Прикладная математика и механика. Том 28, 1964

РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ОБ ОДНОМЕРНОМ НЕУСТАНОВИВШЕМСЯ ДВИЖЕНИИ ПРОВОДЯЩЕГО ГАЗА ПОД ДЕЙСТВИЕМ СИЛЬНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

Г. М. Бам-Зеликович

(Москва)

Система уравнений одномерного движения проводящего газа (плазмы) под действием сильных электромагнитных полей для случая малых магнитных чисел Рейнольдса сведена путем соответствующего выбора переменных к одному уравнению. Исследованы автомодельные решения этого уравнения, а также дано решение задачи о движении проводящего газа в безграничном канале под действием переменного электромагнитного поля.

1. Рассмотрим одномерное неустановившееся движение плазмы (проводящего газа). Кроме обычных предположений, при которых движение плазмы можно считать одномерным, будем предполагать, что в рассматриваемых случаях электромагнитные силы намного больше сил давления, так что в уравнении движения можно пренебречь членом, содержащим градиент давления. Соответствующие оценки, когда это предположение справедливо, имеются, например, в [1]. При этом уравнения одномерного неустановившегося движения плазмы под действием электромагнитных сил имеют следующий вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{1.1}$$

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} + \rho u\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{4\pi}H\frac{\partial H}{\partial x}, \qquad \frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{4\pi\sigma}{c}\left(E - \frac{1}{c}uH\right) \tag{1.2}$$

Здесь t — время, x — координата вдоль оси канала, ρ — плотность, u — скорость плазмы, H — напряженность магнитного и E — электрического поля, σ — проводимость, которую будем считать постоянной, и c — скорость света в пустоте.

Введем вместо x новое независимое переменное m по формуле

$$m = \int_0^x \rho\, dx - \int_0^t \rho_{00}u_{00}\, dt \tag{1.3}$$

где ρ_{00} и u_{00} — значения плотности ρ и скорости u при $x = 0$. Физический смысл лагранжевой координаты m можно выяснить, если заметить, что первый интеграл в формуле (1.3) представляет массу газа, отнесенную к единице площади сечения канала, находящуюся в данный момент времени t между начальным сечением и сечением с координатой x. Второй же интеграл в (1.3) дает всю массу газа, которая втекла в канал через сечение

$x = 0$ за время от $t = 0$ до рассматриваемого момента времени t. Следовательно, m есть с обратным знаком масса газа, заключенного между частицей, находящейся в момент t в сечении канала с координатой x, и частицей газа, прошедшей начало координат в момент $t = 0$.

Дифференцируя (1.3) по x и t, получаем

$$\frac{\partial m}{\partial x} = \rho, \qquad \frac{\partial m}{\partial t} = \int_0^x \frac{\partial \rho}{\partial t} dx - \rho_{00}u_{00} = -\rho u$$

Здесь для последнего соотношения использовано уравнение неразрывности (1.1), в силу которого интеграл

$$\int_0^x \frac{\partial \rho}{\partial t} dx = -\rho u + \rho_{00}u_{00}$$

Замечая еще, что

$$\frac{\partial x}{\partial m} = \frac{1}{\partial m / \partial x} = \frac{1}{\rho}, \qquad \frac{\partial x}{\partial t} = -\frac{\partial m}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial m} = u \tag{1.4}$$

преобразуем уравнения (1.1), (1.2) к независимым переменным t и m

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho^2 \frac{\partial u}{\partial m} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{4\pi} H \frac{\partial H}{\partial m}, \quad \rho \frac{\partial H}{\partial m} = -\frac{4\pi\sigma}{c}\left(E - \frac{1}{c} uH\right) \tag{1.5}$$

Эта система уравнений легко может быть сведена к одному уравнению. Проделаем это преобразование в том случае, когда магнитное число Рейнольдса таково, что можно пренебречь индуцированным магнитным полем по сравнению с внешним магнитным полем.

Исключая в этом случае $\partial H / \partial m$, получим вместо (1.5)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho^2 \frac{\partial u}{\partial m} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\sigma}{c\rho} H \left(E - \frac{1}{c} uH\right) \tag{1.6}$$

где E и H являются заданными функциями x и t.

Введем теперь новую искомую функцию x. Используя формулы (1.4), получим, что первое уравнение (1.6) будет тождественно удовлетворено, а второе даст

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\sigma H^2}{c^2}\left(\frac{cE}{H} - \frac{\partial x}{\partial t}\right)\frac{\partial x}{\partial m} \tag{1.7}$$

Если в начальный момент времени задано распределение скорости u_0 и плотности ρ_0 плазмы по длине канала, то по формуле (1.3) можно определить $m\,(x_0)$. Вычисляя обратную функцию $x_0\,(m)$ и замечая, что $u = x_t'$, получим начальные условия в следующем виде:

$$x = x_0\,(m), \qquad x_t' = u_0\,(m) \quad \text{при } t = 0 \tag{1.8}$$

В общем случае ограниченного канала, кроме начальных условий (1.8), необходимо еще задавать граничные условия. Принимая, что вход в канал находится в сечении $x = 0$, можно в качестве граничных условий задавать при $x = 0$ скорость и расход (плотность) газа, как функции времени.

Задание этих величин позволяет определить $m = m(t)$ при $x = 0$.

Таким образом, в переменных m, t граничные условия будут выглядеть так:

$$x = 0, \qquad x_t' = u_{00}(t) \quad \text{при } m = m(t)$$

Уравнение (1.7) является нелинейным уравнением второго порядка относительно неизвестной функции x. Исследование его решения в общем виде представляет большие трудности.

Поэтому рассмотрим прежде всего подробно тот частный случай, когда движение таково, что $E \gg c^{-1}$ u H и внешнее электромагнитное поле зависит только от времени. Тогда в уравнении (1.7) в правой части можно пренебречь вторым членом по сравнению с первым. При этом получаем

$$\partial^2 x / \partial t^2 = f(t) \partial x / \partial m \tag{1.9}$$

где для сокращения письма введено обозначение

$$(\sigma / c)\, E\,(t) H(t) = f(t)$$

2. Рассмотрим прежде всего автомодельные движения. Пусть в уравнение (1.9), граничные и начальные условия входит n размерных констант $a_1, \ldots, a_n$. Примем за независимые размерности величин x, t и m. Без ограничения общности можем предположить, что a_1 содержит размерность x. Тогда, комбинируя $a_2, \ldots, a_n$ с a_1, можно вместо $a_2, \ldots, a_n$ получить новые $n - 1$ констант $a_2', \ldots, a_n'$, которые не будут содержать размерности x. Для того чтобы уравнение (1.9) допускало автомодельные решения, необходимо, чтобы среди констант $a_2', \ldots, a_n'$ была бы всего одна с независимой размерностью [2]. Функция $f(t)$, входящая в уравнение (1.9), может быть представлена в виде

$$f(t) = a_0 f_1(t / t_0)$$

где размерность константы $[a_0] = [m / t^2]$, а f_1 — безразмерная функция. Так как размерности a_0 и t_0 независимы, то автомодельные решения будут только в том случае, когда $f(t)$ имеет вид

$$f(t) = kt^\alpha \tag{2.1}$$

Заметим далее, не проводя выкладок, что, если функции, входящие в начальные или граничные условия, не равны тождественно нулю, то они должны иметь определенный вид, чтобы не появилось новых констант с независимыми размерностями, и решение было бы автомодельным. А именно, начальные и граничные условия должны быть

$$\begin{aligned} &x = a_1 m^{\frac{\beta+1}{2+\alpha}}, \quad x_t' = a_2 m^{\frac{\beta}{2+\alpha}} \quad &&\text{при } t = 0 \\ &x = 0, \qquad x_t' = a t^\beta &&\text{при } m = a_3 t^{2+\alpha} \end{aligned} \tag{2.2}$$

При этом уравнение (1.9) будет иметь автомодельное решение вида

$$x = at^{\beta+1}\, \varphi\,(\lambda) \tag{2.3}$$

где φ — безразмерная функция, а безразмерное переменное λ равно

$$\lambda = \frac{1}{k}\, m t^{-(2+\alpha)} \tag{2.4}$$

Подставляя (2.3) в (1.9), получим обыкновенное дифференциальное уравнение для определения функции $\varphi(\lambda)$

$$\left(\frac{2+\alpha}{k}\right)^2 \lambda^2\varphi'' - \left[1 + \frac{2+\alpha}{k}\left(2\beta + 1 - \frac{2+\alpha}{k}\right)\lambda\right]\varphi' + \beta(\beta+1)\varphi = 0 \qquad (2.5)$$

Решение уравнения (2.5) содержит две произвольные постоянные. Поэтому удовлетворить одновременно двум граничным и двум начальным условиям невозможно, если константы, входящие в них, заданы произвольно (т. е. движение не будет автомодельным). Вопрос упрощается в двух случаях. Во-первых, если движение происходит в безграничном канале. Эта задача будет рассмотрена ниже, так как удается получить для безграничного канала решение и для неавтомодельного движения. И во-вторых, когда в начальный момент времени плазмы в канале нет, т. е. начальные параметры равны нулю. К этому случаю приводит ряд практически интересных задач о начальном периоде работы канала ускорителя плазмы, когда канал начинает заполняться плазмой, а электрическое и магнитное поля возрастают от нуля после включения системы.

Приводя граничные условия (2.2) к безразмерному виду, получим два краевых условия для φ

$$\varphi = 0, \qquad \varphi' = -\frac{k}{(2+\alpha)\lambda_0} \quad \text{при } \lambda = \frac{a_3}{k} = \lambda_0 \qquad (2.6)$$

В качестве примера проведем до конца решение следующей задачи: в момент времени $t = 0$ в канал начинает втекать плазма со скоростью $u = at^2$ и постоянной плотностью ρ. Электрическое и магнитное поля возрастают по такому закону, что $f(t) = 1.5t$.

Из (1.3), (2.1), (2.2), (2.4), (2.6) находим, что в рассматриваемом примере будет

$$\alpha = 1, \qquad \beta = 2, \qquad k = 1.5, \qquad \lambda_0 = -{}^1/_3 a\rho$$

Уравнение (2.5) и граничные условия (2.6) принимают вид

$$4\lambda^2\varphi'' - (1 + 6\lambda)\varphi' + 6\varphi = 0 \qquad (2.7)$$

$$\varphi = 0, \qquad \varphi' = -1/(2\lambda_0) \quad \text{при } \lambda = \lambda_0 \qquad (2.8)$$

Общий интеграл уравнения (2.7) будет

$$\varphi = (1 + 6\lambda)\left[C_1 \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{\lambda^{1.5} e^{-1/(4\lambda)} d\lambda}{(1+6\lambda)^2} + C_2\right] \qquad (2.9)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Определяя их значение из граничных условий (2.8), получим

$$C_1 = -0.5(1 + 6\lambda_0)\lambda_0^{-2.5} e^{1/(4\lambda_0)}, \qquad C_2 = 0 \qquad (2.10)$$

Подставляя (2.9) и (2.10) в (2.3), найдем искомое выражение для x

$$x = aC_1 t^3 (1 + 6\lambda) \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{\lambda^{1.5} e^{-1/(4\lambda)}}{(1+6\lambda)^2} d\lambda$$

3. Проведем теперь в общем случае решение задачи о движении плазмы в неограниченном канале. Пусть в канале, неограниченном в обе стороны, в начальный момент времени известно распределение скорости и плотности по длине канала. Требуется определить движение, возникающее из этого начального состояния под действием заданного электромагнитного поля постоянного по длине канала, но переменного по времени.

Как было показано выше, вопрос сводится к отысканию решения уравнения (1.9), удовлетворяющего начальным условиям (1.8). Будем искать решение в виде бесконечного ряда

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} [x_0^{(n)}(m)\, \psi_n(t) + u_0^{(n)}(m)\, \chi_n(t)] \tag{3.1}$$

где $x_0^{(n)}$ и $u_0^{(n)}$ — n-е производные x_0 и u_0.

Подставляя (3.1) в (1.9), найдем, что для того, чтобы (3.1) было решением, необходимо, чтобы было

$$\psi_n = \int_0^t dt \int_0^t f(t)\, \psi_{n-1}\, dt, \qquad \chi_n = \int_0^t dt \int_0^t f(t)\, \chi_{n-1} dt \tag{3.2}$$

а из начальных условий (1.8) находим

$$\psi_0 = 1, \qquad \chi_0 = t \tag{3.3}$$

Формулы (3.1) — (3.3) дают решение поставленной задачи в общем случае. Проиллюстрируем их применение на конкретном примере.

Пусть при $t = 0$ скорость плазмы $u \equiv 0$, а плотность распределена по закону

$$\rho = 1 / 2\sqrt{kx} \quad \text{при } x > 0, \qquad \rho \equiv 0 \quad \text{при } x < 0$$

Требуется определить, какое движение возникнет из этого начального состояния под действием периодического электромагнитного поля, т. е. при $f = A \sin \omega t$.

По формуле (1.3) вычисляем связь при $t = 0$ x и m. Проведя выкладки, получаем начальные условия в рассматриваемом примере в следующем виде:

$$x = km^2, \qquad x_t' = 0 \quad \text{при } t = 0 \tag{3.4}$$

По формулам (3.2) вычисляем

$$\psi_1 = A\omega^{-2} (\omega t - \sin \omega t) \tag{3.5}$$

$$\psi_2 = {}^1/_8\, A^2\omega^{-4} (17 - 2\omega^2 t^2 - 8\omega t \sin \omega t - 16 \cos \omega t - \cos 2\omega t)$$

Функции ψ_n при $n \geqslant 3$ и χ_n вычислять не надо, так как при заданных граничных условиях (3.6)

$$x_0' = 2km, \qquad x_0'' = 2k, \qquad x_0^{(n)} \equiv 0 \quad \text{при } n \geqslant 3, \qquad u_0^{(n)} \equiv 0 \quad \text{при } n \geqslant 0$$

Подставляя (3.4), (3.5), (3.6) в (3.1), получаем конечные формулы, описывающие движение плазмы

$$x = k\, [m^2 + 2A\omega^{-2} (\omega t - \sin \omega t)\, m + {}^1/_4 A^2\omega^{-4} (17 -$$
$$- 2\omega^2 t^2 - 8\omega t \sin \omega t - 16 \cos \omega t - \cos 2\omega t)] \tag{3.7}$$

Дифференцируя (3.7) по времени, вычислим скорость частиц

$$u = k[2A\omega^{-1}(1 - \cos\omega t)\, m - \\ - A^2\omega^{-3}(\omega t - 2\sin\omega t + 2\,\omega t\cos\omega t - {}^1/_2\sin 2\omega t)] \qquad (3.8)$$

Исключая из (3.7) и (3.8) m, можно найти зависимость скорости частицы от координаты x. Для того чтобы не выписывать громоздких и плохо обозримых формул, проделаем эти выкладки лишь для моментов времени $t = (2n + 1)\,\pi / \omega$ и $t = 2n\pi/\omega$. Опуская промежуточные формулы, приводим окончательный результат

$$u = \frac{Ak}{\omega}\left\{4\left(\frac{1}{k}\,x + \frac{A^2}{2\omega^4}\,[3\,(2n+1)^2\,\pi^2 - 16]\right)^{1/2} - \frac{3A}{\omega^2}\,(2n+1)\,\pi\right\} \qquad (3.9)$$

$$\text{при } t = \frac{(2n+1)\,\pi}{\omega}$$

$$u = -\,6kA^2n\pi\omega^{-3} \qquad \text{при } t = 2n\pi\omega^{-1} \qquad (3.10)$$

Из формул (3.9) и (3.10) видно, что плазма будет совершать колебательное движение, колебательное в том смысле, что скорость частицы периодически меняет знак. Однако это не будут колебания частиц около некоторого фиксированного положения равновесия. Действительно, из формулы (3.7) и начальных условий (3.4) следует, что частица, находившаяся в начальный момент в правой половине канала в точке x_0, по прошествии n периодов, т. е. $t = 2n\pi/\omega$, отклонится от своего начального положения на величину

$$x - x_0 = 2Akn\pi(2\omega^2 m - An\pi) / \omega^4 \qquad (3.11)$$

Из (3.11) видно, что для фиксированной частицы, т. е. для фиксированного m, $x - x_0$ при увеличении n рано или поздно становится отрицательным. При этом для частиц, у которых $m > A\pi / 2\omega^2$ $x - x_0$ сначала растет, а затем убывает и становится отрицательным. Таким образом, плазма совершает сложное движение, при котором частицы плазмы, колеблясь, движутся в среднем сначала вправо, а затем влево. По частицам плазмы распространяется как бы своеобразная волна, сначала замедляющая среднее движение частиц вправо, а затем вовлекающая их в усредненное движение влево.

Поступила 6 IV 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Бам-Зеликович Г. М. Одномерное неустановившееся движение проводящего газа под действием сильных электромагнитных полей. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1963, № 2.
2. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. Гостехиздат, 1957.