Прикладная математика и механика. Том 28, 1964

ОБ ОДНОМ ВИДЕ СТАЦИОНАРНОГО ДВИЖЕНИЯ В ГИДРОДИНАМИКЕ

Ю. Б. Пономаренко
(Москва)

Найдены характеристики установившейся волны, возникающей в неустойчивой системе, которая описывается одномерными гидродинамическими уравнениями.

Показано, что амплитуда n-й гармоники волны при слабой надкритичности $\lambda-\lambda_*$ пропорциональна $(\lambda-\lambda_*)^{1/2n}$.

Уравнения гидродинамики обычно имеют равновесное (не зависящие от времени) решение. Устойчивому равновесному решению соответствует ламинарное движение среды.

Равновесное решение зависит от внешних параметров; при переходе параметров через критические значения равновесное решение становится неустойчивым. Нелинейные эффекты (взаимодействие нарастающих в неустойчивой системе волн с различными волновыми числами) будут ограничивать рост флуктуаций; в результате система придет в стационарное состояние. В таком стационарном состоянии либо имеется непрерывный спектр волн (турбулентное движение) [1,2], либо существует одна волна с определенной частотой и волновым вектором (например, страты [3] в газовом разряде и «диффузионные» колебания в сильном магнитном поле [4]).

Ниже рассматривается второй случай. Вычисляется стационарное решение; устойчивость стационарного решения не рассматривается. Предполагается, что исходные уравнения достаточно хорошо описывают систему, а из эксперимента известно, что стационарное состояние системы относится ко второму виду.

1. Пусть неизвестные функции $X^j(t, x)$ удовлетворяют автономным (не содержащим явно t и x) уравнениям

$$F_0^i\left(X^j, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) = 0 \qquad (i, j = 1, \ldots n) \tag{1.1}$$

В уравнения (1.1) входят внешние параметры, совокупность которых будем обозначать через λ.

Равновесное решение X^j, не зависящее от t и x, находится из уравнений

$$F^i \equiv F^i(X^i, 0, 0) = 0 \tag{1.2}$$

При исследовании устойчивости равновесного состояния полагаем

$$X^j = X^j + X_1 e^{i\theta}, \qquad \theta = \omega t - kx$$

После линеаризации уравнения (1) относительно возмущений X_1 получим систему алгебраических уравнений

$$a_j^i X_1^j = 0 \tag{1.3}$$

Здесь и всюду в дальнейшем по двум одинаковым индексам, один из которых стоит внизу, а другой вверху, предполагается суммирование от 1 до n. В уравнениях (1.3) коэффициенты a будут известными функциями ω, k, λ, $X(\lambda)$.

Нетривиальные решения уравнений существуют, если выполняется дисперсионное соотношение

$$D \equiv |a_j^i| = 0 \tag{1.4}$$

Из дисперсионного соотношения можно определить комплексную частоту $\omega = \Omega - i\gamma$ каждой ветви как функцию внешних параметров и (реального) волнового числа k. Предположим, что мы смогли это сделать и установили, что при некоторых критических значениях внешних параметров λ_* максимальный (как функция волнового числа k) инкремент одной из ветвей равен нулю, а инкременты других ветвей всюду отрицательны. Если слегка изменить в определенном направлении какой-нибудь внешний параметр, то инкремент «критической» ветви станет положительным в некотором интервале значений k, а инкременты других ветвей по-прежнему останутся отрицательными (в дальнейшем корень дисперсионного соотношения $D(\omega) = 0$, характеризующий «критическую» ветвь, обозначаем через $\omega_* = \Omega_* - i\gamma_*$). Естественно ожидать, что стационарная волна есть результат развития колебаний неустойчивой ветви.

Предположим, что при плавном увеличении надкритичности $\lambda - \lambda_*$ амплитуда установившейся волны плавно нарастает от нуля (такой характер возникновения волны при изменении параметра называется «мягким»). Тогда при слабой надкритичности многие свойства волны должны определяться свойствами неустойчивой ветви; в частности, волновое число и частота волны должны быть близки к величинам k_0, ω_0, определяемым в линейной теории из равенств

$$\partial\gamma_* / \partial k = 0, \quad \omega_0 = \Omega_*(k_0) \tag{1.5}$$

2. Предположив, что максимальный инкремент γ_0 неустойчивой ветви положителен, но достаточно мал (т. е. надкритичность слаба), приступим к вычислению величин, характеризующих установившуюся волну.

Установившееся решение, очевидно, имеет вид

$$X^j = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} X_\nu^j e^{i\nu\theta}, \qquad \theta = \omega t - kx \tag{2.1}$$

причем величины $X_{-\nu}$ и X_ν являются комплексно-сопряженными: $X_{-\nu}^j = (X_\nu^j)^*$; это следует из вещественности величин X^j.

Подставив (2.1) в (1.1), умножим результат на $e^{-i\mu\theta}$ и проинтегрируем по θ от 0 до 2π. В результате получим

$$\Phi_\mu^i \equiv \int_0^{2\pi} F^i e^{-i\mu\theta} \frac{d\theta}{2\pi} = 0 \tag{2.2}$$

Уравнения (2.2) представляют собой бесконечную систему алгебраических уравнений для бесконечного числа неизвестных X_ν. Разрешить эту систему в общем случае невозможно; даже интегрирование в (2.2) часто нельзя выполнить в явном виде.

Теперь воспользуемся тем обстоятельством, что при слабой надкритичности амплитуда волны мала, если колебания возникают «мягко». Тогда интегралы в (2.2) можно вычислить, если записать выражения (2.1) в виде $X^j = X_0^j + X_\sim^j$ и затем разложить функции F по малым величинам $X_\sim$ (необходимо подчеркнуть, что $X_0 \neq X$).

Для нахождения первых, самых больших, гармоник X_1 достаточно вычислить только функции Φ_μ при $\mu = 0, 1, 2$, удерживая лишь квадратичные и кубичные по $X_\sim$ члены и учитывая в выражениях для $X_\sim$ лишь первые и вторые гармоники

$$\Phi_0^i \equiv F_0^i(X_0^j) + c_{jk}^i X_1^j X_{-1}^k = 0 \tag{2.3}$$

$$\Phi_1^i \equiv a_j^i X_1^j + d_{sl}^j X_2^s X_{-1}^l + b_{jkl}^i X_1^j X_1^k X_{-1}^l = 0 \tag{2.4}$$

$$\Phi_2^i \equiv f_j^i X_2^j + g_{jk}^i X_1^j X_1^k = 0 \tag{2.5}$$

В этих уравнениях коэффициенты $a, b, \ldots, g$ — известные функции ω, k, X_0; тензоры b, g можно считать симметричными по j, k.

Отметим, что сумма нижних индексов величин X, входящих в любое слагаемое выражения Φ_μ^i, всегда равна μ.

Записав $X_0^j = \mathrm{X}^j + \delta X^j$ и учитывая, что $F_0^i(\mathrm{X}^j) = 0$, получим из уравнения (2.3)

$$(\partial F_0^i / \partial X_0^j)_{\mathrm{X}}\, \delta X^j + c_{jk}^i X_1^j X_{-1}^k = 0 \tag{2.6}$$

Из последнего выражения видно, что $\delta X \sim (X_\sim)^2$, поэтому в величинах $b, \ldots, g$ нужно положить $X_0 = \mathrm{X}$, чтобы не превысить точность уравнений (2.3) — (2.5); по этой же причине в разложении величин a по δX нужно удержать лишь линейные члены

$$a_j^i(X_0^m) = a_j^i(\mathrm{X}^m) + (\partial a_j^i / \partial X_0^m)_{\mathrm{X}}\, \delta X^m \tag{2.7}$$

По известным правилам линейной алгебры разрешим систему уравнений (2.5) относительно X_2 и систему (2.6) относительно δX

$$X_2^s = G_{jk}^s X_1^j X_1^k, \qquad \delta X^m = C_{kl}^m X_1^k X_{-1}^l \tag{2.8}$$

Подставив выражения (2.7) — (2.8) в уравнение (2.4), получим

$$\Phi_1^i \equiv X_1^j (a_j^i + P_{jkl}^i X_1^k X_{-1}^l) = 0 \tag{2.9}$$

где

$$P_{jkl}^i = (\partial a_j^i / \partial X_0^m)_{\mathrm{X}}\, C_{kl}^m + d_{sl}^i G_{jk}^s + b_{jkl}^i$$

Система линейных однородных относительно X_1^j уравнений (2.9) имеет нетривиальное решение, если

$$\Delta \equiv | a_j^i + P_{jkl}^i X_1^k X_{-1}^l | = 0 \tag{2.10}$$

При выполнении нелинейного соотношения (2.10) решение уравнения (2.9) есть

$$X_1^j = Q \Delta_p^j \tag{2.11}$$

Здесь Q — константа пропорциональности, а Δ_p^j — алгебраическое дополнение элемента A_j^p, стоящего в определителе Δ на пересечении j-го столбца и p-й строки (номер строки p произволен).

Теперь заметим, что, согласно предположению о «мягком» возбуждении, $X_1^j \to 0$ при $\lambda \to \lambda_*$. Согласно (2.10), определитель $\Delta \to D$ при $X_1 \to 0$, следовательно, $\Delta_p^j \to D_p^j \neq 0$, поэтому из выражения (2.11) получаем, что $Q \to 0$ при $\lambda \to \lambda_*$.

В связи с этим квадратичными членами в выражении для Δp^j пренебрегаем, и равенства (2.11) принимают вид

$$X_1^j = QD_p^j \tag{2.12}$$

Из последнего равенства видно, что в стационарной волне при слабой надкритичности фазовые соотношения между величинами X_1^j определяются линейной теорией; величина Q есть не что иное, как нормальная координата колебаний неустойчивой ветви.

Для определения Q подставим выражения (2.12) для X_1 в нелинейное дисперсионное соотношение (2.10) и разложим Δ в ряд по малой величине $q = QQ^*$, удерживая лишь линейный по q член (удерживание высших степеней будет превышением точности исходных уравнений (2.3) — (2.5))

$$\Delta \equiv D + Pq = 0, \qquad P = D_i^j P_{jkl}^i D_p^k (D_p^l)^*, \qquad q = QQ^* \tag{2.13}$$

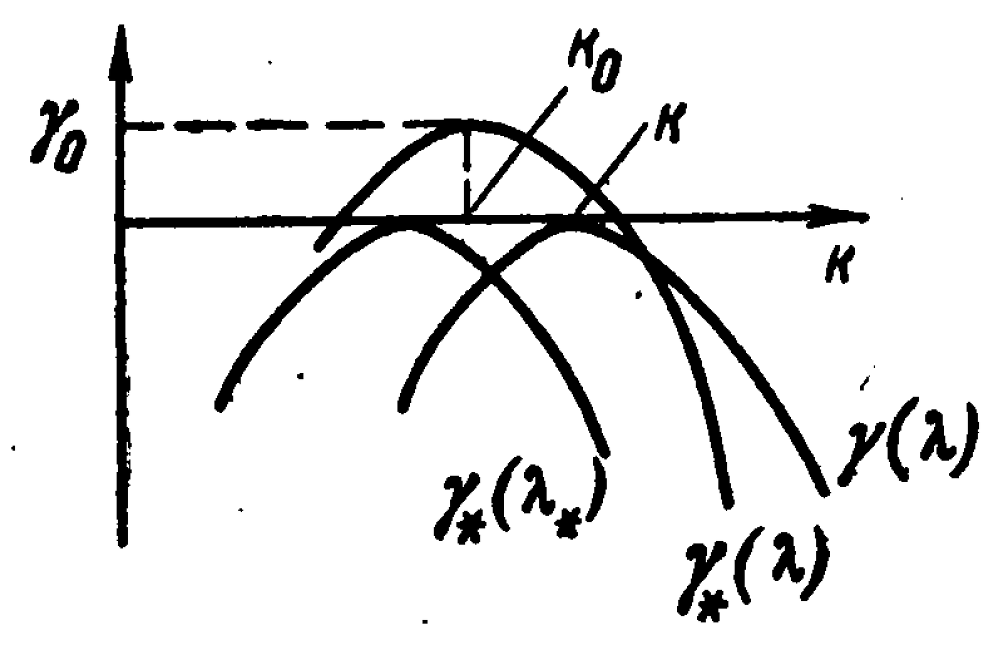
Из уравнения (2.13) определим комплексную частоту ω как функцию волнового числа k и малого положительного параметра q; решение ищется в виде $\omega = \omega_* + \delta\omega$, где ω_* определяется в линейной теории из равенства $D(\omega_*) = 0$, а $\delta\omega \sim q$. Из равенства (2.13) получаем

$$\delta\omega = -qS, \qquad S = \left(\frac{P}{\partial D / \partial\omega}\right)_{\omega_*} \tag{2.14}$$

и выражение для частоты принимает вид

$$\omega = (\Omega_* - qS^{(r)}) - i(\gamma_* + qS^{(i)}) \tag{2.15}$$

Здесь и в дальнейшем верхние индексы в скобках (r) и (i) означают действительную и мнимую части соответствующей величины.



Фиг. 1

Теперь предположим, что в системе устанавливается волна такой амплитуды, что максимум нелинейного инкремента $\gamma \equiv \gamma_* + qS^{(i)}$ как функции волнового числа k обращается в нуль (фиг. 1); значение k, при котором $\gamma = 0$, и будет волновым числом установившейся волны, а соответствующее значение $\omega(k)$ будет частотой волны. Это предположение возникает в связи с тем, что значение параметра q, при котором максимум нелинейного инкремента равен нулю, является единственным качественно выделенным среди других значений q.

Согласно сделанному предположению, величины q и k установившейся волны должны удовлетворять уравнениям

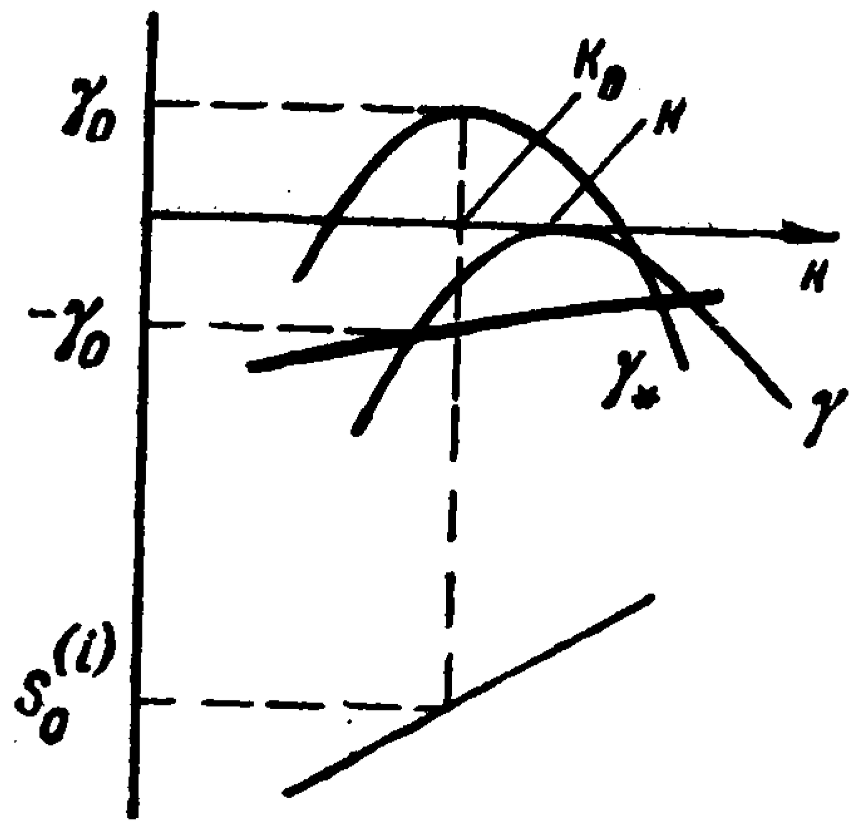
$$\gamma \equiv \gamma_* + qS^{(i)} = 0, \qquad \partial\gamma / \partial k = 0 \tag{2.16}$$

Волновое число ищется в виде $k = k_0 + \delta k$, где $\delta k \sim q$, а величина k_0 определяется в линейной теории из равенства $\partial\gamma_* / \partial k = 0$; тогда равенства (2.16) примут вид

$$\gamma_0 + qS_0^{(i)} = 0, \qquad \gamma_0'' \delta k + q(S_0')^{(i)} = 0 \tag{2.17}$$

Здесь штрих означает дифференцирование по k, а индекс 0 показывает, что соответствующая величина берется при $k = k_0$.

Из первого уравнения находим: $q = -\gamma_0 / S_0^{(i)}$. Так как $q \sim \gamma_0$, то в выражении (2.14) для S нужно положить: $\omega_* (k_0) = \Omega_* (k_0) = \omega_0$ (удержание в выражении для S членов $\sim \gamma_0$ будет превышением точности). Так как $\gamma_0 > 0$ и, очевидно, должно быть $q > 0$, то решение существует, если $S_0^{(i)} < 0$; последнее неравенство есть достаточное условие «мягкого» возникновения колебаний.



Фиг. 2

Отклонение δk определяется вторым равенством (2.17), а частота ω — равенством (2.15); таким образом, можем написать

$$q = -\gamma_0 / S_0^{(i)}, \qquad \text{если } S_0^{(i)} < 0 \tag{2.18}$$

$$\delta k = -q (S_0')^{(i)} / \gamma_0'' \tag{2.19}$$

$$\omega = \omega_0 + (\partial \Omega_* / \partial k)_0 \, \delta k - q S_0^{(r)} \tag{2.20}$$

Выражения для q и δk получились такими, как если бы при выполнении условия $0 < \gamma_0 \ll -S_0^{(i)}$ линейный инкремент изображался параболой $\gamma_* = \gamma_0 + {}^1/_2 \gamma_0'' (k - k_0)^2$, а функция $S^{(i)}$ — прямой $S^{(i)} = S_0^{(i)} + (S_0')^{(i)} (k - k_0)$ (фиг. 2; прямая $qS^{(i)}$ изображена жирной линией)[1].

3. Первые гармоники X_1 определяются формулой (2.12), в которой алгебраические дополнения D_p^j берутся при $\omega = \omega_0$, $k = k_0$, а величина Q определяется равенством (2.18) (равенство 2.18 определяет лишь модуль комплексной амплитуды, и поэтому стационарное решение оказывается определенным с точностью до произвольной фазы).

Если первые гармоники известны, то вторые гармоники находятся из линейных относительно X_2 уравнений (2.5) и имеют вид: $X_2^j = H_2^j Q^2$, где величины H_2 выражаются через коэффициенты f, g в выражении для Φ_2 и уже известные величины $H_1^j \equiv D_p^j$ (согласно выражениям (2.8), (2.12), $H_2^s = G_{jk}^s D_p^j D_p^k$).

Аналогичным образом можно находить высшие гармоники, если известны все гармоники низших порядков. Например, третьи гармоники X_3 выражаются через X_1, X_2 из уравнений $\Phi_3 = 0$, в которые входят слагаемые вида X_3, $X_2 X_1$, $X_1 X_1 X_1$ (эти слагаемые появляются соответственно из членов порядка $X_\sim$, $X_\sim^2$, $X_\sim^3$ в разложении исходных уравнений по величинам $X_\sim$). Разрешив уравнения $\Phi_3 = 0$ относительно X_3 получим $X_3^j \doteq H_3^j Q^3$, где величины H_3 выражаются через ранее найденные величины H_1, H_2 и коэффициенты в выражениях для Φ_3.

Вообще, будем определять гармоники X_ν из уравнений

$$\Phi_\nu^i \equiv (h_\nu)_j^i X_\nu^j + \sum (h_{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_s})_{j_1 j_2 \ldots j_s}^i X_{\nu_1}^{j_1} X_{\nu_2}^{j_2} \ldots X_{\nu_s}^{j_s} = 0 \tag{3.1}$$

Здесь сумма распространяется на всевозможные комбинации чисел ν_i, удовлетворяющих условиям: $\nu_1 + \ldots + \nu_s = \nu$, $1 \leqslant \nu_1, \ldots, \nu_s < \nu$; коэффициенты h берутся при $k = k_0$, $\omega = \omega_0$, $X_0 = X$. Отметим, что в уравнениях (3.1) содержатся слагаемые вида $(X_1)_*^\nu$, возникающие из членов

[1] Если неустойчивая ветвь апериодическая, т. е. $\omega_0 = 0$ и, кроме того, $(\partial \Omega_* / \partial K) = S_0^{(r)} = 0$, то в системе устанавливается не зависящее от времени движение.

разложения порядка $(X_\sim)^\nu$; члены разложения по $X_\sim$ более высокого порядка не дают вклада в уравнения (3.1).

Выше отмечено, что $X_\nu^j = Q^\nu H_\nu^j$, если $\nu \leqslant 3$. Предположим, что это соотношение справедливо для всех значений ν, включая $\nu = \mu - 1$, и коэффициенты $H_1, \ldots, H_{\mu-1}$ уже найдены; тогда при помощи уравнения (3.1) нетрудно убедиться (учитывая условие $\nu_1 + \ldots + \nu_s = \nu$) что оно справедливо и для $\nu = \mu$ (следовательно, для всех ν), причем коэффициенты H_μ выражаются через ранее найденные коэффициенты $H_1, \ldots, H_{\mu-1}$ и величины h в уравнениях (3.1) при $\nu = \mu$. С помощью оценки $|X_\nu| \sim |Q|^{|\nu|}$ можно установить, что отношение опущенных членов в выражениях для Φ к оставленным имеет порядок малости q или более высокий относительно q; поэтому можем написать

$$X_\nu^j = Q^\nu [H_\nu^j + O(q)], \qquad \nu > 0; \qquad X_{-\nu}^j = (X_\nu^j)^* \tag{3.2}$$

Таким образом, ν-е гармоники установившейся волны пропорциональны $\gamma_0^{1/2\nu}$.

4. Выразим теперь в явном виде амплитуды гармоник установившейся волны через надкритичность $\varepsilon = \lambda - \lambda_*$ (здесь λ_* — некоторая фиксированная точка поверхности критических параметров; эта поверхность задается в пространстве параметров уравнением $\gamma_0(\lambda) = 0$).

Функции F в (1.1) — аналитические функции своих аргументов и внешних параметров λ, поэтому величины X, γ_0, k_0, ω_0, а следовательно, и все величины, характеризующие волну, будут аналитическими функциями λ. Для достаточно слабой надкритичности ε можем поэтому написать (учитывая, что $\gamma_0 = 0$ при $\lambda = \lambda_*$):

$$\gamma_0 = (d\gamma_0 / d\lambda)_* \varepsilon \tag{4.1}$$

Это выражение [1] дает возможность определить, как нужно изменить внешние параметры, чтобы было $\gamma_0 > 0$.

Подставим выражение (4.1) для γ_0 в формулы (2.18), (3.2) для Q, X_ν, положив $\lambda = \lambda_*$ в выражениях для S, H (предполагается, что величины $\omega_0(\lambda)$, $k_0(\lambda)$, X (λ) уже подставлены в выражения для γ_0, S, H); в результате найдем [2] (при условии $S_0^{(i)}(\lambda_*) < 0$), что $X_\nu \sim \varepsilon^{1/2\nu}$.

В выражении для частоты следует произвести замену $\omega_0(\lambda) = \omega_0(\lambda_*) + (d\omega_0 / d\lambda)_* \varepsilon$; изменение частоты $(d\omega_0 / d\lambda)_* \varepsilon$ не связано с наличием колебаний и имеет место при отклонении ε в любом направлении. Аналогичная замена производится для $k_0(\lambda)$.

Отсюда, учитывая вещественность γ, найдем

$$D^{(r)} \frac{\partial D^{(r)}}{\partial \omega} + D^{(i)} \frac{\partial D^{(i)}}{\partial \omega} = 0, \qquad \gamma = \left| \frac{\partial D}{\partial \omega} \right|^{-2} \begin{vmatrix} \partial D^{(r)} / \partial \omega & \partial D^{(i)} / \partial \omega \\ D^{(r)} & D^{(i)} \end{vmatrix} \tag{5.1}$$

[1] Величина ε понимается как вектор, а производные по λ — как тензоры; в подробной записи равенство (4.1), например, имеет вид

$$\gamma_0 = \left(\frac{\partial \gamma_0}{\partial \lambda_i}\right)_* \varepsilon_i + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 \gamma_0}{d\lambda_i d\lambda_j}\right)_* \varepsilon_i \varepsilon_j + \ldots$$

[2] Из соотношения $X_\nu \sim (\sqrt{\varepsilon})^\nu$ следует, что можно искать стационарное решение непосредственно в виде рядов по $\sqrt{\varepsilon}$.

5. Часто уравнение $D(\omega) = 0$ трудно решить, и приходится находить ω приближенно.

Разложим $D = D^{(r)} + iD^{(i)}$ по малой величине γ и ограничимся линейным членом

$$D(\Omega - i\gamma) \equiv D(\Omega) - i\gamma(\partial D / \partial\omega)_\Omega = 0$$

Первое равенство определяет частоту Ω; подставив найденное значение Ω во второе равенство (5.1), получим[1] γ.

При $\lambda = \lambda_*$ имеем $\gamma_0 = 0$; отсюда и из (5.1) следует, что λ_*, $k_0(\lambda_*)$, $\omega_0(\lambda_*)$ удовлетворяют уравнениям[2]

$$D^{(r)} = 0, \qquad D^{(i)} = 0, \qquad \frac{\partial(D^{(r)}, D^{(i)})}{\partial(\omega, k)} = 0 \tag{5.2}$$

Из (5.1), 5.2) получаем

$$\left(\frac{d\gamma_0}{d\lambda}\right)_* = \left|\frac{\partial D}{\partial\omega}\right|^{-2} \begin{vmatrix} \partial D^{(r)} / \partial\omega & \partial D^{(i)} / \partial\omega \\ D_\lambda^{(r)} & D_\lambda^{(i)} \end{vmatrix} \tag{5.3}$$

где

$$D_\lambda \equiv \left(\frac{\partial}{\partial\lambda} + \frac{dX}{\partial\lambda}\frac{\partial}{\partial X}\right) D$$

теперь из (2.14), (2.18), (4.1), (5.3) имеем

$$q = -\varepsilon \begin{vmatrix} \partial D^{(r)} / \partial\omega & \partial D^{(i)} / \partial\omega \\ D_\lambda^{(r)} & D_\lambda^{(i)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \partial D^{(r)} / \partial\omega & \partial D^{(i)} / \partial\omega \\ P^{(r)} & P^{(i)} \end{vmatrix}^{-1} \tag{5.4}$$

Величины λ, ω, k в правых частях (5.3), (5.4) равны соответственно λ_*, $\omega_0(\lambda_*)$ $k_0(\lambda_*)$ и находятся из уравнений (5.2)[3].

6. Остановимся на вопросе о неоднозначном выборе тензоров b, g, а следовательно, и P (равенства (2.4), (2.5), (2.10)). Неоднозначность связана с тем, что, например, конкретная сумма $g_{jk}^{\ i} X_1^{\ j} X_1^{\ k}$ (которая получается при вычислении $\Phi_2^{\ i}$) однозначно определяет лишь симметричный по j, k тензор g (если к нему добавить произвольный антисимметричный по j, k тензор, то сумма не изменится). Для независимости полученных выше результатов от выбора тензоров b, g, P необходимо, как следует из (2.9), (2.13), (2.14), выполнение равенства $D_i^j D_p^k = D_i^{\ k} D_p^{\ j}$ при условии $\omega = \omega_*$. Равенство действительно выполняется, так как $D(\omega_*) = 0$ и для произвольного определителя D имеет место тождество [6]

$$\begin{vmatrix} D_i^{\ j} & D_i^{\ k} \\ D_p^{\ j} & D_p^{\ k} \end{vmatrix} = DD_{ip}^{jk}(-1)^N$$

где N — четность подстановки $\binom{jk}{ip}$.

7. Условие «мягкого» возбуждения есть $S_0^{(i)}(\lambda_*) < 0$; если оно выполнено, то при достаточно малой надкритичности амплитуда волны мала, а ее форма близка к синусоидальной, так как $X_\nu \sim \varepsilon^{1/2\nu}$.

---

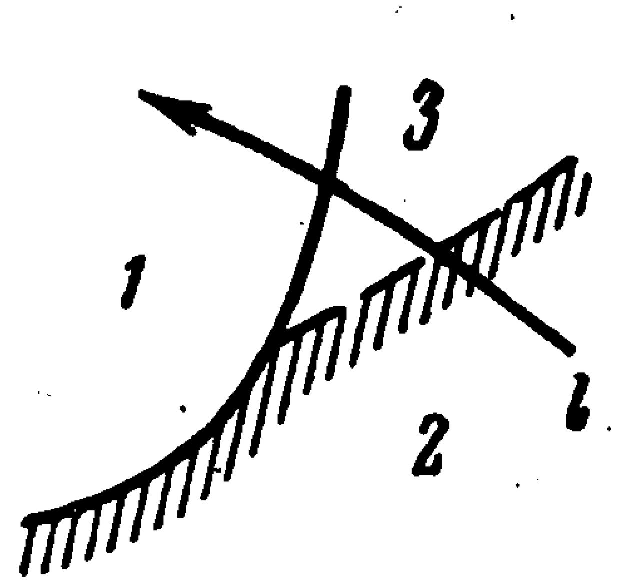
[1] Может случиться, что в выражение для Ω входят члены $\sim \gamma^2$ (например, для обыкновенного уравнения $x'' - hx' + x = 0$ будет $D = 1 - \omega^2 - i\omega h$ и, согласно (5.1), имеем $\Omega^2 = 1 - {}^1/{}_2 h^2$, $\gamma = {}^1/{}_2 h$); их нужно отбросить, чтобы не превысить точность равенств (5.1).

[2] Критические параметры (если они имеются) у других ветвей также находятся из (5.2).

[3] Производные $(d\omega_0 / d\lambda)$, $(dk_0 / d\lambda)$ при $\lambda = \lambda_*$ также выражаются через D (соответствующие выражения не приводятся из-за громоздкости). Если уравнения (1.1) — обыкновенные, то из первого равенства (5.1) получаем с учетом (5.2)

$$(d\omega_0 / d\lambda)_* = |\partial D / \partial\omega|^{-2} [D_\lambda^{(r)} (\partial D^{(r)} / \partial\omega) + D_\lambda^{(i)} (\partial D^{(i)} / \partial\omega)]$$

Если $S_0^{(i)}(\lambda_*) > 0$, то колебания возникают «жестко». Предположим для простоты, что состояние системы определяется двумя параметрами (фиг. 3). Пусть $\gamma_0 = 0$ на кривой AC ($\gamma_0 > 0$ в области I) и $S_0^{(i)} > 0$ на участке BC; если параметры медленно меняются вдоль кривой l, то скачки амплитуды установившейся волны будут происходить при пересечении кривой BC и некоторой кривой (пунктирная линия на фиг. 3) в области, где $\gamma_0 < 0$. Когда точка λ лежит в области 3, а колебания в начальный момент отсутствуют, то их можно возбудить внешним возмущением, если амплитуда возмущения Q превосходит некоторое пороговое значение Q_*. Из равенства $\gamma \equiv \gamma_0 + S^{(i)}q + \ldots = 0$ следует, что $|Q_*|^2 \to -\gamma_0 / S_0^{(i)}$ при $\gamma_0 \to -0$.



Фиг. 3

Скачки амплитуды гистерезисного типа можно пояснить следующим образом. В области *3* инкремент $\gamma_0 < 0$ и поэтому флуктуационные возмущения не нарастают. После перехода в область *I* имеем $\gamma_0 = +0$, однако нелинейный инкремент $\gamma = \gamma_0 + S_0^{(i)}q$ увеличивается с ростом q, так как $S_0^{(i)} > 0$. Рост возмущений могут ограничивать нелинейные члены высоких порядков; в связи с их учетом инкремент γ будет содержать нелинейные относительно q члены, и поэтому могут существовать положительные решения уравнения $\gamma(q) = 0$, даже если $\gamma_0 \leqslant 0$.

При углублении в область $\gamma_0 > 0$ (область *1* на фиг. 3) амплитуда волны возрастает, а колебания принимают релаксационный характер; при этом возможны скачки амплитуды волны гистерезисного типа (примеры таких скачков для систем, описываемых обыкновенными уравнениями, можно найти в [5]). Кроме того, могут возбуждаться другие ветви; из-за нелинейности системы колебания разных ветвей могут синхронизоваться. Некоторые из вновь возбуждаемых ветвей могут иметь отрицательный инкремент γ_0. Такие ветви возбуждаются «жестко», причем «внешним» возмущением для них являются волны, возбужденные при меньшей надкритичности; как обычно, в случае «жесткого» возбуждения, область срыва колебаний таких ветвей должна быть шире области возникновения.

Если колебания возникают мягко, то всегда можно выбрать столь малую надкритичность, что другие ветви не возбудятся (не только в линейном приближении, но и при наличии установившихся колебаний неустойчивой ветви). Этот случай и рассмотрен выше количественно [1].

8. Все полученные выше результаты справедливы для систем с конечным числом степеней свободы, когда уравнения (1.1) — обыкновенные.

Так как уравнения (1.1) вещественны и представляют собой полиномы относительно дифференциальных операторов, то коэффициенты алгебраического относительно $(i\omega)$ уравнения $D = 0$ есть полиномы относительно $(-ik)$ с вещественными коэффициентами; при замене k на $(-k)$ эти полиномы становятся комплексно-сопряженными, и поэтому справедливо соотношение

$$\omega(-k) = -\omega^*(k) \tag{8.1}$$

из которого следует, что инкремент $\gamma(k)$ — четная функция, а частота Ω — нечетная и, вообще говоря, разрывная при $k = 0$ функция [2].

Если $\partial / \partial x \equiv 0$, $k = 0$, то каждой колебательной ветви соответствуют два корня ω_1, ω_2, такие, что $\omega_2 = -\omega_1^*$.

Можно показать, что если условие «мягкого» возбуждения выполнено, то при достаточно малой надкритичности стационарное решение обыкновенных уравнений устойчиво (в частности, устойчиво решение $X = \mathrm{X}$ при $\lambda = \lambda_*$).

[1] Приведенная качественная картина зависимости колебаний от надкритичности хорошо отражает, например, многие черты страт в газовом разряде.

[2] Соотношение (8.1) отражает тот факт, что направление распространения волны определяется физическими свойствами системы, но не выбором направления отсчета координатной оси.

9. В заключение отметим характер учитываемых нелинейных эффектов.

Первое слагаемое в выражении (2.9) для P^i_{jkl} связано с эффектом изменения «фона» под действием колебаний, $X_0 \neq X$ (только этот эффект учитывается в квазилинейном методе); второе слагаемое связано с эффектами когерентности; третье слагаемое описывает «собственное» взаимодействие волны (только этот эффект учитывается в методах Пуанкаре и Ван-дер-Поля в теории колебаний).

В зависимости от вида конкретной системы тот или иной нелинейный эффект может быть преобладающим; в общем случае при нахождении стационарного решения нужно учитывать все три эффекта.

10. Здесь приводятся два примера нахождения стационарных решений.

Рассмотрим уравнение

$$-(x^{\cdot\cdot} + x) + x^{\cdot}(h + ax) + b(x^{\cdot})^2 = 0 \tag{10.1}$$

Равновесное решение есть $X = 0$; после линеаризации относительно возмущений $x_1 e^{i\omega t}$ получаем

$$D \equiv \omega^2 - 1 + i\omega h = 0$$

Отсюда

$$\gamma = {}^1/_2 h, \qquad \Omega = \sqrt{1 - h^2}$$

Критическое значение параметра есть $h = 0$; равновесие неустойчиво при $h > 0$. С точностью до членов $\sim h$ имеем $\Omega = 1$.

Ищем решение в виде

$$x = x_0 + x_{\sim} = x_0 + \sum_\nu x_\nu e^{i\nu\theta} \qquad (\nu \neq 0,\ \theta = \omega t)$$

после подстановки x в уравнение (10.1) получим

$$\Phi_0 \equiv -x_0 + 2b\omega^2 x_1 x_{-1} = 0 \tag{10.2}$$

$$\Phi_1 \equiv (\omega^2 - 1)x_1 + i\omega(hx_1 + ax_2x_{-1} + ax_0x_1) + 4b\omega^2 x_2 x_{-1} = 0 \tag{10.3}$$

$$\Phi_2 \equiv (4\omega^2 - 1)x_2 + i\omega(2hx_2 + ax_1^2) - b\omega^2 x_1^2 = 0 \tag{10.4}$$

В коэффициентах при нелинейных членах можно сразу положить $h = 0$, $\omega = 1$. Из (10.2, 10.4) находим $\delta x = x_0 = 2bx_1x_{-1}$, $x_2 = {}^1/_3(b - ia)x_1^2$; подставив эти выражения в (10.3), получим $\Phi_1 / x_1 \equiv D + q({}^1/_3 a^2 + {}^4/_3 b^2 + iab) = 0$. Отсюда, учитывая, что $\partial D / \partial\omega = 2$ и что $d\Omega / dh = 0$ при $h = 0$, получим $q = -\gamma / S^{(i)} = -h / ab$, $\omega = 1 - {}^1/_6 q(a^2 + b^2)$. Условие существования решения есть $ab < 0$.

Уравнение (10.1) приводится после подстановки $x = \gamma y$ к виду

$$y^{\cdot\cdot} + y = \gamma(2y^{\cdot} + ayy^{\cdot} + b(y^{\cdot})^2) \tag{10.5}$$

Уравнение вида

$$y^{\cdot\cdot} + y = \gamma f(y, y^{\cdot}, \gamma) \tag{10.6}$$

где γ — малый параметр, можно решать методами Ван-дер-Поля и Пуанкаре [7]; полагая $y = K\cos t$, имеет согласно первому методу

$$K^{\cdot} = \gamma A(K), \qquad A(K) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(K\cos u, -K\sin u, 0)\sin u\, du \tag{10.7}$$

Применяя (10.7) к (10.5), получаем

$$K^{\cdot} = \gamma K \tag{10.8}$$

отсюда следует неправильный вывод, что уравнение (10.5) не имеет стационарного решения, кроме равновесного $K = 0$.

Уравнение (10.5) можно решить методом усреднения [5]. Для этого в уравнении (10.5) положим $y^{\cdot} = z$ и введем новые неизвестные $y = r\cos\varphi$, $z = r\sin\varphi$; выразив $r^{\cdot}$, $\varphi^{\cdot}$ через r, φ и взяв отношение $r^{\cdot} / \varphi^{\cdot}$, получим уравнение вида $dr / d\varphi = \gamma f^*(r, \varphi, \gamma)$; решая его методом усреднения, получим во втором по γ приближении $dr / d\varphi = \gamma r(1 + {}^1/_2\gamma abr^2)$.

Стационарное решение существует, если $ab < 0$, и имеет вид $r^2 = -2 / \gamma ab$; если возвратиться к переменной x и записать решение в комплексной форме, то придем к полученному выше выражению для q.

Рассмотренный пример является типичным в теории колебаний. Простейшие системы, в которых существуют близкие к гармоническим стационарные колебания, описываются уравнением [1]

$$x^{\cdot\cdot} = g(x, x^{\cdot}) \tag{10.9}$$

Это уравнение можно привести к виду (10.6). Равновесное решение уравнения (10.9) находится из равенства $g(\chi, 0) = 0$. Будем считать, что $\chi = 0$ (это всегда достигается подстановкой $x = \chi + x^*$). Предполагая амплитуду колебаний малой, разложим (10.9) в ряд по x, $x^{\cdot}$

$$x^{\cdot\cdot} - \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right) x = \left(\frac{\partial g}{\partial x^{\cdot}}\right) x^{\cdot} + \sum_{n>1} \frac{d^n g}{n!}, \qquad d^n g = \left(x \frac{\partial}{\partial x} + x^{\cdot} \frac{\partial}{\partial x^{\cdot}}\right)^n g \tag{10.10}$$

Здесь производные от g берутся при $x = x^{\cdot} = 0$. Возмущения равновесного состояния имеют характер колебаний, если при $\lambda = \lambda_*$ (когда $\partial g / \partial x^{\cdot} \equiv 2\gamma = 0$) выполнено неравенство $\partial g / \partial x \equiv -\omega^2 < 0$. Будем считать, что $\omega = 1$ (это всегда достигается подстановкой $t = \omega^{-1} t^*$); после замены $x = \gamma y$ получим из (10.10) (инкремент γ предполагается малым)

$$y^{\cdot\cdot} + y = \gamma (2y^{\cdot} + g_2) + \sum_{n>2} \gamma^{n-1} g_n, \qquad g_n = \frac{1}{n!}\left(y \frac{\partial}{\partial x} + y^{\cdot} \frac{\partial}{\partial x^{\cdot}}\right) g \tag{10.11}$$

Укороченное уравнение (10.7) для исходного уравнения (10.11) имеет вид (10.8), так как квадратичные члены, входящие в g_2, не дают вклада в выражение $A(K)$.

Чтобы решить уравнение (10.11) методом усреднения, необходимо обращаться ко второму (или более высокому) приближению (уравнение первого приближения совпадает с уравнением, получаемым по методу Ван-дер-Поля, и имеет вид (10.8)).

Когда уравнение (10.9) не меняется при замене x на $(-x)$, т. е. когда $g(-x, -x^{\cdot}) = -g(x, x^{\cdot})$, члены с четными n отсутствуют в разложении (10.10); в этом частном случае можно произвести замену $x = \sqrt{\gamma} y$ и получить

$$y^{\cdot\cdot} + y = \gamma (2y^{\cdot} + g_3) + \sum_{k>1} \gamma^k g_{2k+1} \tag{10.12}$$

с помощью (10.7) находим стационарную амплитуду:

$$K^2 = -16 \left(\frac{\partial^3 g}{\partial x^2 \partial x^{\cdot}} + \frac{\partial^3 g}{\partial (x^{\cdot})^3}\right)^{-1}$$

если выражение в скобках отрицательно.

Уравнения (10.9), не меняющиеся при замене x на $(-x)$, замечательны тем, что их периодические решения (если они существуют) не содержат четных гармоник. Здесь покажем только, что четные гармоники отсутствуют в колебании достаточно малой амплитуды, когда справедливо разложение (10.10) (не содержащее в данном случае слагаемых с четными n). Подставим в (10.10) ряд

$$x = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} x_\mu e^{i\mu\theta}$$

Тогда дифференциал $d^n g$ дает вклад в выражение Φ_ν в виде слагаемых $c x_{\nu_1} \ldots x_{\nu_n}$, где $\nu_1 + \ldots + \nu_n = \nu$, а c — некоторый коэффициент, зависящий от ω, λ, но не от x. Если ν четно, а n — нечетно, то среди чисел $\nu_1, \ldots, \nu_n$ есть по крайней мере одно четное. Поэтому уравнения $\Phi_\nu = 0$ для четных ν будут строго удовлетворяться, если положить все четные гармоники равными нулю.

Рассмотрим уравнение [1]

$$x^{\cdot\cdot} + x = x^{\cdot} (h - x^2) \tag{10.13}$$

---

[1] Подстановкой $x = \sqrt{h}\, x^*$ это уравнение приводится к уравнению Ван-дер-Поля.

Дисперсионное соотношение $D = 0$ рассмотрено в первом примере. Решение ищем в виде

$$x = x_0 + \sum_\nu x_\nu e^{i\nu\theta} \qquad (\nu \neq 0, \ \theta = \omega t)$$

В уравнении (10.13) нет квадратичных по x членов, поэтому из уравнений $\Phi_0 = 0$, $\Phi_2 = 0$ найдем $\delta x = x_0 = 0$, $x_2 = 0$. Для Φ_1 имеем $\Phi_1 \equiv x_1 (D - i\omega q) = 0$ $(q = x_1 x_{-1})$. Отсюда

$$P = (-i\omega)_{h=0} = -i, \qquad S = -{}^1/_2\, i, \qquad q = h, \qquad \omega = 1, \qquad \delta\omega = 0$$

Для вычисления высших гармоник x_ν требуется составить выражение для Φ_ν согласно равенствам (2.2), (3.1). Интегрирование линейных членов выполняется просто.

Нелинейный член предварительно запишем в виде $x^2 x^{\cdot} = {}^1/_3 (x^3)^{\cdot}$; интеграл

$$I_{n\nu} = \int_0^{2\pi} x^n e^{-i\nu\theta} \frac{d\theta}{2\pi} \qquad \left(x = \sum_\mu x_\mu e^{i\mu\theta}\right)$$

вычисляется после предварительного возведения ряда x в степень по правилу бинома

$$I_{n\nu} = n!\Sigma \qquad \Sigma = \sum \frac{(x_{\nu_1})^{n_{\nu_1}}}{(n_{\nu_1})!} \cdots \frac{(x_{\nu_s})^{n_{\nu_s}}}{(n_{\nu_s})!} \tag{10.14}$$

Здесь сумма берется по всем числам ν (среди которых нет одинаковых) и положительным числам n_ν, удовлетворяющим условиям

$$n_{\nu_1} + \ldots + n_{\nu_s} = n, \ \nu_1 n_{\nu_1} + \ldots + \nu_s n_{\nu_s} = n$$

В рассматриваемом случае $n = 3$. Теперь имеем

$$\Phi_\nu \equiv (\omega^2\nu^2 - 1)\, x_\nu + i\omega\nu\, (hx_\nu - 2\Sigma') = 0$$

где Σ' отличается от суммы в (10.14) тем, что числа ν, согласно (3.1), удовлетворяют дополнительному условию $1 \leqslant \nu_1, \ldots, \nu_s < \nu$. Коэффициенты в выражениях Φ_ν должны браться при $\lambda = \lambda_*$ (в данном случае при $h = 0, \omega = 1$); поэтому

$$x_\nu = \Sigma'\, 2i\nu \,/\, (\nu^2 - 1) \tag{10.15}$$

Уравнение (10.13) не меняется при замене x на $(-x)$ и поэтому можем сразу положить четные гармоники равными нулю. Для нечетных гармоник получаем из (10.14), (10.15)

$$x_3 = {}^1/_8 i x_1^3, \qquad x_5 = {}^5/_{24} i x_1^2 x_3$$
$$x_7 = {}^7/_{24}\, i\, (x_1 x_3^2 + x_5 x_1^2)$$
$$x_9 = {}^9/_{40} i\, ({}^1/_6 x_3^3 + x_1 x_3 x_5 + {}^1/_2 x_1^2 x_7)$$

Автор благодарит А. А. Веденова за руководство и М. А. Леонтовича за обсуждение работы.

Поступила 17 IX 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. Гостехиздат, 1953.
2. Веденов А. А. Вопросы теории плазмы. Госатомиздат, вып. 3, 1963.
3. Pupp W. Über laufende Schichten in der positiven Säule von Edelgasen. Physik Z., 1932, 33, 844.
4. Paulikas Z. A., Pyle R. V. Macroscopic Instability of the Positive Column in a Magnetic Field. Phys. Fluids.
5. Боголюбов И. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Гостехиздат, 1955.
6. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. Гостехиздат, 1953.
7. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний, Физматгиз, 1959.