Прикладная математика и механика. Том 28, 1964

ВИХРЕВЫЕ ТЕЧЕНИЯ НЕВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ВБЛИЗИ КРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКИ[1]

У. Д. Хэйз

(Принстон, США)

Хорошо известно, что в плоском вихревом течении невязкой жидкости разделяющая линия тока (т. е. линия тока, входящая в критическую точку) образует в критической точке на стенке угол конечной величины с нормалью к стенке. Хорошо известно также, что в незавихренном пространственном (трехмерном) течении разделяющая линия, приходящая в критическую точку на стенке, нормальна к стенке. Цель настоящего сообщения — ответить на вопрос, какой результат будет соответствовать вихревому пространственному течению.

Рассмотрим установившееся течение жидкости постоянной плотности на плоской стенке. Поле скоростей выбираем таким образом, чтобы нормальная к стенке компонента вихря была равна нулю. В потоке невязкой жидкости постоянной плотности нормальная к стенке компонента вихря равна, вообще говоря, нулю, поэтому такой выбор не стесняет исследование локального поведения. Пусть стенка есть поверхность $z = 0$ в декартовом пространстве (ax, ay, az), а течение занимает полупространство $z \geqslant 0$. Величина a — произвольно выбранная характерная длина. Поток, набегающий по нормали к стенке, характеризуется характерным градиентом скорости V'.

Предположим, что скорость имеет вид

$$\mathbf{q} = {}^1/_2 V'a[F + x(H' - \alpha),\ G + y(H' + \alpha),\ -2H] \tag{1}$$

Здесь F, G, H и α — функции только z и штрих означает дифференцирование по z (за исключением, конечно, штриха в V'). Вихрь, соответствующий (1), выражается следующим образом:

$$\nabla \times \mathbf{q} = {}^1/_2 V'[-G' - y(H'' + \alpha'),\quad F' + x(H'' - \alpha')\ 0] \tag{2}$$

Метод заключается в нахождении выражения градиента давления из уравнения движения, а затем наложении условия: ротор градиента давления равен нулю. В результате получим уравнения

$$H\alpha' - H'\alpha = -\alpha_0, \qquad HH'' - {}^1/_2(H'^2 + \alpha^2) = -{}^1/_2(1 + \alpha_0{}^2) \tag{3}$$

$$HF' - {}^1/_2(H' - \alpha)F = M = 0, \qquad HG' - {}^1/_2(H' + \alpha)G = N = 0 \tag{4}$$

с правыми частями, равными первоначально произвольным постоянным.

---

[1] Доклад на II Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике, Москва, февраль 1964 г.

При решении первых двух уравнений принимаются граничные условия

$$H(0) = 0 \qquad H'(0) = 1, \qquad \alpha(0) = \alpha_0 \tag{5}$$

Параметр α_0 будет основным в данном исследовании. Другие две постоянные M и N могут быть, вообще говоря, положены равными нулю по следующим соображениям. При условии $\alpha_0 \neq 1$, если M не равно нулю, может быть найдено такое преобразование системы координат в направлении оси x, которое делает величину M равной нулю. Здесь предполагается, что такое преобразование, если оно необходимо, уже сделано. Аналогично, при $\alpha_0 \neq -1$ можно положить $N = 0$. Кроме того, так как x и y можно поменять местами без изменения вида решения, то можно ограничиться неотрицательными значениями α_0 без уменьшения общности.

Уравнения (3) с граничными условиями (5) не зависят от уравнений (4). Так как правые части уравнений (3) были определены с использованием (5), то для нахождения решения необходимы два дополнительных граничных условия. Эту систему и ее решение будем называть основными.

Если основное решение известно, то уравнения (4) для F и G будут линейными. В этом случае принимаем граничные условия

$$F(0) = 0, \qquad G(0) = 0 \tag{6}$$

Эту систему и ее решение будем называть дополнительными. Распределение давления, соответствующее некоторому решению этих двух систем уравнений, будет

$$p = p_{st} - {}^1/_2\rho V'^2 a^2({}^1/_4(1 - \alpha_0)^2 x^2 + {}^1/_4(1 + \alpha_0)^2 y^2 - Mx - Ny + H^2) \tag{7}$$

Перейдем к детальному разбору решений. Различные возможные случаи удобно рассмотреть раздельно.

Осесимметричный случай $\alpha_0 = 0$. Общее основное решение имеет вид

$$x = kH, \qquad H = k^{-1}\mathrm{sh}\, kz + H_0'' k^{-2}(\mathrm{ch}\, kz - 1) \qquad (k = \alpha'(0)) \tag{8}$$

Оно будет аналитическим. Общее дополнительное решение имеет вид

$$F = f_0 \sqrt{H} \exp(-{}^1/_2 kz), \qquad G = g_0 \sqrt{H} \exp({}^1/_2 kz) \tag{9}$$

Здесь f_0 и g_0 — произвольные постоянные. Таким образом, вблизи стенки дополнительная скорость ведет себя как $z^{1/2}$, а вихрь — как $z^{-1/2}$.

Разделяющая линия тока вблизи критической точки имеет форму, описываемую уравнениями

$$-\frac{x}{f_0} \doteq -\frac{y}{g_0} \doteq \frac{z^{1/2}}{2} \tag{10}$$

Случай узловой точки $0 < \alpha_0 < 1$. В этом случае основные линии тока образуют на стенке узловую точку. Единственным аналитическим основным решением является частное решение $H = z$, $\alpha = \alpha_0$. Общее основное решение имеет вид

$$H' = 1 + h_0 z^{1-\alpha_0} + h_1 z^{1+\alpha_0} + o\,(z^{2(1-\alpha_0)}) \tag{11}$$
$$\alpha = \alpha_0 - h_0 z^{1-\alpha_0} + h_1 z^{1+\alpha_0} + o\,(z^{2(1-\alpha_0)})$$

Здесь h_0 и h_1 — произвольные постоянные. Соответствующее дополнительное решение имеет вид

$$F = f_0 z^{1/2(1-\alpha_0)}\,[1 + o\,(z^{(1-\alpha_0)})], \qquad G = g_0 z^{1/2(1+\alpha_0)}\,[1 + o\,(z^{(1-\alpha_0)})] \quad (12)$$

Разделяющая линия тока вблизи критической точки описывается уравнениями

$$-\frac{x}{f_0} \doteq \frac{z^{1/2(1-\alpha_0)}}{2\,(1-\alpha_0)}, \qquad -\frac{y}{g_0} \doteq \frac{z^{1/2(1+\alpha_0)}}{2\,(1+\alpha_0)} \quad (13)$$

Этот результат сводится к (10), если положить α_0 равным нулю.

Плоский случай $\alpha_0 = 1$. В этом частном случае потребуем, чтобы $\alpha = H'$. Основное решение получаем в виде

$$H = k^{-1}\,\mathrm{sh}\,kz, \qquad \alpha = H' = \mathrm{ch}\,kz \quad (14)$$

Здесь k — произвольная постоянная. В этом случае величина M, вообще говоря, не может быть положена равной нулю.

Дополнительное решение будет

$$F = M \ln \frac{\mathrm{sh}\,kz}{1+\mathrm{ch}\,kz} + f_0, \qquad G = g_0 H \quad (15)$$

Если обе величины M и f_0 не равны нулю, то критическая точка не может существовать. При условии $M = 0$ и $f_0 = 0$ разделяющие линии тока вблизи критических точек описываются уравнениями

$$x = \mathrm{const}, \qquad y \doteq {}^1/_4 g_0 z \quad (16)$$

Здесь линии тока подходят к стенке под углом конечной величины.

Почти плоский случай $\alpha_0 = 1$. В этом случае исключим возможность того, что $\alpha = H'$. Новую переменную ξ определяем равенством

$$\xi = \ln \frac{z_0}{z} \quad \text{или} \quad z = z_0 e^{-\xi} \quad (17)$$

Здесь z_0 — произвольная постоянная. Основное решение имеет вид

$$\begin{gathered} H = z + z\xi^{-1}\,(1 + o\,(\xi^{-1}\ln \xi)) \\ -{}^1/_2\,(H' - \alpha) = \xi^{-1}\,(1 + o\,(\xi^{-1}\ln \xi)) \\ {}^1/_2\,(H' + \alpha) = 1 + {}^1/_2 k^2 z^2 \xi^2\,(1 + o\,(\xi^{-1}\ln \xi)) \end{gathered} \quad (18)$$

Здесь k — произвольная постоянная.

Дополнительное решение имеет вид

$$\begin{gathered} F = -{}^1/_2\,M\xi\,(1 + o\,(\xi^{-1}\ln \xi)) + {}^1/_2 f_0\,(H' - \alpha) \\ G = g_0\,z\xi\,(1 + o\,(\xi^{-1}\ln \xi)) \end{gathered} \quad (19)$$

Как и в плоском случае, для того чтобы могла существовать критическая точка, величина M должна быть равна нулю. Это означает, что в данном случае не может быть градиента давления вдоль оси x. Если $f_0 \neq 0$, то может быть найдено некоторое перемещение начала координат в направлении оси x, которое сделает $f_0 = 0$

Таким образом, можно положить $f_0 = 0$ без уменьшения общности.

Если $M = 0$ и $f_0 = 0$, то разделяющая линия тока входит в начало координат, и ее форма описывается соотношениями

$$x = 0, \qquad y \doteq -\,{}^1/_4 g_0 z\,(\xi + {}^1/_2) \tag{20}$$

В этом случае, так же как и в плоском случае, не только начало координат, но и все точки оси x будут критическими точками. Однако эти другие критические точки обладают до некоторой степени необычным свойством, что не существует разделяющей линии тока, входящей в какую-нибудь из них.

Случай седловой точки $\alpha_0 > 1$. В этом случае основные линии тока на стенке образуют седловую точку. Основное решение (11) для случая узловой точки применимо и здесь, при этом следует лишь положить $h_0 = 0$. В результате получим

$$H' - 1 = \alpha - \alpha_0 = h_1 z^{1+\alpha_0} + o\,(z^{2(1+\alpha_0)}) \tag{21}$$

с одной единственной произвольной постоянной. Дополнительное решение имеет вид

$$F = f_0 z^{1/_2(1-\alpha_0)}\,[1 + o\,(z^{1+\alpha_0})],\; G = g_0 z^{1/_2(1+\alpha_0)}\,[1 + o\,(z^{1+\alpha_0})] \tag{22}$$

В этом случае, для того чтобы критическая точка могла существовать' необходимо, чтобы $f_0 = 0$. Если $f_0 = 0$, для разделяющей линии тока будем иметь $x = 0$ и второе равенство (13).

Подводя итог, можно сказать, что критические точки в осесимметричном случае и случае узловой точки (при $0 < \alpha_0 < 1$) могут существовать в самом общем случае. Малое возмущение поля давления или распределения входящего вихря будет лишь немного возмущать положение критической точки и поле потока. Критические точки типов, получающиеся при $\alpha_0 \geqslant 1$, могут существовать только при специальных условиях. Возмущение поля давления, получающееся при ненулевом M, будет разрушать критическую точку в случаях $\alpha_0 = 1$ так же, как и малая постоянная скорость в направлении оси x в плоском случае. В случае седловой точки любой входящий вихрь с ненулевой компонентой по оси y будет разрушать критическую точку.

В случае седловой точки (при $f_0 = 0$) и при $\alpha_0 \leqslant 1$, если $f_0 = 0$ и $g_0 = 0$, то разделяющая линия тока входит в критическую точку по нормали к стенке. В плоском случае при $g_0 \neq 0$ она подходит под углом конечной величины. Во всех других рассмотренных случаях разделяющая линия тока подходит к критической точке по касательной к стенке. Можно считать, что ситуация в невязком завихренном пространственном течении будет, вообще говоря, такой же.

Принстонский университет