Прикладная математика и механика. Том 28, 1964

О КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ КОНВЕКТИВНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

М. И. Шлиомис

(Пермь)

Общее исследование влияния магнитного поля на конвективную неустойчивость проводящей жидкости показало [1], что все возмущения равновесия жидкости развиваются монотонно, во всяком случае, в слабых полях. Колебательные же возмущения не были обнаружены вовсе. Имеется, однако, ряд простых примеров [2–4], из которых видно, что колебательная неустойчивость возможна.

Цель настоящей работы — выяснить в общем виде условия возникновения колебательной неустойчивости. Такое исследование тем более необходимо, что во всех трех упомянутых задачах (определение начала конвекции в плоском горизонтальном [2] и вертикальном [3] слоях и в кубической полости [4]) колебательные решения удалось получить лишь для специальных краевых условий на границах жидкости.

Метод, который здесь применен, был впервые использован Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшицем [5] при исследовании пересечений электронных термов молекулы.

1. В поле тяжести

$$\mathbf{g} = -\beta g, \qquad \beta^2 = 1 \tag{1.1}$$

и внешнем магнитном поле

$$\mathbf{H} = \gamma H, \qquad \gamma^2 = 1 \tag{1.2}$$

проводящая жидкость подогревается снизу в полости любой формы так, что, пока жидкость в равновесии, в ней поддерживается постоянный градиент температуры

$$\nabla T_0 = -\beta A \tag{1.3}$$

Полагая малые возмущения равновесия жидкости $\mathbf{u}$, температуры T и магнитного поля в ней $\mathbf{h}$ пропорциональными $e^{-\lambda t}$, получим из обычных уравнений магнитной гидродинамики уравнения для возмущений

$$\begin{gathered} -\lambda \mathbf{u} = \nabla^2 \mathbf{u} + \Lambda (\gamma \nabla)\, \mathbf{h} + \Gamma \beta T - \nabla f, \qquad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \qquad \operatorname{div} \mathbf{h} = 0 \\ -\lambda \mathbf{h} = a \nabla^2 \mathbf{h} + \Lambda (\gamma \nabla)\, \mathbf{u}, \qquad -\lambda T = b \nabla^2 T + \Gamma \beta \mathbf{u} \end{gathered} \tag{1.4}$$

Все величины здесь безразмерные. В качестве единиц выбраны: длина l (характерный размер полости), время l^2 / ν, скорость ν / l, температура $\nu l^{-1} (A / \alpha g)^{1/2}$, магнитное поле $\nu l^{-1} (4\pi\rho)^{1/2}$. В (1.4) входят безразмерные параметры

$$\Lambda = \frac{Hl}{\nu (4\pi\rho)^{1/2}}, \qquad \Gamma = \frac{l^2}{\nu} (\alpha g A)^{1/2}, \qquad a = \frac{c^2}{4\pi\sigma\nu}, \qquad b = \frac{\chi}{\nu}$$

Число Λ определяет отношение плотности магнитной энергии $H^2 / 8\pi$ к плотности кинетической энергии жидкости $\rho u^2 / 2 \sim \rho\nu^2 / 2l^2$. Оно не содержит электропроводности σ. Величину $\Lambda / \sqrt{a}$ называют числом Гартмана, Γ^2 — число Грассхофа.

На границе полости, вырезанной в бесконечном твердом проводящем массиве, скорость исчезает, а магнитное поле, температура, нормальная составляющая потока тепла и касательная составляющая вектора электрической напряженности непрерывны. Это приводит к краевым условиям:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{u} = 0,\ T = T^\circ, \quad \mathbf{h} = \mathbf{h}^\circ && \text{на границе полости}\\
&\mathbf{n}\,(\varkappa\nabla T) = \mathbf{n}\,(\varkappa^\circ\nabla T^\circ), \quad \frac{\mathbf{n}\times\operatorname{rot}\mathbf{h}}{\sigma} = \frac{\mathbf{n}\times\operatorname{rot}\mathbf{h}^\circ}{\sigma^\circ} && \\
&T^\circ = 0, \quad \mathbf{h}^\circ = 0 && \text{на бесконечности}
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Здесь и в дальнейшем верхним индексом отмечаются величины в массиве ($\varkappa$ — теплопроводность). Эти условия в дальнейшем, при интегрировании, позволяют применять теорему Гаусса ко всему пространству: интегралы по поверхности полости всегда уничтожаются.

В этой работе изучается зависимость спектра декрементов λ от величины внешнего поля Λ и температурного градиента Γ. Возмущения монотонны, если $\operatorname{Im}\lambda = 0$, и затухают, если $\operatorname{Re}\lambda > 0$.

2. Уравнения (1.4) запишем компактно, введя 7-вектор ψ и операторы

$$\psi = \begin{bmatrix}\mathbf{u}\\ \mathbf{h}\\ T\end{bmatrix}, \quad \nabla f = \begin{bmatrix}\nabla f\\ 0\\ 0\end{bmatrix}, \quad s_1 = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&a&0\\0&0&b\end{bmatrix}, \quad s_2 = \begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$s_3 = \begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}, \quad s_4 = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix} \tag{2.1}$$

В этих обозначениях система (1.4) запишется так:

$$\lambda\psi = L\psi \equiv \nabla f - s_1\nabla^2\psi - \Lambda s_2\,(\gamma\nabla)\,\psi - \Gamma\beta s_3\psi, \qquad s_4\nabla\psi = 0 \tag{2.2}$$

Оператор L несамосопряженный, и потому собственные значения его могут быть комплексными, а собственные функции не ортогональны друг к другу. Они ортогональны к собственным функциям φ оператора L^+, эрмитово-сопряженного с L. Для φ получаются уравнения

$$\lambda^*\varphi = L^+\varphi \equiv \nabla q - s_1\nabla^2\varphi + \Lambda s_2\,(\gamma\nabla)\,\varphi - \Gamma\beta s_3\varphi, \qquad s_4\nabla\varphi = 0 \tag{2.3}$$

т. е.

$$L^+(\Lambda, \Gamma) = L(-\Lambda, \Gamma) \tag{2.4}$$

Такая «слабая» неэрмитовость позволяет выразить ψ и φ через одни и те же функции (ср. 2.1):

$$\varphi^* = \begin{bmatrix}\mathbf{u}\\ -\mathbf{h}\\ T\end{bmatrix} \tag{2.5}$$

Векторы $\{\psi_\alpha\}$ ортогональны к $\{\varphi_\alpha\}$ в следующем смысле:

$$\begin{aligned}
&(\varphi_\alpha\cdot\psi_\beta) \equiv \int \{\mathbf{u}_\alpha\mathbf{u}_\beta + T_\alpha T_\beta - \mathbf{h}_\alpha\mathbf{h}_\beta\}\,dV = 0 \qquad (\lambda_\alpha \neq \lambda_\beta)\\
&(\varphi_\alpha\cdot\psi_\alpha) \equiv \int \{\mathbf{u}_\alpha^2 + T_\alpha^2 - \mathbf{h}_\alpha^2\}\,dV = \text{const}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

При $\Lambda \to 0$ оператор L аналитически переходит в эрмитовый:

$$L^+(0, \Gamma) = L(0, \Gamma) \tag{2.7}$$

так что в отсутствие внешнего магнитного поля колебательных возмущений нет. В [1] показано, что их нет и в слабых магнитных полях, т. е. при малых Λ все возмущения монотонны. Существуют два типа монотонных возмущений [6]

$$\lambda_{1\alpha},\ \psi_{1\alpha}=\begin{bmatrix}\mathbf{u}_{1\alpha}\\ \mathbf{h}_{1\alpha}\\ T_{1\alpha}\end{bmatrix},\qquad \lambda_{2\alpha},\ \psi_{2\alpha}=\begin{bmatrix}\mathbf{u}_{2\alpha}\\ \mathbf{h}_{2\alpha}\\ T_{2\alpha}\end{bmatrix}\qquad (\alpha=0,1,2,\ldots) \tag{2.8}$$

В решениях первого типа

$$\int \mathbf{h}_{1\alpha}^2\,dV > \int (\mathbf{u}_{1\alpha}^2+T_{1\alpha}^2)\,dV$$

Эти решения естественно назвать «магнитными»: при $\Lambda\to 0$ в них исчезают скорость и температура и остается только магнитное поле, удовлетворяющее уравнениям Максвелла

$$-\lambda_{1\alpha}\mathbf{h}_{1\alpha}=a\nabla^2\mathbf{h}_{1\alpha},\qquad \operatorname{div}\mathbf{h}_{1\alpha}=0 \tag{2.9}$$

В других возмущениях, «гидродинамических»,

$$\int (\mathbf{u}_{2\alpha}^2+T_{2\alpha}^2)\,dV > \int \mathbf{h}_{2\alpha}^2\,dV$$

В этих решениях при $\Lambda\to 0$ исчезает поле, и они непрерывно примыкают к решениям обычных уравнений конвекции без поля

$$\begin{aligned}-\lambda_{2\alpha}\mathbf{u}_{2\alpha}&=\nabla^2\mathbf{u}_{2\alpha}+\Gamma\beta T_{2\alpha}-\nabla f_{2\alpha}\\ -\lambda_{2\alpha}T_{2\alpha}&=b\nabla^2T_{2\alpha}+\Gamma\beta\mathbf{u}_{2\alpha},\qquad \operatorname{div}\mathbf{u}_{2\alpha}=0\end{aligned} \tag{2.10}$$

Критерием, определяющим тип возмущения, является знак нормировочного интеграла:

$$(\varphi_{m\alpha}\cdot\psi_{n\beta})\equiv\int\{\mathbf{u}_{m\alpha}\mathbf{u}_{n\beta}+T_{m\alpha}T_{n\beta}-\mathbf{h}_{m\alpha}\mathbf{h}_{n\beta}\}\,dV=(-)^n\,\delta_{mn}\delta_{\alpha\beta}$$
$$(m,\ n=1,2;\quad \alpha,\ \beta=0,1,2\ldots) \tag{2.11}$$

Колебательные возмущения появляются при числах Λ, больших некоторого критического $\Lambda_*(\Gamma)$. Существенно, что появляться они могут только парами. В самом деле, из вещественности оператора L следует, что если $\{\lambda,\psi\}$ есть некоторое комплексное решение уравнения (2.2), то и $\{\lambda^*,\psi^*\}$ является решением этого уравнения. Декременты колебательных возмущений ψ и ψ^* в точке Λ_* совпадают: $\lambda=\lambda^*\equiv\lambda^\circ$, а сами возмущения при $\Lambda<\Lambda_*$ переходят в два монотонных.

Так возникает необходимость исследовать пересечения в спектре декрементов $\lambda(\Lambda,\Gamma)$. Исследование проведем методом, описанным в книге [5].

3. Пусть в точке (Λ_0,Γ_0) два вещественных декремента $\lambda_{m\alpha}$ и $\lambda_{n\beta}$ имеют близкие значения. Попробуем сделать $\lambda_{m\alpha}=\lambda_{n\beta}$, изменив параметры на $\Delta\Lambda$, $\Delta\Gamma$; имеем

$$L(\Lambda,\Gamma)=L(\Lambda_0,\Gamma_0)+\frac{\partial L}{\partial\Lambda}\Delta\Lambda+\frac{\partial L}{\partial\Gamma}\Delta\Gamma\equiv L_0+\Pi \tag{3.1}$$

Рассматривая Π как возмущение к оператору L_0, определим собственные функции и собственные значения уравнения

$$\lambda\psi=(L_0+\Pi)\psi \tag{3.2}$$

методом теории возмущений. Собственные функции «невозмущенного» оператора L_0 удовлетворяют уравнениям

$$\lambda_{m\alpha}\psi_{m\alpha} = L_0\psi_{m\alpha}, \qquad \lambda_{n\beta}\psi_{n\beta} = L_0\psi_{n\beta} \tag{3.3}$$

В качестве нулевого приближения к собственным функциям в точке $(\Lambda_0 + \Delta\Lambda,\ \Gamma_0 + \Delta\Gamma)$ возьмем линейные комбинации вида

$$\psi = c_{m\alpha}\psi_{m\alpha} + c_{n\beta}\psi_{n\beta} \tag{3.4}$$

Подставляя (3.4) в (3.2), получим

$$c_{m\alpha}(\lambda - \lambda_{m\alpha} - \Pi)\psi_{m\alpha} + c_{n\beta}(\lambda - \lambda_{n\beta} - \Pi)\psi_{n\beta} = 0 \tag{3.5}$$

В рассматриваемой задаче могут представиться два случая. Возмущения $\psi_{m\alpha}$ и $\psi_{n\beta}$, чьи декременты близки в точке (Λ_0, Γ_0), могут принадлежать а) к одному типу ($n = m$), или б) к разным типам ($n \neq m$).

Рассмотрим сначала первый случай, т. е. и $\psi_{n\alpha}$ и $\psi_{n\beta}$ являются либо «магнитными» ($n = 1$), либо «гидродинамическими» ($n = 2$) возмущениями. Скалярно умножая (3.5) поочередно на φ_α и φ_β (индекс n опущен), получим два алгебраических уравнения, которые совместны, если

$$\begin{vmatrix} (-)^n(\lambda_\alpha - \lambda) + \Pi_{\alpha\alpha} & \Pi_{\alpha\beta} \\ \Pi_{\beta\alpha} & (-)^n(\lambda_\beta - \lambda) + \Pi_{\beta\beta} \end{vmatrix} = 0 \tag{3.6}$$

Здесь

$$\Pi_{\alpha\beta} \equiv (\varphi_\alpha \cdot \Pi\psi_\beta) =$$

$$= -\Delta\Lambda \int \{\mathbf{u}_\alpha(\gamma\nabla)\mathbf{h}_\beta + \mathbf{u}_\beta(\gamma\nabla)\mathbf{h}_\alpha\}\, dV - \Delta\Gamma \int \{T_\alpha\beta\mathbf{u}_\beta + T_\beta\beta\mathbf{u}_\alpha\}\, dV \tag{3.7}$$

Из (3.7) видно, что

$$\Pi_{\alpha\beta} = \Pi_{\beta\alpha} \tag{3.8}$$

(Матрица $\Pi_{\alpha\beta}$ определена в смешанном базисе $\{\varphi_\alpha; \psi_\alpha\}$, и потому (3.8) не означает, конечно, эрмитовости Π.)

Раскрывая определитель (3.6), находим

$$\lambda = {}^1/_2\,[\lambda_\alpha + \lambda_\beta + (-)^n(\Pi_{\alpha\alpha} + \Pi_{\beta\beta})] \pm \tag{3.9}$$

$$\pm \sqrt{{}^1/_4\,[\lambda_\alpha - \lambda_\beta + (-)^n(\Pi_{\alpha\alpha} - \Pi_{\beta\beta})]^2 + \Pi_{\alpha\beta}^2}$$

Для пересечения декрементов необходимо обращение в нуль подкоренного выражения. Так как оно является суммой двух квадратов, то условие пересечения состоит из двух уравнений

$$\lambda_\alpha - \lambda_\beta + (-)^n(\Pi_{\alpha\alpha} - \Pi_{\beta\beta}) = 0, \qquad \Pi_{\alpha\beta} = 0 \tag{3.10}$$

При двух произвольных параметрах, $\Delta\Lambda$ и $\Delta\Gamma$, определяющих возмущение Π, этим уравнениям всегда можно удовлетворить. Следовательно, декременты любых двух возмущений одинакового типа могут пересечься друг с другом. Ничего интересного, однако, при этом не происходит, и к колебательным возмущениям такое пересечение никакого отношения не имеет. Декременты, определяемые формулой (3.9), после пересечения расходятся, продолжая оставаться вещественными.

Если ψ_α и ψ_β обладают различной симметрией, то [5] $\Pi_{\alpha\beta} \equiv 0$, и из двух условий пересечения (3.10) остается всего одно. Поэтому пересечение поверхностей $\lambda_\alpha(\Lambda, \Gamma)$ и $\lambda_\beta(\Lambda, \Gamma)$ происходит при различной симметрии возмущений — по линии, а при одинаковой симметрии — в точке.

4. Остается рассмотреть случай, когда в точке (Λ_0, Γ_0) близки $\lambda_{1\alpha}$ и $\lambda_{2\beta}$ — декременты двух возмущений разного типа. Ниже второй индекс всюду опущен. Умножая (3.5) на φ_1 и φ_2, получим систему двух уравнений, условие совместности которой гласит

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 - \lambda - \Pi_{11} & \Pi_{12} \\ -\Pi_{21} & \lambda_2 - \lambda + \Pi_{22} \end{vmatrix} = 0 \tag{4.1}$$

Здесь $\Pi_{\alpha\beta}$ определены (3.7), так что $\Pi_{21} = \Pi_{12}$. Отсюда раскрывая определитель получим (4.2)

$$\lambda = {}^1/_2(\lambda_1 + \lambda_2 - \Pi_{11} + \Pi_{22}) \pm \sqrt{{}^1/_4(\lambda_1 - \lambda_2 - \Pi_{11} - \Pi_{22})^2 - \Pi_{12}^2}$$

Если ψ_1 и ψ_2 имеют разную симметрию, то $\Pi_{12} \equiv 0$, и подкоренное выражение в (4.2) всегда неотрицательно, т. е. комплексные λ невозможны. Пересечение декрементов, которое здесь возможно, рассмотрено в § 3.

Наиболее интересен случай, когда ψ_1 и ψ_2 имеют одинаковую симметрию. Тогда $\Pi_{12} \not\equiv 0$, так что под корнем теперь не сумма, как в (3.9), а разность двух квадратов. При надлежащем выборе $\Delta\Lambda$ и $\Delta\Gamma$ эта разность положительна, отрицательна или равна нулю. Отрицательным значениям разности соответствуют два комплексно-сопряженных декремента, т. е. два колебательных возмущения с частотами $\pm \operatorname{Im} \lambda$. При перемене знака подкоренного выражения эта пара колебательных возмущений переходит в два монотонных возмущения — одно «магнитное» и одно «гидродинамическое». Условие пересечения декрементов состоит из уравнения

$${}^1/_4(\lambda_1 - \lambda_2 - \Pi_{11} - \Pi_{22})^2 - \Pi_{12}^2 = 0 \tag{4.3}$$

т. е. поверхности $\lambda_1(\Lambda, \Gamma)$ и $\lambda_2(\Lambda, \Gamma)$ пересекаются по линии. Найдем закон, по которому меняются декременты вблизи этой линии. Если точка $\Lambda_* = \Lambda_0 + \Delta\Lambda$, $\Gamma_* = \Gamma_0 + \Delta\Gamma$ лежит на линии пересечения декрементов, то вблизи этой точки (4.4)

$$\Lambda = \Lambda_* + \xi \equiv \Lambda_0 + \Delta\Lambda + \xi, \qquad \Gamma = \Gamma_* + \eta \equiv \Gamma_0 + \Delta\Gamma + \eta$$

Принимая во внимание, что $\lambda_1(\Lambda_*, \Gamma_*) = \lambda_2(\Lambda_*, \Gamma_*) \equiv \lambda^\circ$, получим из (4.2) для значений параметров (4.4)

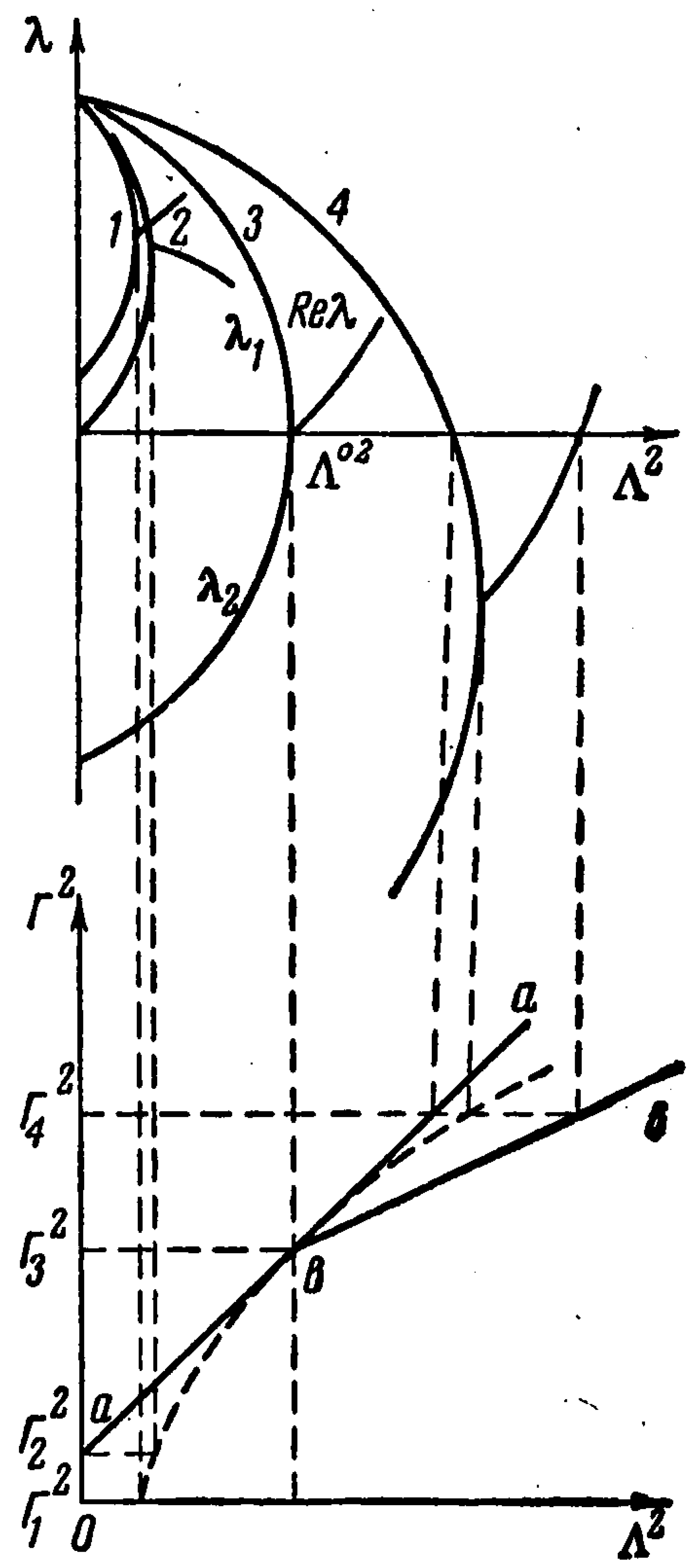
$$\lambda = \lambda^\circ \pm \sqrt{B\xi + D\eta} \qquad (B, D = \mathrm{const}) \tag{4.5}$$

Таким образом, вблизи (Λ_*, Γ_*) частота колебаний равна

$$\sqrt{B(\Lambda - \Lambda_*) + D(\Gamma - \Gamma_*)} \tag{4.6}$$

Итак, причиной появления колебательных возмущений являются пересечения декрементов монотонных возмущений разного типа, но одинаковой симметрии. Для этого случая вверху фигуры показано сечение рельефа функции $\lambda(\Lambda^2, \Gamma^2)$ четырьмя различными плоскостями $\Gamma^2 = \mathrm{const}$. Справа от точки пересечения «магнитного» и «гидродинамического» декрементов появляются два комплексно-сопряженных λ. На фигуре обозначена их вещественная часть.

5. Краевая задача (1.4) при $\Lambda = 0$ распадается на две — (2.9) и (2.10). Задача (2.10) исследована Сорокиным [7]. Используя вариационный принцип, он показал, что с ростом Γ все $\lambda_{2\alpha}$ уменьшаются. При $\Gamma = \Gamma_2$ (см. верхнюю часть фигуры) декремент λ_2 обращается в нуль. При $\Gamma > \Gamma_2$ монотонное возмущение ψ_2 будет усиливаться, приводя к неустойчивости.



Собственные числа $\lambda_{1\alpha}$ другой задачи (2.9) вообще не зависят от Γ. Поэтому $\lambda_1(0, \Gamma^2)$ является общей точкой всех кривых, соответствующих разным значениям Γ^2.

В присутствии магнитного поля ($\Lambda \neq 0$) возможны два вида конвективной неустойчивости — относительно монотонных и колебательных возмущений. В слабых полях, пока Λ меньше некоторого Λ°, кризис равновесия вызывается только монотонными возмущениями, причем критическое значение Γ, выше которого равновесие неустойчиво, растет с увеличением Λ. Колебательная неустойчивость имеет место при $\Lambda > \Lambda^\circ$.

Нижняя часть фигуры взята из работы [3]. Сплошными линиями обозначены на ней кривые граничной устойчивости плоского вертикального слоя жидкости, подогреваемого снизу в поперечном магнитном поле. Линия *aa* определяет монотонный, а *bb* — колебательный порог конвекции. Область существования колебательных возмущений лежит под пунктирной кривой. Эта кривая проецирует на плоскость $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$ как раз ту линию, по которой пересекаются поверхности $\lambda_1(\Lambda^2, \Gamma^2)$ и $\lambda_2(\Lambda^2, \Gamma^2)$.

Приношу искреннюю благодарность В. С. Сорокину за тему и руководство, Г. З. Гершуни — за полезные советы.

Поступила 10 III 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Сорокин В. С., Сушкин И. В. Устойчивость равновесия подогреваемой снизу проводящей жидкости в магнитном поле. Ж. эксперим. и теор. физ., 1960, т. 38, вып. 2.
2. Chandrasekhar S. Hydrodynamic and hydromagnetic stability. Clarendon Press, 1961.
3. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. О спектре конвективной неустойчивости проводящей среды в магнитном поле. Ж. эксперим. и теор. физ., 1962, т. 42, вып. 4.
4. Шлиомис М. И. Об устойчивости вращающейся и подогреваемой жидкости относительно периодических по времени возмущений. ПММ, 1962, т. 26, вып. 2.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. Физматгиз, 1963.
6. Шлиомис М. И. Осциллирующие возмущения в проводящей жидкости в магнитном поле. ПММ, 1963, т. 27, вып. 3.
7. Сорокин В. С. Вариационный метод в теории конвекции. ПММ, 1953, т. 17, вып. 1.