Прикладная математика и механика. Том 28, 1964

НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ТЕЧЕНИЕ ЧАСТИЧНО ИОНИЗОВАННОГО ГАЗА В СИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Э. Г. Сахновский

(Ленинград)

Ларморовское вращение заряженных частиц в сильном магнитном поле приводит к анизотропии коэффициентов переноса. Учет влияния анизотропии проводимости (эффекта Холла) на установившееся течение «гартмановского типа» был проведен как для слабо ионизованного [1,2], так и для полностью [3] и частично ионизованного [4] газа. Влияние анизотропии проводимости на неустановившееся течение, насколько нам известно, изучено только для слабо ионизованного газа [5,6]. Наконец, решение задачи с учетом анизотропии вязкости (когда циклотронная частота вращения ионов не мала по сравнению с частотой их «соударений») получено только в стационарном случае для полностью ионизованного газа [7].

Ниже на основе системы уравнений, полученной в работе [8], рассмотрено неустановившееся плоскопараллельное течение частично ионизованного газа с учетом эффектов Холла, «скольжения» ионов относительно нейтралов и анизотропии вязкости. Движущаяся среда предполагается несжимаемой, магнитное число Рейнольдса — малым, причем не учитываются термодиффузионные члены в законе Ома и зависимость коэффициентов переноса от температуры. При помощи преобразования Лапласа получено точное решение задачи как для произвольной зависимости перепада давлений от времени, так и для частных случаев пульсирующего и постоянного перепадов давления.

§ 1. Воспользуемся той же моделью частично ионизованного газа, движущегося в сильном внешнем магнитном поле, которая была принята в работе [8]. Введем дополнительные предположения о несжимаемости среды ($\rho = \mathrm{const}$), постоянстве ее степени ионизации ($s = \mathrm{const}$) и малости магнитного числа Рейнольдса; тогда, пренебрегая влиянием температуры на коэффициенты переноса, последние можно считать постоянными величинами. Наконец, пренебрегая термодиффузионным эффектом, будем иметь следующую систему уравнений, описывающую движение рассматриваемой среды [8]:

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \qquad \operatorname{div} \mathbf{V}_i = 0, \qquad \rho\left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\,\mathbf{u}\right] = -\nabla p - \operatorname{div}\pi + \mathbf{j}\times\mathbf{B}$$

$$\mathbf{j} + \frac{\omega_e\tau_0}{B}\left(\mathbf{j}\times\mathbf{B} - \frac{Zs}{1+Zs}\nabla p\right) + 2(1-s)^2\frac{\omega_i\tau_{ia}\omega_e\tau_0}{B^2}\,[\mathbf{B}\times(\mathbf{j}\times\mathbf{B}) +$$

$$+\frac{Zs}{1+Zs}\nabla p\times\mathbf{B} - \frac{1}{1-s}(s\operatorname{div}\pi - \operatorname{div}\pi_i)\times\mathbf{B}] = \sigma_0\,(\mathbf{E} + \mathbf{u}\times\mathbf{B}) \tag{1.1}$$

$$\operatorname{rot}\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} = j, \qquad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \qquad \operatorname{div}\varepsilon_0\mathbf{E} = \rho_e$$

$$\left(\frac{1}{\tau_0} = \frac{1}{\tau_{ei}} + \frac{1}{\tau_{ea}}\right)$$

Здесь π и π_i — тензоры вязких напряжений смеси и ионов:

$$\pi^{rm} = -\eta^{(0)}W_0^{rm} - \eta^{(1)}W_1^{rm} - \eta^{(2)}W_2^{rm} + \eta^{(3)}W_3^{rm} + \eta^{(4)}W_4^{rm}$$
$$\pi_i^{rm} = -\eta_i^{(0)}W_0^{rm} - \eta_i^{(1)}W_1^{rm} - \eta_i^{(2)}W_2^{rm} + \eta_i^{(3)}W_3^{rm} + \eta_i^{(4)}W_4^{rm} \tag{1.2}$$

Выражения для коэффициентов вязкости $\eta^{(k)}$ и $\eta_i^{(k)}$ $(k = 0, 1, 2, 3, 4)$, а также для тензоров W_k^{rm} приведены в работе [8]. Скорость «скольжения» ионов относительно нейтралов дается выражением

$$\mathrm{V}_i = \frac{2\tau_{ia}}{s\rho}\left[\mathbf{j}\,\frac{B}{\omega_e\tau_{ea}} + (1-s)\,\mathbf{j}\times\mathbf{B} - \frac{Zs\,(1-s)}{1+Zs}\nabla p + s\operatorname{div}\pi - \operatorname{div}\pi_i\right] \tag{1.3}$$

Остальные обозначения совпадают с принятыми в [8], а именно: $\mathbf{u}$ — средняя массовая скорость, p — давление, $\mathbf{B}$ — вектор магнитной индукции, $\mathbf{j}$ — вектор плотности тока, $\mathbf{E}$ — вектор напряженности электрического поля, Z — зарядовое число, ω_e и ω_i — циклотронные частоты электронов и ионов, μ_0 и ε_0 — магнитная и электрическая постоянные, ρ_e — объемный заряд, $\sigma_0 = \mathrm{const}$ — проводимость, $\tau_{\alpha\beta}^{-1}$ — эффективная частота столкновений частиц α- и β-сорта.

Записанная выше система уравнений значительно упрощается при рассмотрении конкретной задачи о течении в плоском канале высоты $2a$ при наличии однородных внешних полей: $\mathbf{B}_0 \parallel z$ и $\mathbf{E}_0 \perp z$. Естественное предположение о зависимости скорости только от поперечной координаты z и времени t, а также возможность пренебречь индуцированными полями в силу малости магнитного числа Рейнольдса линеаризируют исходную систему уравнений.

Учитывая, что $u_z = j_z \equiv 0$, $B_z \equiv B_0 = \mathrm{const}$ и вводя комплексную скорость $v\,(z, t)$, плотность электрического тока $J\,(z, t)$, индуцированное магнитное поле $\chi\,(z, t)$, внешнее φ_0 и вихревое $\varphi\,(z, t)$ электрические поля, а также комплексный перепад давлений $\psi\,(t)$ по формулам

$$v = u_x - iu_y, \qquad J = j_x - ij_y, \qquad \chi = \mu_0^{-1}(B_x - iB_y) \tag{1.4}$$

$$\varphi_0 = E_{0x} - iE_{0y}, \qquad \varphi = E_x - iE_y, \qquad \psi = P_x - iP_y \tag{1.5}$$

$$P_x = -\partial p\,/\,\partial x, \qquad P_y = -\partial p\,/\,\partial y$$

сведем поставленную задачу к решению линейного уравнения второго порядка для $v\,(z, t)$:

$$\rho\,\frac{\partial v}{\partial t} - \left[(\eta^{(2)} + i\eta^{(4)})\left(1 + \frac{\delta s}{1-s}\,\xi\right) - (\eta_i^{(2)} + i\eta_i^{(4)})\,\frac{\delta}{1-s}\,\xi\right]\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} +$$
$$+ B_0^2\sigma_0\xi v = \left[1 - \frac{Zs}{1+Zs}\,\xi\,(\delta + i\omega_e\tau_0)\right]\psi + iB_0\sigma_0\xi\varphi_0 \tag{1.6}$$

где

$$\delta = 2\,(1-s)^2\,\omega_i\tau_{ia}\omega_e\tau_0, \qquad \xi = (1 + \delta + i\omega_e\tau_0)^{-1} \tag{1.7}$$

Входящие в (1.6) коэффициенты вязкости имеют вид

$$\eta^{(2)} + i\eta^{(4)} = \frac{\eta^{(0)} + {}^4/_9\,(\omega_i\tau_i\theta)^2\,\eta_a + i\,{}^2/_3\,\omega_i\tau_i\theta\,(\eta^{(0)} - \eta_a)}{1 + {}^4/_9\,(\omega_i\tau_i\theta)^2}$$
$$\eta_i^{(2)} + i\eta_i^{(4)} = \frac{(1 + i\,{}^2/_3\,\omega_i\tau_i\theta)\,\eta_i^{(0)}}{1 + {}^4/_9\,(\omega_i\tau_i\theta)^2} \qquad \left(\omega_i = \frac{ZeB_0}{m_i}\right) \tag{1.8}$$

Здесь Ze—заряд, m_i— масса иона;выражения для коэффициентов вязкости смеси в целом $\eta^{(0)}$, ионов $\eta_i^{(0)}$ и «изолированных» нейтралов η_a в случае, когда магнитное поле равно нулю приведены в работе [8]; $\tau_i\theta$ связано со временем между всевозможными столкновениями ионов; безразмерный параметр $\omega_i\,\tau_i\,\theta$ характеризует анизотропию коэффициентов вязкости.

Интересно отметить, что с ростом $\omega_i\,\tau_i\,\theta$ коэффициент вязкости $\eta^{(2)}$ монотонно убывает от $\eta^{(0)}$ при $\omega_i\tau_i\theta = 0$, асимптотически приближаясь к η_a при больших $\omega_i\,\tau_i\,\theta$.

Аналогично, $\eta_i^{(2)}$ убывает от $\eta_i^{(0)}$, приближаясь к нулю при $\omega_i\tau_i\theta \gg 1$.

Иначе ведут себя $\eta^{(4)}$ и $\eta_i^{(4)}$: возрастая от нуля при $\omega_i\tau_i\theta = 0$, они при $\omega_i\tau_i\theta = 1.5$ достигают максимума

$$(\max\,[\eta^{(4)} \,/\, (\eta^0 - \eta_a)] = \max\,\eta_i^{(4)}/\eta_i^{(0)} = 0.5)$$

и затем монотонно убывают до нуля с ростом $\omega_i\tau_i\theta$.

После решения уравнения (1.6) с нулевыми начальными и граничными условиями комплексная плотность тока J определяется по формуле

$$J = i\,\frac{\xi}{B_0}\left\{\frac{\delta}{1-s}\,[(\eta_i^{(2)} + i\eta_i^{(4)}) - s\,(\eta^{(2)} + i\eta^{(4)})]\,\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \right.$$
$$\left. + B_0^2\sigma_0 v + \frac{Zs}{1+Zs}\,(\delta + i\omega_e\tau_0)\,\psi - iB_0\sigma_0\varphi_0\right\} \tag{1.9}$$

Индуцированные магнитное и электрическое поля в первом приближении даются уравнениями

$$\frac{\partial\chi}{\partial z} = iJ, \qquad \mu_0\,\frac{\partial\chi}{\partial t} = i\,\frac{\partial\varphi}{\partial z} \tag{1.10}$$

при соответствующих начальных и граничных условиях. Из проекций на ось z уравнения движения и обобщенного закона Ома можно также определить $\partial p \,/\, \partial z$, E_z и $\rho_e = \varepsilon_0\partial E_z \,/\, \partial z$.

§ 2. Вводя в качестве масштабов для v, z, t, ψ и φ_0 соответственно U_0, a, $a \,/\, U_0$, $\rho U_0^2 \,/\, a$ и B_0U_0, перепишем уравнение (1.6) в следующем безразмерном виде:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \left[\frac{1}{R^*}\left(1 + \frac{\delta s}{1-s}\,\xi\right) - \frac{1}{R_i^*}\,\frac{\delta}{1-s}\,\xi\right]\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + N^* v =$$
$$= \left[1 - \frac{Zs}{1+Zs}\,\xi\,(\delta + i\omega_e\tau_0)\right]\psi + iN^*\varphi_0 \tag{2.1}$$

В равенстве (2.1) выделились комплексные безразмерные числа Рейнольдса R^* и R_i^*, и параметр магнитного взаимодействия N^*

$$\frac{1}{R^*}=\frac{1}{R^{(2)}}+i\frac{1}{R^{(4)}}, \qquad \frac{1}{R_i^*}=\frac{1}{R_i^{(2)}}+i\frac{1}{R_i^{(4)}}, \qquad N^*=N\xi \tag{2.2}$$

где

$$R^{(k)}=\frac{U_0a\rho}{\eta^{(k)}}, \qquad R_i^{(k)}=\frac{U_0a\rho}{\eta_i^{(k)}} \qquad (k=2.4) \tag{2.3}$$

$$N=\frac{B_0^2\sigma_0a}{\rho U_0}=SR_m, \quad S=\frac{B_0^2}{\mu_0\rho U_0^2}, \qquad R_m=\mu_0\sigma_0aU_0 \tag{2.4}$$

Применяя к (2.1) преобразование Лапласа

$$F(z,\beta)=\int_0^\infty f(z,t)\,e^{-\beta t}\,dt \tag{2.5}$$

и учитывая начальное условие

$$v(z,0)=0 \tag{2.6}$$

для изображения $V(z,\beta)$ получим уравнение

$$-\frac{1}{R_\delta^*}V''+(\beta+N^*)V=D(\beta) \tag{2.7}$$

где

$$\frac{1}{R_\delta^*}=\frac{1}{R^*}\left(1+\frac{\delta s}{1-s}\xi\right)-\frac{1}{R_i^*}\frac{\delta}{1-s}\xi \tag{2.8}$$

$$D(\beta)=\left[1-\frac{Zs}{1+Zs}\xi(\delta+i\omega_e\tau_0)\right]\Psi(\beta)+iN^*\frac{\varphi_0}{\beta} \tag{2.9}$$

Учитывая граничное условие

$$V(\pm 1,\beta)=0 \tag{2.10}$$

находим решение уравнения (2.7)

$$V(z,\beta)=\frac{D(\beta)}{\beta+N^*}\left[1-\frac{\operatorname{ch} z\sqrt{R_\delta^*(\beta+N^*)}}{\operatorname{ch}\sqrt{R_\delta^*(\beta+N^*)}}\right] \tag{2.11}$$

Теорема обращения Римана — Меллина дает

$$v(z,t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}\frac{D(\beta)}{\beta+N^*}\left[1-\frac{\operatorname{ch} z\sqrt{R_\delta^*(\beta+N^*)}}{\operatorname{ch}\sqrt{R_\delta^*(\beta+N^*)}}\right]e^{\beta t}\,d\beta \tag{2.12}$$

Используя теорему о свертке, уравнение (2.12) можно переписать в следующем виде:

$$v(z,t)=\int_0^t\left\{\left[1-\frac{Zs}{1+Zs}\xi(\delta+i\omega_e\tau_0)\right]\psi(t-\tau)+\right.$$

$$\left.+iN^*\varphi_0\right\}\frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}\left[1-\frac{\operatorname{ch} z\sqrt{R_\delta^*(\beta+N^*)}}{\operatorname{ch}\sqrt{R_\delta^*(\beta+N^*)}}\right]\frac{e^{\beta\tau}}{\beta+N^*}\,d\beta d\tau \tag{2.13}$$

Внутренний интеграл в (2.13) легко берется при помощи теоремы вычетов, и общее решение при произвольном перепаде давлений $\psi(t)$ окончательно принимает вид

$$v(z,t)=2\int_0^t\left\{\left[1-\frac{Zs}{1+Zs}\xi(\delta+i\omega_e\tau_0)\right]\psi(t-\tau)+\right.$$

$$\left.+iN^*\varphi_0\right\}\exp(-N^*\tau)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\cos z\lambda_k}{\lambda_k}\exp\frac{-\lambda_k^2\tau}{R_\delta^*}d\tau \qquad (2.14)$$

где

$$\lambda_k=\frac{2k+1}{2}\pi \qquad (k=0,1,2,\ldots) \qquad (2.15)$$

§ 3. Рассмотрим случай пульсирующего перепада давлений. Пусть ν — безразмерная циклическая частота вынуждающего перепада давлений. В (2.14) положим $\psi(t)=\psi_0\cos\nu t$. Выполняя интегрирование и суммируя входящие в стационарный режим тригонометрические ряды, получим решение в виде

$$v(z,t)=\frac{\psi_0}{(N^{*2}+\nu^2)A^2}\left[1-\frac{Zs}{1+Zs}\xi(\delta+i\omega_e\tau_0)\right][(N^*\cos\nu t+$$

$$+\nu\sin\nu t)(A^2-\operatorname{ch}zr_1\operatorname{ch}r_1\cos zr_2\cos r_2-\operatorname{sh}zr_1\operatorname{sh}r_1\sin zr_2\sin r_2)+$$

$$+(N^*\sin\nu t-\nu\cos\nu t)(\operatorname{sh}zr_1\operatorname{ch}r_1\sin zr_2\cos r_2-\operatorname{ch}zr_1\operatorname{sh}r_1\cos zr_2\sin r_2)]+$$

$$+i\varphi_0\left(1-\frac{\operatorname{ch}z\sqrt{R_\delta^*N^*}}{\operatorname{ch}\sqrt{R_\delta^*N^*}}\right)+2R_\delta^*\exp(-N^*t)\left\{\left[1-\frac{Zs}{1+Zs}\xi(\delta+i\omega_e\tau_0)\right]\times\right.$$

$$\times\psi_0\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{(\lambda_k^2+R_\delta^*N^*)\cos z\lambda_k}{\lambda_k[(\lambda_k^2+R_\delta^*N^*)^2+R_\delta^{*2}\nu^2]}\exp\frac{-\lambda_k^2t}{R_\delta^*}+$$

$$\left.+iN^*\varphi_0\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\cos z\lambda_k}{\lambda_k(\lambda_k^2+R_\delta^*N^*)}\exp\frac{-\lambda_k^2t}{R_\delta^*}\right\} \qquad (3.1)$$

где

$$A=\operatorname{ch}^2r_1\cos^2r_2+\operatorname{sh}^2r_1\sin^2r_2 \qquad (3.2)$$

$$r_{1,2}=\sqrt{{}^1/_2R_\delta^*(\sqrt{N^{*2}+\nu^2}\pm N^*)} \qquad (3.3)$$

Ряды, входящие в (3.1), представляют переходный режим, осуществляемый в виде затухающих гармонических колебаний во времени, причем вынуждающая сила не меняет частоты этих колебаний, влияя только на их амплитуду. Остальные слагаемые дают стационарный режим, содержащий, в частности, вынужденные колебания частоты ν.

Интересно отметить, что анизотропия проводимости позволяет подбором частоты ν достигать максимумов амплитуд вынужденных колебаний.

Для простоты покажем это для случая невязкой среды, когда решение (3.1) принимает вид

$$v(z,t)=\frac{\psi_0}{N^{*2}+\nu^2}\left[1-\frac{Zs}{1+Zs}\xi(\delta+i\omega_e\tau_0)\right](N^*\cos\nu t+\nu\sin\nu t)+$$

$$+i\varphi_0-\left\{\frac{\psi_0N^*}{N^{*2}+\nu}\left[1-\frac{Zs}{1+Zs}\xi(\delta+i\omega_e\tau_0)\right]+i\varphi_0\right\}\exp(-N^*t) \qquad (3.4)$$

В целях дальнейшего упрощения будем считать газ слабо ионизованным ($s \ll 1$) и внешнее электрическое поле отсутствующим ($\varphi_0 = 0$). Тогда для продольной скорости стационарного режима (ψ_0 — вещественное число) получим выражение

$$\overset{\circ}{u}_x(z, t) = \sqrt{f_1^2 + f_2^2}\cos\left(\nu t - \operatorname{arc\,tg}\frac{f_1}{f_2}\right) \tag{3.5}$$

где

$$f_1 = \frac{\psi_0\nu(\alpha^2 - \beta^2 + \nu^2)}{(\alpha^2 - \beta^2 + \nu^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2}, \qquad f_2 = \frac{\psi_0\alpha(\alpha^2 + \beta^2 + \nu^2)}{(\alpha^2 - \beta^2 + \nu^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2} \tag{3.6}$$

$$\alpha = \frac{N(1 + 2\omega_i\tau_{ia}\omega_e\tau_{ea})}{(1 + 2\omega_i\tau_{ia}\omega_e\tau_{ea})^2 + (\omega_e\tau_{ea})^2}, \qquad \beta = \frac{N\omega_e\tau_{ea}}{(1 + 2\omega_i\tau_{ia}\omega_e\tau_{ea})^2 + (\omega_e\tau_{ea})^2} \tag{3.7}$$

Исследуя на экстремум амплитуду $\sqrt{f_1^2 + f_2^2}$, получим, что ее максимум достигается при

$$\nu^2 = \alpha^2\left(\sqrt{\varepsilon^4 + 4\varepsilon^2} - 1\right) \qquad \left(\varepsilon = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\omega_e\tau_{ea}}{1 + 2\omega_i\tau_{ia}\omega_e\tau_{ea}}\right) \tag{3.8}$$

Из (3.8) следует, что указанный максимум может иметь место только при

$$\varepsilon \geqslant \sqrt{\sqrt{5} - 2} \approx 0.486 \tag{3.9}$$

что и будет в данном случае эффектом анизотропии проводимости.

В изотропном же случае, когда $\omega_e\tau_{ea} \ll 1$ и $\varepsilon \ll 1$, амплитуда имеет вид

$$\sqrt{f_1^2 + f_2^2} = \frac{\psi_0}{\sqrt{N^2 + \nu^2}} \tag{3.10}$$

т. е. является монотонно убывающей функцией частоты ν.

Отметим также, что наличие в знаменателе выражения (3.8) для ε параметра $\omega_i\tau_{ia}$ ограничивает сверху величину магнитного поля, при котором справедливо (3.9):

$$\omega_i\tau_{ia} < \frac{1}{2\sqrt{\sqrt{5} - 2}} \tag{3.11}$$

т. е. при достаточно сильных магнитных полях эффект «скольжения» ионов относительно нейтралов гасит эффект наличия экстремальной частоты. Аналогично, для поперечной (холловской) стационарной скорости u_y° будем иметь

$$u_y^\circ = -\sqrt{f_3^2 + f_4^2}\cos\left(\nu t - \operatorname{arc\,tg}\frac{f_3}{f_4}\right) \tag{3.12}$$

где

$$f_3 = \beta\psi_0\frac{2\alpha\nu}{(\alpha^2 - \beta^2 + \nu^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2}, \qquad f_4 = \beta\psi_0\frac{\alpha^2 + \beta^2 - \nu^2}{(\alpha^2 - \beta^2 + \nu^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2} \tag{3.13}$$

Здесь максимум амплитуды достигается при

$$\nu^2 = \alpha^2(\varepsilon^2 - 1) \tag{3.14}$$

что имеет смысл при

$$\varepsilon \geqslant 1, \qquad \omega_i\tau_{ia} < {}^1/_2 \tag{3.15}$$

§ 4. Рассмотрим случай постоянного перепада давлений. Полагая $\nu = 0$, из (3.1) получим решение задачи для случая постоянного перепада давлений $\psi = \psi_0$

$$v(z, t) = \frac{\Delta}{N^*}\left(1 - \frac{\operatorname{ch} zM_\delta^*}{\operatorname{ch} M_\delta^*}\right) +$$
$$+ 2R_\delta^*\Delta\exp(-N^* t)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}\cos z\lambda_k}{\lambda_k(\lambda_k^2 + M_\delta^{*2})}\exp\frac{-\lambda_k^2}{R_\delta^*}t \tag{4.1}$$

Здесь

$$\Delta = \left[1 - \frac{Zs}{1+Zs}\,\xi\,(\delta + i\omega_e\tau_0)\right]\psi_0 + iN^*\varphi_0 \tag{4.2}$$

$$M_\delta^{*2} = R_\delta^*N^* = \xi M^{*2}M_i^{*2}\left[M_i^{*2}\left(1 + \frac{\delta s}{1-s}\,\xi\right) - M^{*2}\frac{\delta}{1-s}\,\xi\right]^{-1} \tag{4.3}$$

Комплексные числа Гартмана M^* и M_i^* даются формулами

$$\frac{1}{M^{*2}} = \frac{1}{R^*N} = \frac{1}{(M^{(2)})^2} + i\frac{1}{(M^{(4)})^2},$$

$$\frac{1}{M_i^{*2}} = \frac{1}{R_i^*N} = \frac{1}{(M_i^{(2)})^2} + i\frac{1}{(M_i^{(4)})^2} \tag{4.4}$$

где

$$M^{(k)} = \sqrt{R^{(k)}N} = B_0a\left(\frac{\sigma_0}{\eta^{(k)}}\right)^{1/2}$$

$$M_i^{(k)} = \sqrt{R_i^{(k)}N} = B_0a\left(\frac{\sigma_0}{\eta_i^{(k)}}\right)^{1/2} \qquad (k=2,4) \tag{4.5}$$

Первое слагаемое в (4.1) соответствует стационарному режиму рассматриваемого течения, который, в силу совместного влияния вязкости и анизотропии проводимости, представляет собой гармонические колебания по координате.

Затухающие гармонические колебания во времени представляет собой и переходный режим, соответствующий второму слагаемому в (4.1); при этом циклическая частота этих колебаний имеет вид

$$\Omega_k = \frac{N\omega_e\tau_0}{(1+\delta)^2 + (\omega_e\tau_0)^2} - \lambda_k^2\left\{\frac{1}{R^{(4)}} + \frac{\delta s}{(1-s)\left[(1+\delta)^2+(\omega_e\tau_0)^2\right]}\times\right.$$

$$\left.\times\left[(1+\delta)\left(\frac{1}{R^{(4)}} - \frac{1}{sR_i^{(4)}}\right) - \omega_e\tau_0\left(\frac{1}{R^{(2)}} - \frac{1}{sR_i^{(2)}}\right)\right]\right\} \tag{4.6}$$

Рассмотрим теперь некоторые частные случаи найденного решения.

1. При отсутствии анизотропии проводимости ($\omega_e\tau_0 \ll 1$) будем иметь для продольной составляющей скорости u_x обычный гартмановский установившийся режим и апериодический во времени переходный режим, причем поперечная составляющая скорости $u_y \equiv 0$, если $P_y = E_{0x} \equiv 0$.

2. Если имеется анизотропия проводимости, но отсутствует анизотропия вязкости, в решении следует положить $\omega_i\tau_i\theta \ll 1$ и $\omega_i\tau_{ia} \ll 1$. Считая дополнительно газ слабо ионизованным ($s \ll 1$) и внешнее электрическое поле отсутствующим ($\varphi_0 = 0$), будем иметь для скорости выражение, совпадающее с приведенным в работе [6].

Отметим также, что анизотропия проводимости приводит к периодическому во времени переходному режиму с циклической частотой

$$\Omega = N\frac{\omega_e\tau_0}{1+(\omega_e\tau_0)^2} \tag{4.7}$$

В случае невязкой среды при $\omega_i\tau_{ia} \ll 1$ (отсутствие «скольжения» ионов) из (3.4) получим

$$v(z,t) = \left[\frac{\psi_0}{N}\left(1 + i\frac{\omega_e\tau_0}{1+Zs}\right) + i\varphi_0\right][1 - \exp(-N^*t)] \tag{4.8}$$

Полагая $\psi_0 = P_x$, $\varphi_0 = 0$, для скоростей u_x° и u_y° стационарного режима будем иметь

$$u_x^\circ = \frac{P_x}{N}, \qquad u_y^\circ = -\frac{P_x}{N}\frac{\omega_e\tau_0}{1+Zs} \tag{4.9}$$

Отсюда видно, что с ростом степени ионизации s имеет место снижение u_x° за счет соответствующего роста проводимости σ_0 и еще более эффективное снижение холловской скорости u_y°, что связано с усилением электрического тока и, следовательно, увеличением тормозящего действия пондеромоторной силы.

3. Учет эффектов анизотропии вязкости и «скольжения» ионов относительно нейтралов приводит к значительному усложнению картины течения. В частности, как видно из (4.6), наличие анизотропии вязкости приводит к спектру частот переходного режима вместо одной частоты (4.7) при $\omega_i\tau_i\theta \ll 1$. Например, для полностью ионизованного газа $(s = 1)$

$$\Omega_k = \frac{N\omega_e\tau_{ei}}{1+(\omega_e\tau_{ei})^2} - \lambda_k^2\frac{1}{R_i^{(4)}} \tag{4.10}$$

Отметим также, что получаемый из (4.1) стационарный режим для полностью ионизованного газа совпадает с результатами работы [7]. Наконец, учет «скольжения» ионов в формулах (4.9) дает

$$u_x^\circ = \frac{P_x}{N}\left[1 + \frac{2(1-s)^2\omega_i\tau_{ia}\omega_e\tau_0}{1+Zs}\right], \qquad u_y^\circ = -\frac{P_x}{N}\frac{\omega_e\tau_0}{1+Zs} \tag{4.11}$$

Отсюда видно, что «скольжение» ионов не сказывается на холловской скорости стационарного режима, увеличивая при данной $s \neq 1$ продольную составляющую скорости.

Посупила 7 III 1964

Физико-технический институт
АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Чекмарев И. Б. Установившееся течение слабо ионизованного газа между параллельными пластинами с учетом анизотропии проводимости. ПММ, 1961, т. 25, вып. 3.
2. Sherman A., Sutton G. W. The Combined Effect of Tensor Conductivity and Viscosity on an MHD-Generator with Segmented Electrodes. ARS (Preprint), 2001, 1961 (русск. пер. в сб. «Плазма в магнитном поле и прямое преобразование тепловой энергии в электрическую», Госатомиздат, 1962).
3. Баранов В. Б. Установившееся течение ионизованного газа в плоском канале с учетом анизотропии проводимости. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1961, № 3.
4. Sato H. J. The Hall Effect in the Viscous Flow of Jonized Gas between Parallel Plates under Transverse Field. J. Phys. Soc. Japan, 1961, v. 16, No 7 (русск. пер. в сб. «Плазма в магнитном поле и прямое преобразование тепловой энергии в электрическую», Госатомиздат, 1962).
5. Сахновский Э. Г., Уфлянд Я. С., Влияние анизотропии проводимости на неустановившееся движение проводящего газа в плоском канале. ПММ, 1962, т. 26, вып. 3.
6. Уфлянд Я. С., Неустановившееся плоскопараллельное течение вязкого электропроводного газа с учетом анизотропии проводимости. ПММ, 1962, т. 26, вып. 5.
7. Губанов А. И. и Пушкарев О. Е., Задача Гартмана в магнитной плазмодинамике, Ж. техн. физ., 1961, № 5.
8. Сахновский Э. Г. Одножидкостные уравнения динамики частично ионизованного газа в сильном магнитном поле. ПММ, 1964, т. 28, вып. 3.