Omega x_2 = 0 \\ &x_2^{\cdot} + \frac{x_1}{R} - \Omega x_3 = 0, \quad x_4^{\cdot} - gx_3 + \Omega x_1 = 0 \end{aligned} \qquad \left(p = \frac{\sqrt{Pls}}{2B \sin \varepsilon_0}\right) \tag{2.2}$$

Соответственно из (1.2) имеем

$$x_1^{\cdot} - gx_2 = 0, \quad x_3^{\cdot} + \frac{p^2}{g} x_4 = 0, \quad x_2^{\cdot} + \frac{x_1}{R} = 0, \quad x_4^{\cdot} - gx_3 = 0 \tag{2.3}$$

Корни характеристических уравнений независимых систем (2.3) будут

$$r_{1,2} = \pm \nu i, \qquad r_{3,4} = \pm pi \qquad (\nu = \sqrt{g\,/\,R}) \tag{2.4}$$

и соответствуют незатухающим колебаниям гирокомпаса с частотами ν и p. Из (2.2) имеем также

$$\begin{aligned} x_1^{\cdot\cdot} + (\nu^2 - \Omega^2)\, x_1 - 2\Omega x_4^{\cdot} - \Omega^{\cdot} x_4 = 0 \\ x_4^{\cdot\cdot} + (p^2 - \Omega^2)\, x_4 + 2\Omega x_1^{\cdot} + \Omega^{\cdot} x_1 = 0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

В некоторых случаях целесообразно ввести переменные x_1 и x_4 по-другому, полагая, например,

$$V\alpha = Ru \cos \varphi x_1, \qquad \delta = x_4 \sin \varphi \,/\, \sin \varepsilon_0 \tag{2.6}$$

Если параметры компаса подчинить условию

$$2Bg = PlRu \tag{2.7}$$

и положить $\varphi = \mathrm{const}$, то при этом из (1.1) получаем [2]

$$\begin{aligned} &x_1^{\cdot} - \frac{\nu^2}{u \cos \varphi} x_2 - \Omega \operatorname{tg} \varphi x_4 = 0, \quad x_3^{\cdot} + \frac{p^2}{\nu^2} u \sin \varphi x_4 + \Omega x_2 = 0 \\ &x_2^{\cdot} + u \cos \varphi x_1 - \Omega x_3 = 0, \quad x_4^{\cdot} - \frac{\nu^2}{u \sin \varphi} x_3 + \Omega \operatorname{ctg} \varphi x_1 = 0 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Считая Ω заданной функцией t, перейдем в (2.5) к переменным ξ_1 и ξ_2, полагая [8] [1]

$$\begin{aligned} \xi_1 = x_1 \cos \theta - x_4 \sin \theta \\ \xi_2 = x_1 \sin \theta + x_4 \cos \theta \end{aligned} \qquad \left(\theta = \int_0^t \Omega(\tau)\, d\tau\right) \tag{2.9}$$

[1] Следует отметить, что преобразование структуры (2.9) применялось ранее в работах [6,7], не посвященных специально теории гирокомпасов. В работах по гирокомпасам [5,8] отсутствуют ссылки на эти источники.

Преобразование (2.9) приводит к системам с постоянными коэффициентами, имеющими структуру уравнений движения маятника Шулера, уравнения движения гирокомпаса, обладающего свойствами пространственного гирокомпаса Геккелера — Ишлинского. Этому вопросу посвящена работа [5], в которой, при помощи теоремы Ляпунова о приводимости уравнений с периодическими коэффициентами к системам с постоянными коэффициентами, выводятся явные выражения для четырех первых интегралов исходной системы, которые и определяют структуру неособенного преобразования (2.9). Уравнения движения гирокомпасов, не обладающих свойствами пространственных гирокомпасов, этих интегралов не имеют, а потому в этом случае преобразование Ишлинского-Андреева к системам с постоянными коэффициентами не приводит. В более общей постановке при помощи теоремы Н. П. Еругина этот вопрос рассматривался В. Ф. Ляшенко [9]. В свете изложенного, в работе В. Д. Андреева [10] содержится не совсем точная информация относительно существа дела.

Замечая, что из (2.9) следуют обратные соотношения вида

$$x_1 = \xi_1 \cos\theta + \xi_2 \sin\theta, \qquad x_4 = -\xi_1 \sin\theta + \xi_2 \cos\theta \tag{2.10}$$

получим уравнения относительно ξ_1 и ξ_2 в форме

$$\begin{aligned} &\xi_1^{\cdot\cdot} + {}^1/_2\,[p^2 + \nu^2 - (p^2 - \nu^2)\cos 2\theta]\,\xi_1 - {}^1/_2\,(p^2 - \nu^2)\sin 2\theta\,\xi_2 = 0 \\ &\xi_2^{\cdot\cdot} + {}^1/_2\,[p^2 + \nu^2 + (p^2 - \nu^2)\cos 2\theta]\,\xi_2 - {}^1/_2\,(p^2 - \nu^2)\sin 2\theta\,\xi_1 = 0 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Наряду с системой (2.5), будем рассматривать систему вида [7]

$$\begin{aligned} &x_1^{\cdot\cdot} + 2bx_1^{\cdot} + (\nu^2 - \Omega^2)\,x_1 - 2\Omega x_4^{\cdot} - \Omega^{\cdot} x_4 = 0 \\ &x_4^{\cdot\cdot} + 2bx_4^{\cdot} + (p^2 - \Omega^2)\,x_4 + 2\Omega x_1^{\cdot} + \Omega^{\cdot} x_1 = 0 \end{aligned} \tag{2.12}$$

содержащую диссипативные члены, которые в дальнейшем будем полагать сколь угодно малыми.

Пользуясь преобразованием (2.9), получаем

$$\begin{aligned} &\xi_1^{\cdot\cdot} + 2b\xi_1^{\cdot} + {}^1/_2\,[p^2 + \nu^2 - (p^2 - \nu^2)\cos 2\theta]\,\xi_1 + \\ &\qquad + [2b\Omega - {}^1/_2\,(p^2 - \nu^2)\sin 2\theta]\,\xi_2 = 0 \\ &\xi_2^{\cdot\cdot} + 2b\xi_2^{\cdot} + {}^1/_2\,[p^2 + \nu^2 + (p^2 - \nu^2)\cos 2\theta]\,\xi_2 - \\ &\qquad - [2b\Omega + {}^1/_2\,(p^2 - \nu^2)\sin 2\theta]\,\xi_1 = 0 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Остановимся кратко на тех обстоятельствах движения основания, при которых решение поставленной задачи не представляет затруднений.

Сюда следует отнести все те случаи, когда величину Ω можно считать постоянной. Это будет иметь место при работе гирокомпаса на неподвижном относительно Земли основании, а также при движении вдоль параллели с постоянной по величине восточной составляющей v_E его собственной скорости. В первом случае $\Omega = u\sin\varphi$, во втором следует полагать $\Omega = u\sin\varphi\,(1 + v_E / Ru\cos\varphi)$. При этом уравнения (2.2) интегрируются в замкнутом виде, вследствие чего легко выявить влияние слагаемых, содержащих Ω в качестве множителя.

При движении корабля произвольным прямым курсом с постоянной скоростью широта места изменяется, как правило, медленно; поэтому можно пренебречь скоростью ее изменения и на каждой данной широте места полагать $\Omega = \mathrm{const}$. На аналитическом рассмотрении этих случаев останавливаться не будем[11]. Укажем только, что при отмеченных условиях движение гирокомпаса, не обладающего свойствами пространственного гирогоризонткомпаса, с вполне достаточной для практики точностью описывается системами Геккелера типа (1.2).

3. Допустим, что корабль описывает правильную циркуляцию с постоянной скоростью v с некоторого начального курса ψ_0. При этом северная и восточная составляющие собственной скорости корабля будут изменяться соответственно по законам

$$v_N = v\cos(\psi_0 \pm \omega t), \qquad v_E = v\sin(\psi_0 \pm \omega t) \tag{3.1}$$

где ω — круговая частота циркуляции, а верхние знаки относятся к правой циркуляции, нижние — к левой. Рассматривая случай левой циркуляции и ограничиваясь в выражении для Ω главным членом, отражающим скорость изменения курсовой девиации, примем, как и в [2],

$$\Omega = \frac{v_N^{\cdot}}{Ru\cos\varphi} = \mu\omega\sin(\psi_0 - \omega t) \qquad \left(\mu = \frac{v}{Ru\cos\varphi}\right) \tag{3.2}$$

Следовательно, по (2.9), имеем

$$\theta = \mu\,[\cos(\psi_0 - \omega t) - \cos\psi_0] \tag{3.3}$$

Ввиду того что неособенное преобразование (2.9), приводящее систему (2.12) к виду (2.13), обладает в случае циркуляции корабля периодическими коэффициентами с периодом $2\pi / \omega$, характеристические показатели можно находить из системы (2.13).

Для получения явных выражений характеристических показателей применим к (2.13) метод усреднения [12], заменив периодические коэффициенты этой системы их средними значениями за период циркуляции.

При усреднении функций $\sin 2\theta$ и $\cos 2\theta$, где $\theta\,(t)$ выражается формулой (3.3), удобно воспользоваться разложениями

$$\begin{aligned} \sin(2\mu\cos x) &= 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n J_{2n+1}(2\mu)\cos[(2n+1)\,x] \\ \cos(2\mu\cos x) &= J_0(2\mu) + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n J_{2n}(2\mu)\cos(2nx) \end{aligned} \tag{3.4}$$

где $J_\nu(2\mu)$ — функция Бесселя с целым неотрицательным индексом.

В результате указанного усреднения система (2.13) примет вид

$$\begin{aligned} &\xi_1^{\cdot\cdot} + 2b\xi_1^{\cdot} + {}^1/_2\,[p^2 + \nu^2 - (p^2 - \nu^2)\,J_0(2\mu)\cos(2\mu\cos\psi_0)]\,\xi_1 + \\ &\qquad + {}^1/_2\,(p^2 - \nu^2)\,J_0(2\mu)\sin(2\mu\cos\psi_0)\,\xi_2 = 0 \\ &\xi_2^{\cdot\cdot} + 2b\xi_2^{\cdot} + {}^1/_2\,[p^2 + \nu^2 + (p^2 - \nu^2)\,J_0(2\mu)\cos(2\mu\cos\psi_0)]\,\xi_2 + \\ &\qquad + {}^1/_2\,(p^2 - \nu^2)\,J_0(2\mu)\sin(2\mu\cos\psi_0)\,\xi_1 = 0 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Переходя в (3.5) к новым переменным u_1 и u_2 по формулам

$$\begin{aligned} \xi_1 &= u_1\cos(\mu\cos\psi_0) + u_2\sin(\mu\cos\psi_0) \\ \xi_2 &= -u_1\sin(\mu\cos\psi_0) + u_2\cos(\mu\cos\psi_0) \end{aligned} \tag{3.6}$$

получим для u_1 и u_2 два независимых уравнения

$$u_1^{\cdot\cdot} + 2bu_1^{\cdot} + k_1^2 u_1 = 0, \qquad u_2^{\cdot\cdot} + 2bu_2^{\cdot} + k_2^2 u_2 = 0 \tag{3.7}$$

где

$$\begin{aligned} k_1^2 &= {}^1/_2\,[p^2 + \nu^2 - (p^2 - \nu^2)\,J_0(2\mu)] \\ k_2^2 &= {}^1/_2\,[p^2 + \nu^2 + (p^2 - \nu^2)\,J_0(2\mu)] \end{aligned} \tag{3.8}$$

Корни характеристических уравнений, соответствующих (3.7), имеют при $b \neq 0$ отличные от нуля вещественные части, поэтому применение метода усреднения имеет законное основание [12]. Так как $b > 0$ и к тому же всегда $k_1^2 > 0$ и $k_2^2 > 0$, то гирокомпас оказывается устойчивым при достаточно малом периоде циркуляции T. На практике это условие, как правило, соблюдается, так как T всегда мал по сравнению с периодом собственных колебаний компаса T_0 [2, 12]).

Таким образом, добавление сколь угодно малых диссипативных сил сообщает гирокомпасу асимптотическую устойчивость. При слабом демпфировании характеристические показатели $\varkappa_k$ системы (2.13) будут близки к значениям корней характеристических уравнений, соответствующих (3.7), так что можно положить [12]

$$\varkappa_{1,2} = -b \pm k_1 i, \qquad \varkappa_{3,4} = -b \pm k_2 i \tag{3.9}$$

При отсутствии демпфирования следует считать

$$\varkappa_{1,2} = \pm k_1 i, \qquad \varkappa_{3,4} = \pm k_2 i \tag{3.10}$$

На практике всегда $\mu < 1$; учитывая это обстоятельство и сохраняя в разложении функции $J_0(2\mu)$ по степеням μ лишь первые два слагаемых, получим из (3.8) удобные для расчетов выражения для квадратов частот:

$$k_1^2 = \nu^2 + {}^1/_2\,(p^2 - \nu^2)\,\mu^2, \qquad k_2^2 = p^2 - {}^1/_2\,(p^2 - \nu^2)\,\mu^2 \tag{3.11}$$

Частотам k_1 и k_2 соответствуют периоды T_1 и T_2, определяемые с принятой степенью точности формулами

$$T_1 = \frac{2\pi}{\nu}\left[1 - \frac{1}{4}\left(\frac{p^2}{\nu^2} - 1\right)\mu^2\right], \qquad T_2 = \frac{2\pi}{p}\left[1 + \frac{1}{4}\left(1 - \frac{\nu^2}{p^2}\right)\mu^2\right] \tag{3.12}$$

Если параметр μ настолько мал, что можно положить $J_0(2\mu) = 1$, то из (3.8) получаем $k_1 = \nu$, $k_2 = p$ и, следовательно, в силу (3.10),

$$\varkappa_{1,2} = \pm \nu i, \qquad \varkappa_{3,4} = \pm p i \tag{3.13}$$

Эти значения характеристических показателей совпадают с выражениями (2.4) для корней характеристических уравнений, получаемых из систем Геккелера (1.2) и (2.3).

Если параметры компаса подобраны так, что $p = \nu$, то из (3.8) следует $k_1 = k_2 = \nu$, и тогда $\varkappa_{1,2} = \pm \nu i$, $\varkappa_{3,4} = \pm \nu i$. Эти выражения для характеристических показателей получены в работах [5,8].

4. В качестве примера рассмотрим циркуляцию корабля, приняв $v = 30$ узлов, $T = 4$ мин. и $\varphi = 80°$.

При числовых значениях параметров чувствительного элемента, принятых в работе [2], имеем

$$\mu^2 = 3.69\cdot 10^{-2}, \qquad p^2 = 2.03\cdot 10^{-5}\ \text{сек.}^{-2} \tag{4.1}$$

Принимая $\nu^2 = 0.154\cdot 10^{-5}$ сек.$^{-2}$, получаем из (3.8), что $k_1 = 1.37\cdot 10^{-3}$ сек.$^{-1}$, $k_2 = 4.46\cdot 10^{-3}$ сек.$^{-1}$ Имеем отсюда $T_1 = 76.5$ мин., $T_2 = 23.4$ мин.

Соответствующие частотам k_1 и k_2 характеристические показатели, согласно (3.10), будут

$$\varkappa_{1,2} = \pm 1.37\cdot 10^{-3}\, i, \qquad \varkappa_{3,4} = \pm 4.46\cdot 10^{-3}\, i \tag{4.2}$$

Сопоставим эти вычисления с результатами статьи [2], где получено характеристическое уравнение, соответствующее системе с периодическими коэффициентами (2.8), имеющее для нашего случая возвратную форму

$$\rho^4 + A_1\rho^3 + A_2\rho^2 + A_1\rho + 1 = 0 \tag{4.3}$$

Это уравнение было также построено на быстродействующей счетной машине «Стрела» и для указанных выше данных получилось в виде

$$\rho^4 - 2.848\rho^3 + 3.809\rho^2 - 2.848\rho + 1.000 = 0 \tag{4.4}$$

Корни этого уравнения суть

$$\rho_{1,2} = 0.946 \pm 0.324\, i, \qquad \rho_{3,4} = 0.479 \pm 0.880\, i \tag{4.5}$$

и имеют модули, равные единице.

Соответствующие этим корням характеристические показатели, определяемые формулами

$$\varkappa_k = \frac{1}{T} \ln \rho_k \tag{4.6}$$

имеют следующие числовые значения:

$$\varkappa_{1,2} = \pm 1.37 \cdot 10^{-3}\, i, \qquad \varkappa_{3,4} = \pm 4.46 \cdot 10^{-3}\, i \tag{4.7}$$

что совпадает с результатами (4.2), полученными методом усреднения.

5. Существенно отметить, что формальное применение метода усреднения к системам (2.5) или (2.12) может привести к неверным заключениям относительно устойчивости. Действительно, система (2.12) является частным случаем системы с переменными гироскопическими и неконсервативными силами вида [13]

$$x_j^{\cdot\cdot} + 2bx_j^{\cdot} + \lambda_j(t)\, x_j + \sum_k \left[g_{jk}(t)\, x_k^{\cdot} + e_{jk}(t)\, x_k\right] = 0 \tag{5.1}$$

где

$$g_{jk} = -g_{kj}, \qquad e_{jk} = -e_{kj}, \qquad g_{jj} = e_{jj} = 0 \tag{5.2}$$

При циркуляции корабля указанные силы будут обладать периодическими коэффициентами с периодом циркуляции.

При формальном усреднении системы (2.12) обращаются в нули в силу (3.2) коэффициенты 2Ω и $\Omega^{\cdot}$, соответствующие g_{jk} и e_{jk} в (5.1). Поэтому усредненные уравнения, получаемые из (2.12), будут частным случаем уравнений вида

$$x_j^{\cdot\cdot} + 2bx_j^{\cdot} + \lambda_j^* x_j = 0 \tag{5.3}$$

где через λ_j^* обозначены усредненные коэффициенты $\lambda_j(t)$.

На основании исследования устойчивости уравнений (5.3) нельзя делать каких-либо заключений об устойчивости системы (5.1), так как при этом оказываются неучтенными переменные гироскопические силы, которые в нашем случае стабилизируют гиросферу по координате γ. Действительно, уравнение структуры (5.3) получается из (2.12) для переменной x_1, если положить там x_4 и $x_4^{\cdot}$ равными нулю. Механически это равносильно рассмотрению движения системы в предположении отсутствия возможности прецессии гироскопов вокруг осей их кожухов на угол δ. Таким образом, при формальном усреднении системы (2.5) по периоду циркуляции теряется одно из основных преимуществ двухроторного гирокомпаса: наличие гироскопического момента $\Gamma = 2B \sin \varepsilon_0 \delta^{\cdot}$, стабилизирующего гиросферу относительно линии Север — Юг.

Преобразование же (2.9) непосредственно приводит (2.5) к виду

$$\xi_j^{\cdot\cdot} + \sum_k c_{jk}(t)\, \xi_k = 0 \qquad (c_{jk} = c_{kj}) \tag{5.4}$$

выражаемому уравнениями (2.11).

При этом учет гироскопических сил сохраняется: он заключен в самом преобразовании (2.9). При использовании этого преобразования в сочетании с добавлением сколь угодно малых диссипативных сил метод усреднения проходит без затруднений, значительно облегчая процесс нахождения характеристических показателей $\varkappa_k$.

Для получения $\varkappa_k$ можно было бы применить также метод малого параметра [14]. В качестве малого параметра удобно принять величину μ. Если следовать по пути, указанному в [14], то следует положить $\varkappa_k = \varkappa_k(0) + f_k(\mu)$, где $\varkappa_k(0)$ — значения характеристических показателей при $\mu = 0$. Следует, однако, заметить, что метод, предлагаемый в [14]для нахождения функций $f_k(\mu)$, приводит в нашем случае к громоздким вычислениям ввиду необходимости в выражениях для $\varkappa_k$ учесть члены с μ^2 (см формулы (3.10) и (3.11)).

6. Рассмотрим случай циркуляции с восточного курса и обратимся к получению законов движения чувствительного элемента по координатам α, β, γ и δ. Полагая в (3.5) $\psi_0 = {}^1/_2\pi$ и пренебрегая демпфированием, получаем

$$\xi_1 = \xi_1(0)\cos k_1t + k^{-1}\xi_1^{\cdot}(0)\sin k_1t \tag{6.1}$$

Далее, из (2.9), (3.2) и (3.3) имеем с учетом (2.2)

$$\xi_1(0) = x_1(0), \qquad \xi_1^{\cdot}(0) = gx_2(0) \tag{6.2}$$

поэтому

$$\xi_1 = x_1(0)\cos k_1t + gk_1^{-1}x_2(0)\sin k_1t \tag{6.3}$$

Аналогично

$$\xi_2 = x_4(0)\cos k_2t + gk_2^{-1}x_3(0)\sin k_2t \tag{6.4}$$

Далее, по (2.10) получаются выражения для x_1 и x_4, а затем из (2.2) — для x_2 и x_3. Проделав эти выкладки и переходя, согласно (2.1), к исходным переменным, получаем окончательно

$$\begin{aligned}
\alpha = {} & V^{-1}\{(V(0)\,\alpha(0)\cos k_1t + gk_1^{-1}\beta(0)\sin k_1t)\cos\theta + \\
& + (gk_2^{-1}\gamma(0)\sin k_2t + 2Bg(Pl)^{-1}\sin\varepsilon_0(0)\,\delta(0)\cos k_2t)\sin\theta\} \\
\beta = {} & (-k_1g^{-1}V(0)\,\alpha(0)\sin k_1t + \beta(0)\cos k_1t)\cos\theta + \\
& + (\gamma(0)\cos k_2t - 2B(Pl)^{-1}k_2\sin\varepsilon_0(0)\,\delta(0)\sin k_2t)\sin\theta \\
\gamma = {} & -(-k_1g^{-1}V(0)\,\alpha(0)\sin k_1t + \beta(0)\cos k_1t)\sin\theta + \\
& + (\gamma(0)\cos k_2t - 2B(Pl)^{-1}k_2\sin\varepsilon_0(0)\,\delta(0)\sin k_2t)\cos\theta \\
\delta = {} & -{}^1/_2PlB^{-1}\sin\varepsilon_0\{(V(0)\,\alpha(0)\cos k_1t + \\
& + gk_1^{-1}\beta(0)\sin k_1t)\sin\theta + (gk_2^{-1}\gamma(0)\sin k_2t + \\
& + 2Bg(Pl)^{-1}\sin\varepsilon_0(0)\,\delta(0)\cos k_2t)\cos\theta\}
\end{aligned} \tag{6.5}$$

Эти выражения можно упростить и, как следствие из них, получить формулы Геккелера. Имеем при $\psi_0 = {}^1/_2\pi$, что

$$\sin\theta = \mu\sin\omega t + O(\mu^3), \qquad \cos\theta = 1 + 0(\mu^2) \tag{6.6}$$

Здесь $O(\mu^k)$ — совокупность слагаемых, содержащих члены с μ^k и выше. Поэтому первое из выражений (6.5) можно представить в форме

$$\begin{aligned}
\alpha = {} & V^{-1}\{V(0)\,\alpha(0)\cos\nu t + g\nu^{-1}\beta(0)\sin\nu t + \\
& + \mu\left(g\frac{1}{p}\gamma(0)\sin pt + \frac{2Bg\sin\varepsilon_0(0)}{Pl}\delta(0)\cos pt\right)\sin\omega t\} + O(\mu^2)
\end{aligned} \tag{6.7}$$

Если здесь положить $V \approx V(0) \approx Ru\cos\varphi$, $\varepsilon_0 = \varphi$ и учесть соотношение (2.7), то с точностью до членов с μ^2 будем иметь

$$\begin{aligned}
\alpha = {} & \alpha(0)\cos\nu t + \frac{\nu}{u\cos\varphi}\beta(0)\sin\nu t + \\
& + \mu\left[\frac{\nu^2}{pu\cos\varphi}\gamma(0)\sin pt + \delta(0)\,\mathrm{tg}\,\varphi\cos pt\right]\sin\omega t
\end{aligned} \tag{6.8}$$

Аналогично имеем

$$\begin{aligned}
\beta = {} & -\frac{u\cos\varphi}{\nu}\alpha(0)\sin\nu t + \beta(0)\cos\nu t + \mu\Big[\nu(0)\cos pt - \\
& - \frac{pu\sin\varphi}{\nu^2}\delta(0)\sin pt\Big]\sin\omega t
\end{aligned} \tag{6.9}$$

Если условия маневра таковы, что μ оказывается достаточно малой величиной, то в (6.7) можно ограничиться учетом первого слагаемого, полагая

$$\alpha = V^{-1}[V(0)\alpha(0)\cos\nu t + g\nu^{-1}\beta_0(0)\sin\nu t] \qquad (6.10)$$

Этот же результат непосредственно извлекается из уравнений Геккелера (1.2).

В случае циркуляции с северного курса окончательные выражения для α, β, γ, δ будут иметь ту же структуру, что и (6.5), хотя оказываются несколько более сложными. В частности, слагаемые при $\cos\theta$ в выражениях для α и β будут включать в себя члены, зависящие от $\gamma(0)$ и $\delta(0)$.

7. Вышеизложенное позволяет сделать вывод, что при изучении свободных движений гирокомпаса и его устойчивости во время циркуляций корабля основным критерием, оправдывающим переход к упрощенным системам типа Геккелера, является малость параметра μ. При $\mu \ll 1$ упрощения, вносимые заменой исходных уравнений системой Геккелера, не изменяют существенным образом основной картины явления и приводят, в общем, к правильным выводам относительно ожидаемой точности курсоуказания.

Если корабль движется так, что функция $\Omega = \Omega(t)$ не меняет своего знака при изменении курса (этому соответствуют отдельные подвороты или, например, полуциркуляции с курса 0°), то пользоваться изложенным здесь методом нельзя, поскольку усреднение коэффициентов системы (2.13) осуществлялось по периоду полной циркуляции. Хорошую точность дает в этих случаях метод, использованный в [2]. Отметим также, что в случае полуциркуляций с северного курса можно производить усреднение по полупериоду циркуляции.

Поступила 27 II 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Ишлинский А. Ю. К теории гирогоризонткомпаса. ПММ, 1956, т. 20, вып. 4.
2. Кошляков В. Н. К теории гирокомпасов. ПММ, 1959, т. 26, вып. 5.
3. Geckeler I. W. Kreiselkompass und Schiffsmanover. Ingr-Arch, Berlin, 1933, t. IV, No 1, 2.
4. Geckeler I. W. Kreiselmechanik des Anschütz-Raumkompasses. Ingr-Arch., Berlin, 1935, t. VI, No 4.
5. Кошляков В. Н. О приводимости уравнений движения гирогоризонткомпаса. ПММ, 1961, т. 25, вып. 5.
6. Ишлинский А. Ю. Об уравнениях задачи определения местоположения объекта посредством гироскопов и измерителей ускорений. ПММ, 1957, т. 21, вып. 6.
7. Андреев В. Д. Об одном случае малых колебаний физического маятника с подвижной точкой опоры. ПММ, 1958, т. 22, вып. 6.
8. Кошляков В. Н. Об устойчивости гирогоризонткомпаса при наличии диссипативных сил. ПММ, 1962, т. 26, вып. 3.
9. Ляшенко В. Ф. О приводимости уравнений движения гирогоризонткомпаса и двухгироскопической вертикали. ПММ, 1962, т. 26, вып. 21.
10. Андреев В. Д. К теории инерциальных систем автономного определения координат движущегося объекта. ПММ, 1962, т. 26, вып. 21.
11. Меркин Д. Р. О точности вычисления некоторых параметров гироскопического компаса. Изв. высш. учебн. завед. Приборостроение, 1960, т. III, вып. I.
12. Демидович Б. П. О некоторых свойствах характеристических показателей системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими коэффиц ентами. Уч. зап. МГУ, 1952, т. VI, вып. 163.
13. Меркин Д. Р. Гироскопические системы, Гостехиздат. 1956.
14. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. Гостехиздат, 1956.