

## ОБ ОДНОМ РЕШЕНИИ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ

Н. Н. Кочина

(Москва)

Автоколебательные процессы, описываемые нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных, рассмотрены в статьях [1-7].

Ниже дано периодическое решение уравнения диффузии с некоторым нелинейным граничным условием.

Цикл работ [8-11] посвящен автоколебаниям, возникающим при определенных условиях в электролитических системах. В этом параграфе приводятся вкратце теория этого явления, а также математическая формулировка соответствующей задачи, изложенные в указанных работах.

Теория автоколебаний [8], обнаруженных [9] при восстановлении анионов  $S_2O_8^{2-}$ , исходит из того, что характеристика  $P(\theta)$  системы имеет падающий участок, и перенос вещества из раствора к поверхности электрода — медленный процесс, при котором падение концентрации от значения  $c(l, t) = c^0$  в массе раствора до значения  $c(0, t)$  на поверхности происходит в слое конечной толщины  $l$ . Плотность тока  $i$  и потенциал электрода  $\theta$  связаны [12] соотношением  $i = c(0, t)P(\theta)$  (фиг. 1). Цепь системы состоит из двух электродов, погруженных в электролит, и последовательного сопротивления  $R$ . На концах цепи задано постоянное напряжение  $v$ . Состояние системы в координатах  $i, \theta$  характеризуется точкой пересечения (фиг. 1) прямой  $ir + \theta = v$  ( $r = RS$ ), где  $S$  — площадь электрода, с кривой  $i = cP(\theta)$ . Если в системе имеется стационарное состояние  $c(0, t) = c_0$ , то концентрация вещества распределена в диффузионном слое линейно:

$$c(x, t) = c_0 + (c^0 - c_0) x/l$$

При определенных условиях стационарное состояние единственно. Если при этом  $c_0 P'[\theta(c_0)] < -1/r$ , то в системе возбуждаются автоколебания [11], происходящие, в предположении, что емкость двойного электрического слоя отсутствует, следующим образом: пусть в начальный момент времени система находится (фиг. 1) в точке 1 касания прямой  $ir + \theta = v$  с кривой  $i_+ = c_+ P(\theta)$ , тогда она скачком переходит в точку 2 на той же кривой, затем постепенно переходит в точку 3 касания прямой с кривой  $i_- = c_- P(\theta)$ , откуда скачком переходит в точку 4 той же кривой, постепенно смещается в точку 1, и цикл повторяется снова ( $c_- < c_0 < c_+$ ). При этом  $i = nF^* D \partial c(0, t) / \partial x$ , где  $D$  — коэффициент диффузии,  $nF^*$  — расход электричества на моль вещества.

Математически задача сводится к решению нелинейной краевой задачи для уравнения диффузии [11]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 < x < l) \quad (0.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{1}{Gl} F, \quad u(l, t) = 0 \quad (G = nF^* D / l) \quad (0.2)$$

$$u(x, 0) = \Phi(x) \quad (0.3)$$

Здесь величина  $u(x, t)$  связана с концентрацией  $c(x, t)$  следующим образом

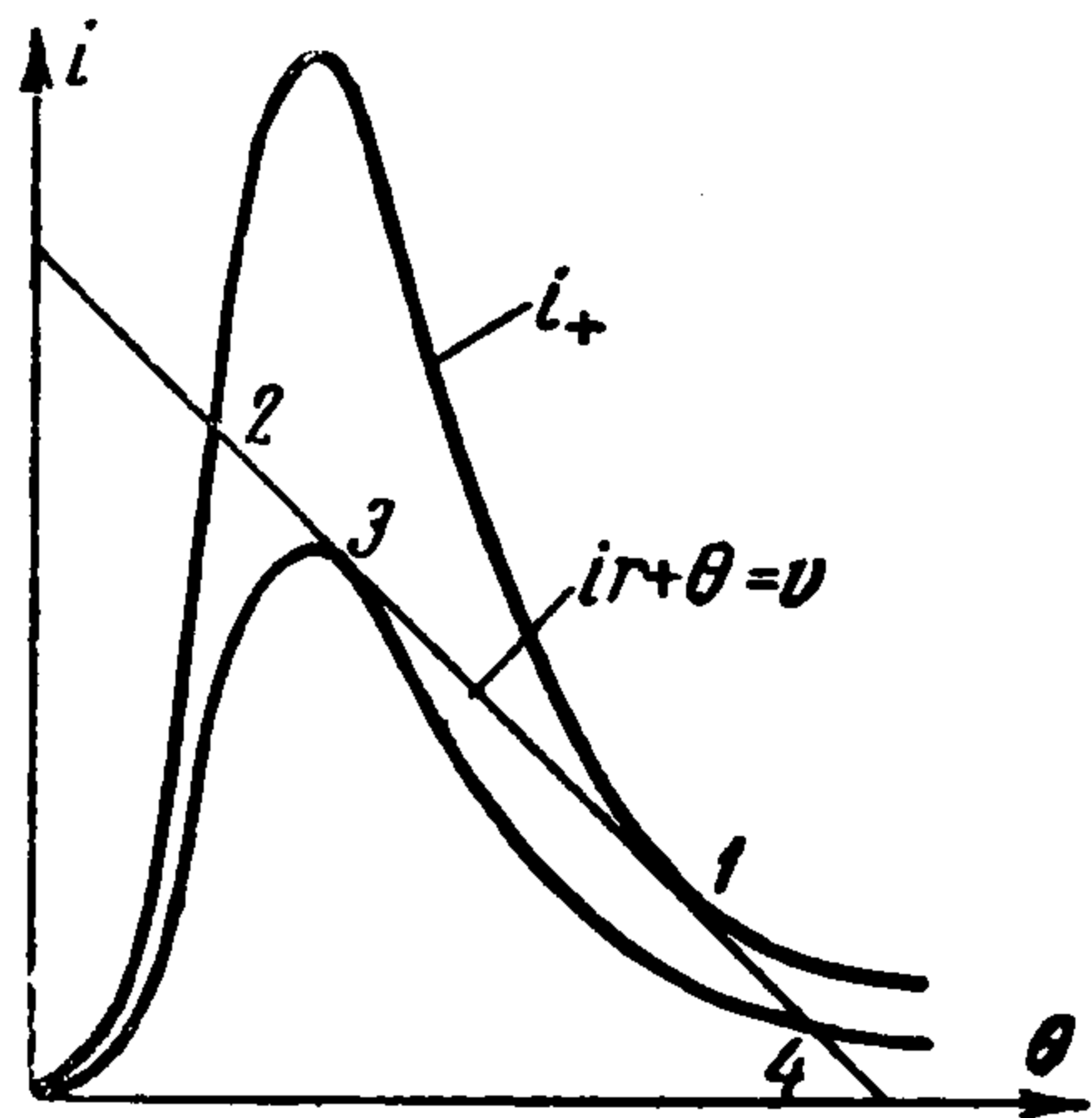
$$u(x, t) = c(x, t) - c_0 - (c^0 - c_0) x/l \quad (0.4)$$

$\Phi(x)$  — некоторая заданная функция, сопряженная с граничными условиями (в частности,  $\Phi(l) = 0$ );  $S$ -образная функция  $F$  описывается параметрической зависимостью

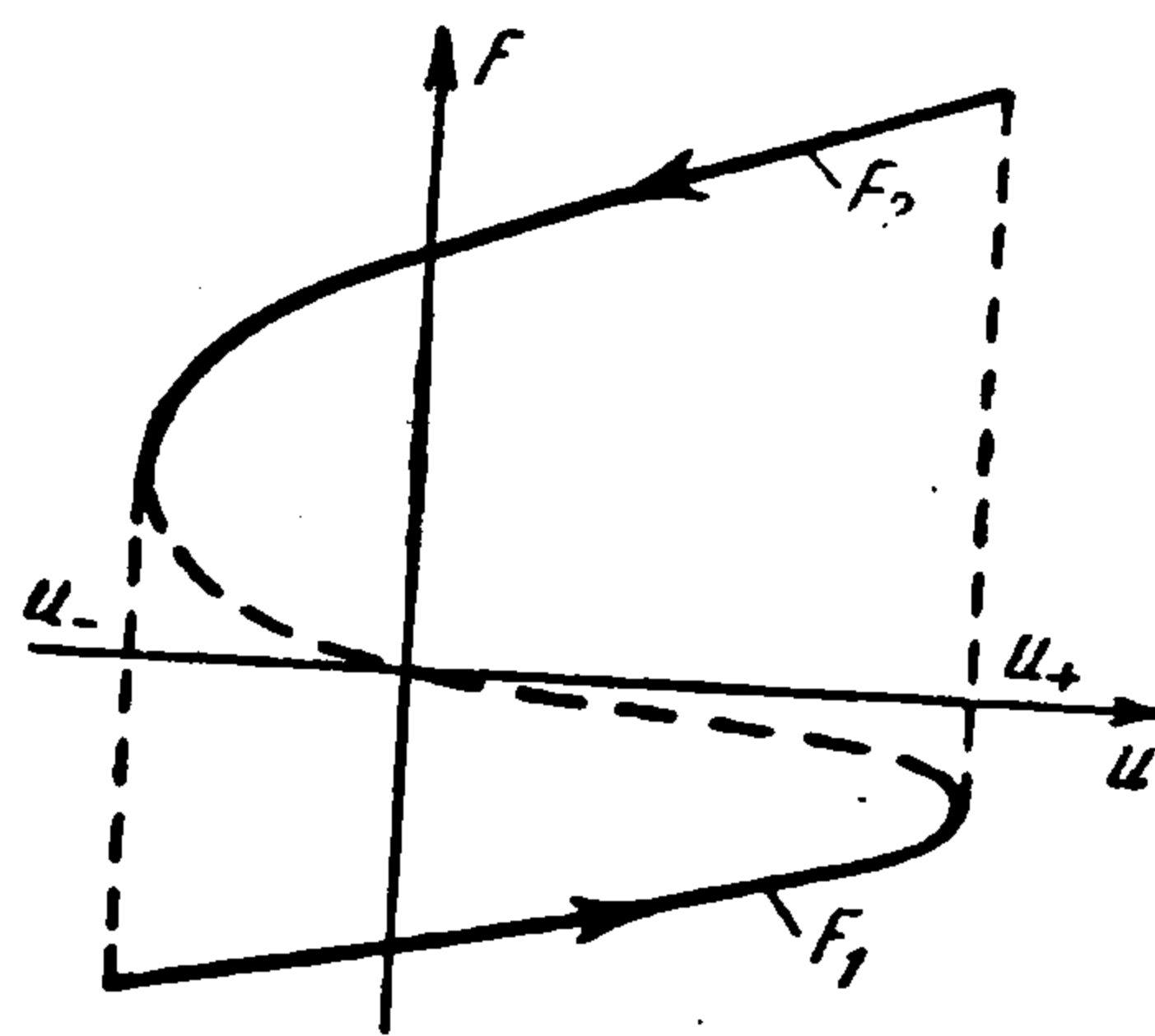
$$F = \frac{v - \theta}{r} - G(c^\circ - c_0), \quad u = -c_0 + \frac{v - \theta}{rP(\theta)} \quad (0.5)$$

Автоколебанию отвечают ветви  $F_1(u)$  и  $F_2(u)$ , причем при  $u = u_+$  совершается мгновенный скачок с кривой  $F = F_1(u)$  на кривую  $F = F_2(u)$ , а при  $u = u_-$  — мгновенный скачок с кривой  $F = F_2(u)$  на кривую  $F = F_1(u)$ .

Задачу, описываемую уравнениями (0.1) — (0.3), можно свести при заданной характеристике  $P(\theta)$  к решению нелинейного интегрального уравнения Вольтерра второго рода, ядро которого имеет слабую особенность [11]. Однако практически определить поляризационную кривую  $P(\theta)$  экспериментальным путем невозможно.



Фиг. 1



Фиг. 2

Ниже предлагается метод нахождения этой кривой (для значений  $\theta$ , отвечающих предельному циклу и охватывающих область максимума характеристики) путем решения обратной задачи. При этом осциллограммы  $i = i(t)$ , полученные опытным путем, предполагаются известными.

1. Будем считать, что неоднозначная функция  $F$ , входящая в условие (0.2), имеет следующий вид (фиг. 2):

$$F \left[ u, \frac{\partial u}{\partial t} \right] = \begin{cases} F_1(u) & \text{при } \partial u / \partial t > 0 \\ F_2(u) & \text{при } \partial u / \partial t < 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

$$F_1(u) < 0, \quad F_2(u) > 0, \quad F_1'(u_+) = F_2'(u_-) = \infty$$

Как известно [13], если моменты времени  $t$ , протекшие от начала процесса, велики, можно рассматривать решение уравнения диффузии без начальных условий.

В работе [10] показано, что если  $\lambda = l\sqrt{\pi\nu/D} > 2$  (где  $\nu$  — частота процесса), то можно искать решение уравнения (0.1) в полубесконечной области.

Будем предполагать, что функции  $F_1$  и  $F_2$  известны в зависимости от времени. Тогда, пренебрегая начальным условием (0.3), будем искать периодическое решение уравнения диффузии (0.1) в полубесконечной области  $0 < x < \infty$  с условием на границе  $x = 0$

$$\partial u / \partial x = \chi(t) \quad (1.2)$$

Здесь  $\chi(t)$  — известная периодическая функция времени с периодом  $T$

$$\chi(t) = \begin{cases} \psi(t) & \text{при } \alpha + kT \leq t \leq \beta + kT \\ \varphi(t) & \text{при } \beta + kT \leq t \leq \gamma + kT \end{cases} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (1.3)$$

$$(\alpha = 1/2pT, \quad \beta = -1/2pT + T, \quad \gamma = 1/2pT + T, \quad 0 < p < 1)$$

функции  $\varphi(t) > 0$  и  $\psi(t) < 0$  — периодические с периодом  $T$ .

Будем искать решение поставленной задачи в виде ряда Фурье. Разлагая в ряд функцию  $\chi(t)$ , найдем

$$\chi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{2\pi kt}{T} + b_k \sin \frac{2\pi kt}{T} \right) \quad (1.4)$$

Здесь

$$a_k = \frac{2}{T} \left[ \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \cos \frac{2\pi kt}{T} dt + \int_{\beta}^{\gamma} \varphi(t) \cos \frac{2\pi kt}{T} dt \right] \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \left[ \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \sin \frac{2\pi kt}{T} dt + \int_{\beta}^{\gamma} \varphi(t) \sin \frac{2\pi kt}{T} dt \right] \quad (k = 1, 2, \dots)$$

Выражения для функций  $\partial u(x, t) / \partial x$  и  $u(x, t)$  примут вид [14]

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \exp \left\{ - \left( \frac{\pi k}{DT} \right)^{1/2} x \right\} \left[ a_k \cos \left( \frac{2\pi kt}{T} - \left( \frac{\pi k}{DT} \right)^{1/2} x \right) + \right. \quad (1.5)$$

$$\left. + b_k \sin \left( \frac{2\pi kt}{T} - \left( \frac{\pi k}{DT} \right)^{1/2} x \right) \right] \quad (1.6)$$

$$u(x, t) = \frac{b_0}{2} + \frac{a_0}{2} x + \frac{1}{2} \left( \frac{DT}{\pi} \right)^{1/2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \exp \left\{ - \left( \frac{\pi k}{DT} \right)^{1/2} x \right\} \times$$

$$\times \left\{ (-a_k + b_k) \cos \left[ \frac{2\pi kt}{T} - \left( \frac{\pi k}{DT} \right)^{1/2} x \right] - (a_k + b_k) \sin \left[ \frac{2\pi kt}{T} - \left( \frac{\pi k}{DT} \right)^{1/2} x \right] \right\} \quad (1.7)$$

В силу второго из условий (0.2), которое должно теперь выполняться при  $x \rightarrow \infty$ , в формулах (1.6) и (1.7) нужно положить  $a_0 = b_0 = 0$ . Вследствие этого первая из формул (1.5) при  $k = 0$  дает

$$\int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) dt + \int_{\beta}^{\gamma} \varphi(t) dt = 0 \quad (1.8)$$

Выясним теперь, какие еще условия следует наложить на функции  $\varphi(t)$  и  $\psi(t)$  для того, чтобы выполнялось условие (1.1), т. е. чтобы было получено решение искомой нелинейной задачи.

2. Воспользуемся для описания решения  $u(x, t)$  на каждом из двух участков  $\alpha \leq t \leq \beta$  ( $u_1(x, t)$ ) и  $\beta \leq t \leq \gamma$  ( $u_2(x, t)$ ) формулой Дюгамеля [13]

$$u(x, t) = - \left( \frac{D}{\pi} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^t \chi(\tau) \exp \frac{-x^2}{4D(t-\tau)} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \quad (2.1)$$

Полагая в (2.1)  $x = 0$ , найдем значение функции  $u(0, t)$  на границе

$$u(0, t) = - \left( \frac{D}{\pi} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^t \chi(\tau) \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \quad (2.2)$$

Заменяя в подынтегральном выражении (2.2) величину  $\chi(\tau)$  функцией, заданной формулой (1.3), и разбивая участок интегрирования на отдельные интервалы согласно (1.3), где положено  $k = 0, -1, -2, \dots$ , представим функции  $u_i(0, t)$  ( $i = 1, 2$ ) в виде знакочередующихся рядов

$$u_1(0, t) = - \left( \frac{D}{\pi} \right)^{1/2} \int_{\alpha}^t \frac{\psi(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}} + S_1(t) \quad (2.3)$$

$$u_2(0, t) = - \left( \frac{D}{\pi} \right)^{1/2} \int_{\beta}^t \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}} + S_2(t) \quad (2.4)$$

Здесь

$$S_1(t) = - \left( \frac{D}{\pi} \right)^{1/2} \sum_{k=0}^{-\infty} \left\{ \int_{\beta-T+kT}^{\alpha+kT} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}} + \int_{\alpha-T+kT}^{\beta-T+kT} \frac{\psi(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \right\} \quad (2.5)$$

$$S_2(t) = - \left( \frac{D}{\pi} \right)^{1/2} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\psi(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}} + S_1(t)$$

Используя соотношение (1.8), связывающее функции  $\varphi(t)$  и  $\psi(t)$ , легко убедиться в том, что достаточные признаки сходимости рядов  $S_1(t)$  и  $S_2(t)$ , входящих в формулы (2.3) и (2.4), выполнены.

На основании формул (2.1), (1.2) и (1.3) выражения для функций  $u_1(x, t)$  и  $u_2(x, t)$  можно представить в виде

$$u_1(x, t) = - \left( \frac{D}{\pi} \right)^{1/2} \int_{\alpha}^t \exp \frac{-x^2}{4D(t-\tau)} \frac{\psi(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}} + S_1(x, t) \quad (2.6)$$

$$u_2(x, t) = - \left( \frac{D}{\pi} \right)^{1/2} \int_{\beta}^t \exp \frac{-x^2}{4D(t-\tau)} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}} + S_2(x, t) \quad (2.7)$$

$$S_1(x, t) = - \left( \frac{D}{\pi} \right)^{1/2} \sum_{k=0}^{-\infty} \left[ \int_{\beta-T+kT}^{\alpha+kT} \exp \frac{-x^2}{4D(t-\tau)} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}} + \int_{\alpha-T+kT}^{\beta-T+kT} \exp \frac{-x^2}{4D(t-\tau)} \frac{\psi(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \right] \quad (2.8)$$

$$S_2(x, t) = - \left( \frac{D}{\pi} \right)^{1/2} \int_{\alpha}^{\beta} \exp \frac{-x^2}{4D(t-\tau)} \frac{\psi(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}} + S_1(x, t) \quad (2.9)$$

Легко показать, что знакочередующиеся ряды (2.8) и (2.9) сходятся.

Покажем, что можно подобрать функции  $\psi(t)$  и  $\varphi(t)$  так, чтобы выполнялись неравенства

$$\frac{du_1(0, t)}{dt} > 0, \quad \frac{du_2(0, t)}{dt} < 0 \quad (2.10)$$

Предположим, что неравенства (2.10) выполнены.

Минимальное и максимальное значения функции  $u(0, t)$  даются тогда в силу (2.3) — (2.5) формулами (фиг. 2)

$$u_- = u_1(\alpha) = u_2(\gamma) = S_1(\alpha) = -\left(\frac{D}{\pi}\right)^{1/2} \int_{\beta}^{\gamma} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\sqrt{\gamma-\tau}} + S_2(\gamma)$$

$$u_+ = u_1(\beta) = u_2(\beta) = S_2(\beta) \quad (u_- < 0, u_+ > 0)$$

Из соотношений (0.2), (1.1) и (1.3) следует, что функции  $F_1(u)$  и  $F_2(u)$  будут определены параметрическими зависимостями

$$F_1 = Gl\psi(t), \quad u = u_1(0, t) \quad F_2 = Gl\varphi(t), \quad u = u_2(0, t) \quad (2.11)$$

При этом для производных получаем формулы

$$\frac{dF_1}{du} = Gl \frac{\psi'(t)}{u_1'(0, t)}, \quad \frac{dF_2}{du} = Gl \frac{\varphi'(t)}{u_2'(0, t)} \quad (2.12)$$

Если  $\psi'(t) > 0$ ,  $\varphi'(t) < 0$ , как и должно быть из рассмотрения осциллограмм [8,9], то формулы (2.12) показывают, что, в соответствии с фиг. 2,

$$\frac{dF_i}{du} > 0 \quad (i = 1, 2)$$

Подставляя функции  $F_1(u)$  и  $F_2(u)$ , определенные соотношениями (2.11), в формулы (0.5), для интервалов изменения  $\theta$ , отвечающих предельному циклу (фиг. 1), получим зависимости  $P_1(\theta)$  для  $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_4$  и  $P_2(\theta)$  для  $\theta_2 \leq \theta \leq \theta_3$ . При этом, как видно из фиг. 1, должны выполняться требования

$$P_1'(\theta) < 0, \quad \theta_1 \leq \theta \leq \theta_4 \quad (2.13)$$

$$P_2'(\theta) > 0, \quad \theta_2 \leq \theta < \theta_*, \quad P_2'(\theta_*) = 0$$

$$P_2'(\theta) < 0, \quad \theta_* < \theta \leq \theta_3 \quad (2.14)$$

Легко убедиться, что если график функции  $F_1(u)$  не имеет точки перегиба, то для выполнения неравенства (2.13) достаточно, чтобы

$$(c_0 + u_-) F_1'(u_-) \geq F_1(u_-) + G(c^\circ - c_0) \quad (2.15)$$

Если график функции  $F_2(u)$  имеет не больше одной точки перегиба, то неравенства (2.14) будут выполнены, если

$$(c_0 + u_+) F_2'(u_+) < F_2(u_+) + G(c^\circ - c_0) \quad (2.16)$$

3. Вернемся теперь к условию (2.10). Так как

$$\frac{d}{dt} \int_{\alpha}^t \frac{\psi(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}} = \frac{\psi(\alpha)}{\sqrt{t-\alpha}} + \int_{\alpha}^t \frac{\psi'(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \quad (3.1)$$

то формулы (2.3) — (2.5) дают

$$\frac{du_1(0, t)}{dt} = -\left(\frac{D}{\pi}\right)^{1/2} \left[ \frac{\psi(\alpha)}{\sqrt{t-\alpha}} + \int_{\alpha}^t \frac{\psi'(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \right] + \frac{dS_1(t)}{dt} \quad (3.2)$$

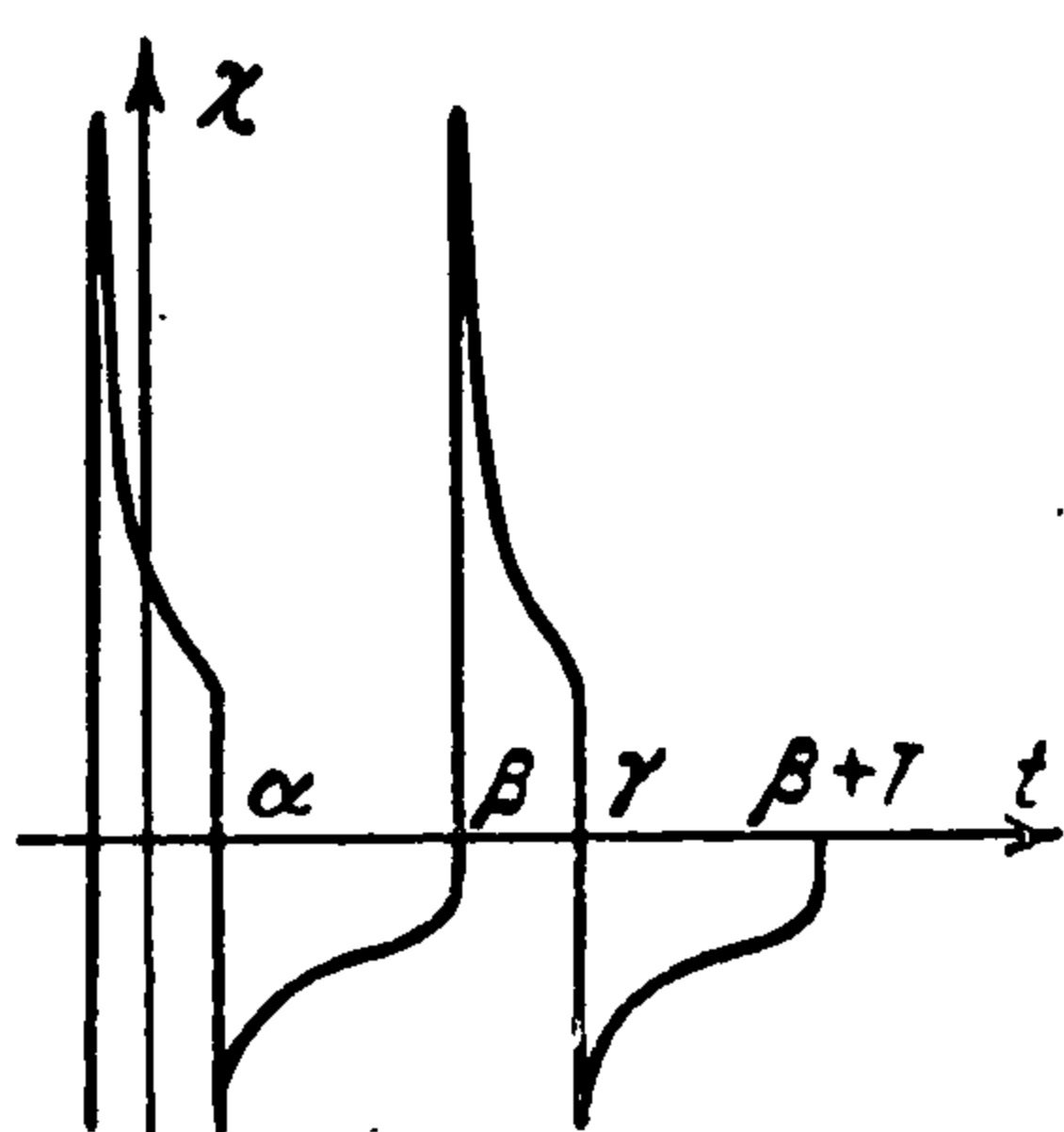
$$\frac{du_2(0, t)}{dt} = -\left(\frac{D}{\pi}\right)^{1/2} \left[ \frac{\varphi(\beta)}{\sqrt{t-\beta}} + \int_{\beta}^t \frac{\varphi'(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \right] + \frac{dS_2(t)}{dt} \quad (3.3)$$

где в силу (2.5)

$$\frac{dS_1(t)}{dt} = \frac{1}{2} \left( \frac{D}{\pi} \right)^{1/2} \sum_{k=0}^{-\infty} \left\{ \int_{\beta-T+kT}^{\alpha+kT} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{3/2}} + \int_{\alpha-T+kT}^{\beta-T+kT} \frac{\psi(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{3/2}} \right\} \quad (3.4)$$

$$\frac{dS_2(t)}{dt} = \frac{1}{2} \left( \frac{D}{\pi} \right)^{1/2} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\psi(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{3/2}} + \frac{dS_1(t)}{dt} \quad (3.5)$$

Используя равенство (1.8), легко убедиться, что знакочередующиеся ряды (3.4) и (3.5) сходятся при  $\alpha < t \leq \beta$  и  $\beta < t \leq \gamma$  соответственно, причем сумма ряда (3.4) положительна, а ряда (3.5) отрицательна. Отсюда следует, что неравенства (2.10) будут выполнены, если наложить на функции  $\psi(t)$  и  $\varphi(t)$  условия



$$\frac{\psi(\alpha)}{\sqrt{t-\alpha}} + \int_{\alpha}^t \frac{\psi'(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}} < 0 \quad (\alpha \leq t \leq \beta) \quad (3.6)$$

$$\frac{\varphi(\beta)}{\sqrt{t-\beta}} + \int_{\beta}^t \frac{\varphi'(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}} > 0 \quad (\beta \leq t \leq \gamma) \quad (3.7)$$

Фиг. 3

Остановимся на неравенстве (3.6).

При  $t$ , близких к  $\alpha$ , оно выполнено. Пусть интеграл, входящий в выражение (3.6), несобственный. Так как  $\psi'(t) > 0$ , он не может быть расходящимся. Следовательно, в окрестности точки  $t = \beta$  функция  $\psi(t)$  в простейшем случае должна иметь вид

$$\psi(t) = e + d(\beta - t)^q \quad (1/2 < q < 1, e < 0, d < 0) \quad (3.8)$$

и условие  $F_1'(u_+) = \infty$  (фиг. 2) в силу (3.8) и (2.12) выполнено.

Аналогично, рассматривая неравенство (3.7), получим, что вблизи точки  $t = \gamma$  функция  $\varphi(t)$  в простейшем случае описывается зависимостью

$$\varphi(t) = a + b(\gamma - t)^s \quad (1/2 < s < 1, a > 0, b > 0) \quad (3.9)$$

4. Рассмотрим в качестве примера функции  $\varphi(t)$  и  $\psi(t)$  вида

$$\varphi(t) = a + b(\gamma - t)^s + g(t - \beta)^{1/2}, \quad \psi(t) = e + d(\beta - t)^q + f(t - \alpha)^{1/2} \quad (4.1)$$

Здесь  $g < 0$ ,  $f > 0$ , а остальные константы ограничены теми же неравенствами, как и в формулах (3.8) и (3.9). На фиг. 3 представлен вид функции  $\chi(t)$ , даваемой формулами (4.1).

Если выполнены неравенства

$$a + g\sqrt{pT} > 0, \quad e + f\sqrt{(1-p)T} < 0 \quad (4.2)$$

то при этом  $\varphi(t) > 0$ ,  $\psi(t) < 0$ ; как легко убедиться, рассматривая выражения (4.1) производные  $\varphi'(t) < 0$ ,  $\psi'(t) > 0$ . Условия (3.6) и (3.7) выполнены, если

$$e - \frac{d}{2q-1} [(1-p)T]^q + \frac{\pi}{2} f\sqrt{(1-p)T} < 0 \quad (4.3)$$

$$a - \frac{b}{2s-1} (pT)^s + \frac{\pi}{2} g\sqrt{pT} > 0$$

Наконец, соотношение (1.8) показывает, что константы, входящие в выражения (4.1), связаны равенством

$$apT + \frac{b}{s+1} (pT)^{s+1} + \frac{2}{3} g (pT)^{3/2} + e (1-p) T + \frac{d}{q+1} [(1-p) T]^{q+1} + \frac{2}{3} f [(1-p) T]^{3/2} = 0 \quad (4.4)$$

Формулы (3.2) и (3.3) показывают, что при  $t$ , близких к  $\alpha$ , и  $t$ , близких к  $\beta$ , имеют место асимптотические разложения

$$\begin{aligned} \frac{du_1(0, t)}{dt} &= - \left( \frac{D}{\pi} \right)^{1/2} \frac{[\psi(\alpha) - \varphi(\alpha)]}{\sqrt{t - \alpha}} + \dots, \\ \frac{du_2(0, t)}{dt} &= - \left( \frac{D}{\pi} \right)^{1/2} \frac{[\varphi(\beta) - \psi(\beta)]}{\sqrt{t - \beta}} + \dots, \end{aligned} \quad (4.5)$$

соответственно. Обращаясь к формулам (2.12) и (4.5), находим

$$\begin{aligned} \frac{dF_1}{du} &= - \frac{Gl f}{2} \left( \frac{\pi}{D} \right)^{1/2} [\psi(\alpha) - \varphi(\alpha)]^{-1} \quad \text{при } u = u_- \\ \frac{dF_2}{du} &= - \frac{Gl g}{2} \left( \frac{\pi}{D} \right)^{1/2} [\varphi(\beta) - \psi(\beta)]^{-1} \quad \text{при } u = u_+ \end{aligned}$$

Из (3.2) и (3.3) ясно, что при значениях  $t$ , близких к  $\beta$ , производная  $du_1(0, t) / dt$  конечна; при  $t$ , близких к  $\gamma$ , производная  $du_2(0, t) / dt$  конечна. Положим

$$u = u_+ + C_1 (t - \beta) \quad (C_1 > 0), \quad u = u_- - C_2 (t - \gamma) \quad (C_2 > 0) \quad (4.6)$$

Тогда, используя (2.12), в окрестности значения  $u = u_+$  найдем

$$\frac{dF_1}{du} = - \frac{Gldq}{C_1} \left( \frac{u_+ - u}{C_1} \right)^{q-1}$$

а в окрестности значения  $u = u_-$  найдем

$$\frac{dF_2}{du} = \frac{Glbs}{C_2} \left( \frac{u - u_-}{C_2} \right)^{s-1}$$

На фиг. 4 представлен вид функции  $u(0, t)$ , получаемой в результате решения рассматриваемой задачи. Ясно, что колебания имеют релаксационный характер.

Неравенства (2.15) и (2.16) будут в этом случае выполнены, если имеют место соответственно более сильные неравенства

$$\begin{aligned} & f \left[ c_0 + 2 \left( \frac{DT}{\pi} \right)^{1/2} \{ [a + b (pT)^s] (-\sqrt{1+p} + 1 - \sqrt{p}) - \right. \\ & \quad \left. - (e + f \sqrt{(1-p)T}) (1 - \sqrt{p}) \} \right] > \\ & > - 2 \left( \frac{D}{\pi} \right)^{1/2} \left\{ e + d [(1-p) T]^q + \frac{c^0 - c_0}{l} \right\} \{ -a - g \sqrt{pT} + e + d [(1-p) T]^q \} \\ & - g \left[ c_0 + 2 \left( \frac{DT}{\pi} \right)^{1/2} \{ (-e - d [(1-p) T]^q) (\sqrt{2-p} - 1 + \sqrt{1-p}) + \right. \\ & \quad \left. + (-a - g \sqrt{pT}) (1 - \sqrt{1-p}) \} \right] < 2 \left( \frac{D}{\pi} \right)^{1/2} \left[ a + b (pT)^s + \right. \\ & \quad \left. + \frac{c^0 - c_0}{l} \right] [a + b (pT)^s - e - f \sqrt{(1-p) T}] \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\quad (4.8)$$

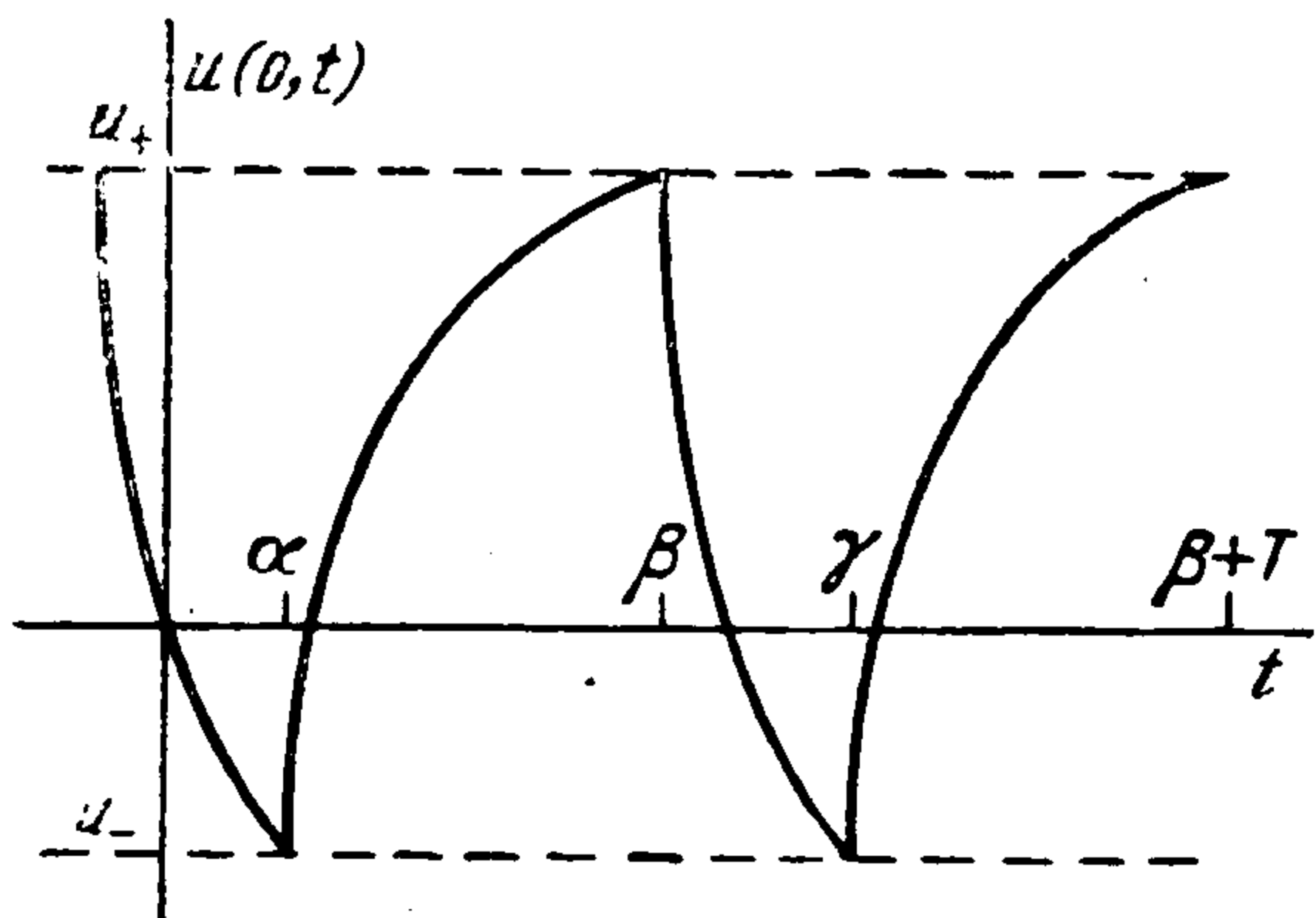
Отметим, что если положить в формулах (4.1)  $g = f = 0$ , сведя, таким образом, эти выражения к (3.9) и (3.8) соответственно, то в точках  $S$ -образной функции (фиг. 2), характеризующих положение системы после скачка, будет  $F_1'(u_-) = F_2'(u_+) = 0$ , что не согласуется с экспериментом.

5. Предположим теперь, что вблизи точек  $u = u_+$  и  $u = u_-$  функции  $F_1$  и  $F_2$  имеют соответственно вид:

$$F_1 = A + BV\sqrt{u_+ - u}, \quad F_2 = C + EV\sqrt{u - u_-}$$

$$(A < 0, \quad B < 0, \quad C > 0, \quad E > 0)$$

Легко видеть, что развитая в предыдущих параграфах теория для этого случая неприемлема. Обратившись к формулам (2.12), видим, что, если  $u_1'(0, \beta) = 0$  при  $t = \beta$ , а  $\psi'(\beta)$  конечно, то условие  $F_1'(u_+) = \infty$  выполнено;



Фиг. 4

аналогично при  $t = \gamma$  должно быть  $u_2'(0, \gamma) = 0$ , а  $\varphi'(\gamma)$  конечно. При  $t$ , близких к  $\alpha$ , и  $t$ , близких к  $\beta$ , должны иметь место формулы (4.5) соответственно.

Таким образом, приходим к следующей задаче: отыскать в полубесконечной области  $0 < x < \infty$  периодическую функцию  $u(x, t)$  по известному граничному значению

$$u(0, t) = u_0(t) \quad (5.1)$$

Здесь  $u_0(t)$  — функция вида, представленного на фиг. 4, но с производной, равной нулю при значениях

$$t = \alpha + kT - 0, \quad t = \beta + kT - 0$$

Решение уравнения (0.1) с условием (5.1) и без начального условия описывается формулой Дюгамеля

$$u(x, t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty u_0\left(t - \frac{x}{4D\xi}\right) \exp\left(-\xi^2\right) d\xi \quad (5.2)$$

Дифференцируя (5.2) по  $x$  и полагая в полученном соотношении  $x = 0$ , найдем выражение для функции

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = -\frac{1}{(\pi D)^{1/2}} \int_{-\infty}^t \frac{u_0'(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \quad (5.3)$$

Пусть теперь, как и в п. 1,

$$u_0(t) = \begin{cases} v(t), & \alpha + kT \leq t \leq \beta + kT \\ w(t), & \beta + kT \leq t \leq \gamma + kT \end{cases} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (5.4)$$

Тогда формула (5.3) даст, аналогично (2.2) — (2.5),

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = -\frac{1}{(\pi D)^{1/2}} \int_\alpha^t \frac{v'(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}} + \Phi_1(t) \quad (5.5)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} \Big|_{x=0} = -\frac{1}{(\pi D)^{1/2}} \int_\beta^t \frac{w'(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}} + \Phi_2(t) \quad (5.6)$$

В равенствах (5.5) и (5.6)

$$\Phi_1(t) = -\frac{1}{(\pi D)^{1/2}} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \int_{\beta-T+kT}^{\alpha+kT} \frac{w'(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}} + \int_{\alpha-T+kT}^{\beta-T+kT} \frac{v'(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \right\} \quad (5.7)$$

$$\Phi_2(t) = -\frac{1}{(\pi D)^{1/2}} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{v'(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}} + \Phi_1(t)$$

Из формул (5.5) — (5.7) видно, что условие, аналогичное (1.8), выполняется автоматически, так что знакочередующиеся ряды (5.5)—(5.7) сходятся.

Для того чтобы обратная задача, даваемая формулами (5.5)—(5.7), описывала автоколебательный процесс рассматриваемого типа, достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} \Big|_{x=0} < 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x} \Big|_{x=0} > 0, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} \Big|_{x=0} \right) > 0, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x} \Big|_{x=0} \right) < 0 \quad (5.8)$$

а также (если имеют место отмеченные в п. 2 предположения) неравенства (2.15) и (2.16).

В заключение приношу благодарность А. Я. Гохштейну за ряд полезных замечаний.

Поступила 19 IV 1964

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В и т т А. А. Распределенные автоколебательные системы. Ж. техн. физ., 1934, т. IV, вып. 1.
2. В и т т А. А. К теории скрипичной струны. Ж. техн. физ., 1936, т. VI, вып. 9.
3. В и т т А. А. Дополнение и поправка к моей работе «Колебания скрипичной струны». Ж. техн. физ., 1937, т. VII, вып. 5.
4. Н е й м а р к Ю. И., К у б л а н о в И. М. Исследование периодических режимов и их устойчивости для простейшей распределенной системы релейного регулирования температуры. Автоматика и телемеханика, 1953, т. XIV, вып. 1.
5. А н д р о н о в А. А., А р о н о в и ч Г. В. К теории гидравлического тарана. Инж. сб., 1954, т. XX.
6. Ц ы н к о в а О. Э. Об автоколебаниях в сверхзвуковом диффузоре. Изв. АН СССР, ОТН, 1959, № 5.
7. К о ч и н а Н. Н. Об автоколебаниях жидкости большой плотности в трубах. ПММ, 1963, т. XXVII, вып. 4.
8. Г о х ш т е й н А. Я. К теории автоколебаний в свободных от пассивации электрохимических системах с падающей характеристикой. Докл. АН СССР, 1961, т. 140, № 5.
9. Г о х ш т е й н А. Я., Ф р у м к и н А. Н. Автоколебания при восстановлении аниона  $S_2O_8^{2-}$  на ртути. Докл. АН СССР, 1960, т. 132, № 2.
10. Г о х ш т е й н А. Я. О частоте автоколебаний в электролитических системах. Докл. АН СССР, 1963, т. 148, № 1.
11. Г о х ш т е й н А. Я. Об устойчивости стационарных состояний электролитических систем. Докл. АН СССР, 1963, т. 149, № 4.
12. Ф р у м к и н А. Н., Б а г о ц к и й В. С., И о ф а З. А., К а б а н о в Б. Н. Кинетика электродных процессов. Учебное пособие для госуниверситетов. Изд. МГУ, 1952.
13. Т и х о н о в А. Н., С а м а р с к и й А. А. Уравнения математической физики, Гостехиздат, 1953.
14. К о ч и н а Н. Н. О периодическом решении уравнения Бюргерса. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 6.