Прикладная математика и механика. Том 28, 1964

ТЕНЗОРНЫЕ ФУНКЦИИ ПОЛЯРНОГО И АКСИАЛЬНОГО ВЕКТОРА, СОВМЕСТИМЫЕ С СИММЕТРИЕЙ ТЕКСТУР

Ю. И. Сиротин

(Москва)

Выведен общий вид тензорных функций полярного и аксиального вектора, совместимых с симметрией текстур. Искомые функции (скаляр, полярный и аксиальный вектор, симметричный, антисимметричный и общий тензор второго ранга) представляются в виде разложения по системе линейно независимых тензоров, составленных из аргументов и так называемых геометрических тензоров посредством умножения и свертывания. Коэффициенты разложения — произвольные однозначные функции скаляров, составленных из тех же величин. Полученные разложения удовлетворяют двум практически важным условиям: 1) если компоненты тензор-функции — целые рациональные функции компонент тензорных аргументов, то коэффициенты разложения — также полиномы от своих аргументов; 2) запись каждой тензорной функции единственна, т. е. тензорная функция равна нулю только тогда, когда тождественно равны нулю все коэффициенты разложения, рассматриваемые как функции своих аргументов. Рассмотрен также частный случай таких функций — потенциальные функции. Выведенные формулы будут для векторного аргумента и анизотропной среды аналогами формулы Гамильтона — Кэли, если рассматривать последнюю как общий вид тензор-функции тензорного аргумента, совместимой с изотропностью среды.

В § 1 введены основные понятия и дана формулировка задачи, в § 2 и 3 описан общий метод ее решения. В § 4 и 5 выписаны тензорные функции вектора и аксиального вектора, совместимые с симметрией текстур. В § 6 рассмотрены потенциальные функции. В § 7 выведенные тензор-функции применены для построения инвариантных тензоров. В § 8 отмечена связь результатов с формулой Гамильтона — Кэли.

1. В различных разделах физики и механики сплошных сред находят широкое применение соотношения вида

$$\mathbf{T} = F(\mathbf{A}_{(1)}, \ldots, \mathbf{A}_{(m)}) \qquad (1.1)$$

где тензоры $\mathbf{T}$ и $\mathbf{A}_{(\mu)}$ $(\mu = 1, \ldots m)$ — так называемые полевые тензоры — описывают некоторые физические поля.

Для характеристики свойств среды в уравнения (1.1) обычно вводят материальные тензоры $\mathbf{D}_{(\sigma)}$ $(\sigma = 1, \ldots, s)$

$$\mathbf{T} = F(\mathbf{D}_{(1)}, \ldots, \mathbf{D}_{(s)}; \mathbf{A}_{(1)}, \ldots, \mathbf{A}_{(m)}) \qquad (1.2)$$

Соотношения (1.1) и (1.2) описывают тензорное поле $\mathbf{T}$, возникающее в некоторой точке среды вследствие того, что в этой же точке действуют тензорные поля $\mathbf{A}_{(\mu)}$.

Частными случаями соотношений (1.2) являются, например, общеизвестные уравнения закона Гука для анизотропных сред и их обобщения на случаи пьезоэлектрических и упруго-вязких сред. Эти уравнения, в сущности, представляют собой первые члены разложений в ряды Тейлора компонент тензора напряжений по степеням компонент тензоров деформаций и скоростей деформаций и вектора электрического поля. При необходимости учета следующих членов разложений в рассмотрение вводят материальные тензоры $\mathbf{D}_{(\sigma)}$ все более высоких рангов. Например, разложение компонент T^{ij} тензора второго ранга $\mathbf{T}$ по степеням компонент A_k вектора $\mathbf{A}$ имеет вид

$$T^{ij} = D^{ij} + D^{ij}_{..k}A^k + D^{ij}_{..kl}A^kA^l + \ldots \qquad (1.3)$$

Тензоры $\mathbf{D}_{(\sigma)}$, описывая свойства сплошной среды, должны быть инвариантны относительно точечной группы G симметрии этой среды (полевые же тензоры, разумеется, не обязаны удовлетворять этому условию). При этом учет квадратичного, кубичного и более высоких приближений требует построения тензоров высоких рангов, инвариантных относительно точечных групп. Решение этой задачи хотя и элементарно, но крайне громоздко.

Однако разложения типа (1.3) не вполне удовлетворительны не только вследствие связанных с ними технических затруднений, но и потому, что они описывают, в сущности, только полиномиальные зависимости компонент тензора $\mathbf{T}$ от компонент тензоров $\mathbf{A}_{(\mu)}$. Формально ряды, подобные (1.3), описывают любую аналитическую функцию $\mathbf{T} = F(\mathbf{A}_{(1)}, \ldots, \mathbf{A}_{(m)})$, но практически эти ряды всегда обрываются и удовлетворительная точность получается лишь в некоторой окрестности центра разложения. Кроме того, в механике сплошных сред иногда применяются и модели с неаналитической зависимостью одних тензоров от других.

В механике изотропных сред уже довольно давно перешли к рассмотрению общих функциональных связей между тензорами, совместимых с изотропностью среды. Теория таких изотропных тензорных функций изложена, например, в монографии [1]. Они широко используются в нелинейной теории упругой [2] и упруго-вязкой [3] изотропной сплошной среды. Естественно обобщить теорию тензорных функций на анизотропные сплошные среды. В данной работе эта задача решается для случая, когда точечная группа симметрии анизотропной среды — одна из предельных групп точечной симметрии Пьера Кюри [1], аргумент тензорной функции — полярный или аксиальный вектор, а сама функция — полярный или аксиальный вектор, симметричный или общий тензор второго ранга.

Для точной формулировки задачи необходимы понятия внутренней и внешней симметрии тензора. Группа внутренней симметрии [5] тензора — это в общем случае группа антисимметрии [6]. Ее операциями являются перестановки индексов, относительно которых инвариантны все компоненты тензора, а антиоперациями — перестановки, при которых все его компоненты меняют знак. Группа внутренней симметрии тензора определяется представлением τ ортогональной группы, по которому преобразуются его компоненты. Если тензор ранга r не обладает внутренней симметрией, то компоненты его преобразуются по r-й степени векторного представления V ортогональной группы: $\tau = V^r$. Если же тензор обладает нетривиальной внутренней симметрией, то τ — некоторая симметризованная r-я степень векторного представления V. Символом этой симметризованной степени будем, следуя Яну [7], обозначать внутреннюю симметрию тензора. Так, симметричность тензора ранга r по всем индексам обозначается символом r-ой симметрической степени векторного представления $[V^r]$, симметричность и антисимметричность его по s индексам $(s < r)$ — соответственно $[V^s]\,V^{r-s}$ и $\{V^s\}\,V^{r-s}$ и т. д.

[1] Анизотропные среды такой симметрии часто именуют текстурами (см., например, [4]).

Группой внешней симметрии [8] тензора [1] называется максимальная точечная группа G, относительно всех преобразований которой инвариантны все компоненты тензора: если $c_i^{i'}(g)$ — преобразования, входящие в группу G внешней симметрии тензора $A^{i_1\ldots i_r}$, и только в этом случае

$$\left(c_{i_1}^{i_1'}(g)\ldots c_{i_r}^{i_r'}(g)-\delta_{i_1}^{i_1'}\ldots\delta_{i_r}^{i_r'}\right)A^{i_1\ldots i_r}=0 \qquad (g\in G) \tag{1.4}$$

Пользуясь введенными терминами, сформулируем поставленную задачу. Пусть компоненты тензора **T** ранга r и внутренней симметрии τ — функции компонент тензора **A** ранга s, внутренней симметрии α и внешней симметрии G_A соответственно:

$$T^{i_1\ldots i_r}=F^{i_1\ldots i_r}(A^{j_1\ldots j_s}) \tag{1.5}$$

Так как **T** и **A** — тензоры, то при любом преобразовании координат $a^i_{i'}$ преобразованные компоненты тензоров **T** и **A** будут удовлетворять уравнению

$$a^{i_1}_{i'_1}\ldots a^{i_r}_{i'_r}T^{i_1'\ldots i_r'}=F^{i_1\ldots i_r}(a^{j_1}_{j'_1}\ldots a^{j_s}_{j'_s}A^{j'_1\ldots j'_s}) \tag{1.6}$$

Если же $a^i_{i'}=c^i_{i'}(g)$, $g\in G$ — одно из преобразований точечной группы симметрии среды G, то равенства (1.5) и (1.6) должны быть эквивалентны. Задача состоит в том, чтобы при заданных G, G_A, τ и α найти наиболее общий вид функций $F^{i_1\ldots i_r}$, удовлетворяющих этому требованию.

2. Компоненты тензора **T**, очевидно, должны быть инвариантны относительно всех преобразований, входящих в точечную [2] группу Γ — пересечение точечной группы G симметрии среды и группы G_A внешней симметрии тензора **A**. Совокупность тензоров, удовлетворяющих этому требованию и обладающих внутренней симметрией τ, составляет линейное пространство, размерность которого, как следует из теории представлений групп [9], равна

$$n=\frac{1}{N(\Gamma)}\sum_{g\in\Gamma}\chi_\tau(g) \tag{2.1}$$

Здесь $N(\Gamma)$ — порядок группы Γ, $\chi_\tau(g)$ — след матрицы, соответствующий элементу g группы Γ в представлении τ этой группы. Если Γ — одна из предельных точечных групп, суммирование заменяется интегрированием по группе.

Тензор **T**, как и в работах [1,4,5,10], будем искать в виде

$$\mathbf{T}=\sum_{\nu=1}^{n}f_{(\nu)}\mathbf{Q}_{(\nu)} \tag{2.2}$$

Здесь $\mathbf{Q}_{(\nu)}$ $(\nu=1,\ldots n)$ — произвольные линейно независимые тензоры внутренней симметрии τ, компоненты которых инвариантны относительно группы Γ. Так как тензоры $\mathbf{Q}_{(\nu)}$ составляют базис линейного пространства тензоров **T**, в форме (2.2) можно представить любой тензор,

[1] В работе [8], где впервые введено это понятие, употребляется термин «симметрия тензора».

[2] Группа Γ может совпадать с группой G_T внешней симметрии тензора **T**, но в общем случае является ее подгруппой.

обладающий требуемыми свойствами. Коэффициенты этого разложения $f_{(\nu)}$, как и компоненты тензоров $\mathbf{Q}_{(\nu)}$, представляют собой некоторые функции компонент тензора **A**. Для их исследования используем введенные Л. И. Седовым и В. В. Лохиным [4,11] так называемые геометрические тензоры $\mathbf{K}_{(\pi)}$ ($\pi = 1, \ldots p$) — набор p тензоров с постоянными компонентами, которые однозначно определяют точечную группу G — пересечение групп внешней симметрии этих тензоров.

Очевидно, все скаляры, составленные при помощи умножения и свертывания из геометрических тензоров $\mathbf{K}_{(\pi)}$, определяющих группу G, и из тензора **A**, представляют собой инварианты тензора **A** относительно группы G, и притом целые рациональные инварианты. Как известно [12,13], все такие инварианты могут быть получены посредством умножения и линейного комбинирования из конечного их набора $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$, называемого целым рациональным базисом. Число k базисных инвариантов может совпадать с числом

$$k_0 = \frac{1}{N(\Gamma)} \sum_{g \in \Gamma} \chi_\alpha(g) \tag{2.3}$$

функционально независимых инвариантов, но может и превышать его.

Будем называть запись инварианта $f(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$ единственной, если для того чтобы f, рассматриваемая как функция компонент $A^{j_1 \ldots j_s}$, тождественно равнялась нулю, необходимо, чтобы она тождественно равнялась нулю и как функция инвариантов $\varphi_\varkappa$, рассматриваемых как независимые аргументы. В случае $k = k_0$ каждый инвариант f единственным образом записывается в виде $f(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$. Если же $k > k_0$, выделим из числа инвариантов k_0 функционально независимых: $\varphi_1, \ldots, \varphi_{k_0}$ (назовем их главными), а остальные (дополнительные) обозначим $\psi_1, \ldots, \psi_l$ ($l = k - k_0$). Тогда можно показать [14], что любой инвариант Φ единственным образом записывается в виде

$$\Phi = f_0 + \sum_{\lambda=1}^{l} \psi_\lambda f_\lambda + \sum_{\lambda=1}^{\mu} \sum_{\mu=1}^{l} \psi_\lambda \psi_\mu f_{\lambda\mu} + \ldots \tag{2.4}$$

где f_0, f_λ, $f_{\lambda\mu}, \ldots$ — либо произвольные функции главных инвариантов, либо тождественно равны нулю, причем, начиная с некоторого числа индексов t, все $f_{\lambda_1 \ldots \lambda_t}$, $f_{\lambda_1 \ldots \lambda_t \lambda_{t+1}}, \ldots$ равны нулю (так что сумма (2.4) имеет конечное число членов). Впрочем, в рассматриваемых далее (§ 4—6) конкретных случаях $k = k_0$.

Во многих работах [14-16] принимается, что f и Φ — полиномы от инвариантов $\varphi_\varkappa$ и компонент $A_{j_1 \ldots j_s}$. От этого ограничения, как показано в [17], можно отказаться. Для произвольных функций, однако, понятие единственности записи, вполне ясное для полиномов, становится бессодержательным. Поэтому функции f далее считаются кусочно-аналитическими; для приложений этот класс функций достаточно широк, применимость к нему понятия единственности записи сомнений не вызывает.

Из тех же геометрических тензоров $\mathbf{K}_{(\pi)}$ и тензора **A** посредством умножения и свертывания можно получить также множество тензоров внутренней симметрии τ. Все они, очевидно, инвариантны относительно группы Γ. Формула (2.1) показывает, что из них можно выбрать (конечно, множеством способов) ровно n линейно независимых тензоров. Они и могут служить в качестве базиса разложения (2.2) тензоров $\mathbf{Q}_{(\nu)}$.

Тензорные функции вида

$$T^{i_1 \ldots i_r} = \sum_{\nu=1}^{n} f_{(\nu)}(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)\, Q_{(\nu)}^{i_1 \ldots i_r} \quad \text{при} \quad k = k_0 \tag{2.5}$$

или

$$T^{i_1 \ldots i_r} = \sum_{\nu=1}^{n} \Phi_{(\nu)} Q_{(\nu)}^{i_1 \ldots i_r} \quad \text{при} \quad k > k_0 \tag{2.6}$$

очевидно, удовлетворяют поставленным требованиям. Действительно, ввиду того что функции $f_{(\nu)}$ и $\Phi_{(\nu)}$, а также геометрические тензоры $\mathbf{K}_{(\varkappa)}$ инвариантны относительно преобразований, входящих в группу G, равенства (1.6) при $a_{i'}^{i} = c_{i'}^{i}(g)$, $g \in G$ оказываются просто линейными комбинациями равенств (1.5), причем переход от системы (1.5) к системе (1.6) обратим. Следовательно, системы (1.5) и (1.6) эквивалентны.

3. Учитывая, что в приложениях чаще всего применяются целые рациональные тензорные функции, естественно предъявить несколько более жесткие требования к разложениям (2.5) и (2.6). Именно, потребуем: 1) чтобы $f_{(\nu)}(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$ были полиномами от своих аргументов, если только $T^{i_1 \ldots i_r}$ — полиномы от $A^{j_1 \ldots j_s}$, 2) чтобы разложения (2.5) и (2.6) были единственны, т. е. $\mathbf{T} = 0$ только тогда, когда все $f_{(\nu)} \equiv 0$.

Избранный здесь метод — ввиду линейной независимости тензоров $\mathbf{Q}_{(\nu)}$, и единственности записи функций $f_{(\nu)}$ — заведомо удовлетворяет второму требованию, однако выполнение первого требования нуждается в проверке. Можно было бы применить для решения поставленной задачи другой метод, предложенный Ривлином [15,16] — тогда удовлетворялось бы первое требование, но возникал бы вопрос о выполнении второго.

Укажем путь проверки выполнения первого требования. Разложим мысленно тензор $\mathbf{T}$ по степеням компонент тензора $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{T} = \sum_{q} \mathbf{T}_{(q)} \tag{3.1}$$

так что компоненты тензора $\mathbf{T}_{(q)}$ — однородные полиномы степени q относительно компонент $\mathbf{A}$. Число линейно независимых [1] компонент тензора $\mathbf{T}_{(q)}$

$$m_q = \frac{1}{N(G)} \sum_{g \in G} \chi_\tau(g)\, [\chi_\alpha{}^q](g) \tag{3.2}$$

в частности,

$$m_0 = \frac{1}{N(G)} \sum_{g \in G} \chi_\tau(g) \tag{3.3}$$

Здесь $[\chi_\alpha{}^q](g)$ — след матрицы представления $[\alpha^q]$, соответствующей элементу g группы G.

С другой стороны, число m_q^* членов степени q относительно компонент $\mathbf{A}$ в сумме $\Sigma f_{(\nu)} Q_{(\nu)}^{i_1 \ldots i_r}$ легко подсчитывается методами комбинаторного анализа [18].

[1] Здесь коэффициенты линейных зависимостей — числа, а не функции компонент $\mathbf{A}$, как в (2.5) и (2.6).

Если, как это имеет место в данном случае, $k = k_0$, то число членов степени q в каждом из полиномов $f_{(\nu)}$ равно коэффициенту при t^q в формальном разложении

$$\prod_{\varkappa=1}^{k} (1 - t^{b(\varkappa)})^{-1}$$

где $b(\varkappa)$ — степень главного инварианта $\varphi_\varkappa$ относительно A. Из определения тензора $Q_{(\nu)}$ следует, что его компоненты — однородные полиномы одной и той же степени $c(\nu)$ относительно A. Поэтому $m_q{}^*$ равно коэффициенту при t^q в формальном разложении

$$F^*(t) = \sum_{\nu=1}^{n} t^{c(\nu)} \prod_{\varkappa=1}^{k} (1 - t^{b(\varkappa)})^{-1} \tag{3.4}$$

Если $k > k_0$, $F^*(t)$ находится почти столь же просто [14].

Равенство чисел m_q и $m_q{}^*$ при любых q и будет критерием выполнения первого требования.

Все приводимые в § 4 и § 5 формулы проверены: а) на линейную независимость тензоров $Q_{(\nu)}$ и б) на равенство чисел m_q и $m_q{}^*$ при всех q.

Числа m_q, однако, удобнее вычислять не по формуле (3.2). Разложим представление $\tau \times [\alpha^q]$ ортогональной группы на неприводимые представления.

Если q нечетно, то для векторного представления ($\alpha = V = D_1{}^u$) имеем

$$[\alpha^q] = D_1{}^u + D_3{}^u + \ldots + D_q^u$$

а для аксиально-векторного ($\alpha = \{V^2\} = (D^g{}_1)$

$$[\alpha^q] = D_1{}^g + D_3{}^g + \ldots + D_q{}^g$$

Если же q четно, то в обоих случаях

$$[\alpha^q] = D_0{}^g + D_2{}^g + \ldots + D_q^g$$

где $D_j{}^g$ и $D_j{}^u$ общепринятые обозначения четных и нечетных неприводимых представлений веса j ортогональной группы (см. [19]). Разложение τ на неприводимые представления ортогональной группы и последующее перемножение неприводимых представлений производится элементарно [9]. Величина m_q равна числу единичных представлений в разложении $\tau \times [\alpha^q]$ на неприводимые представления группы G. Поэтому, если G — ортогональная группа, m_q равно числу представлений $D_0{}^g$ в разложении $\tau \times [\alpha^q]$ на неприводимые представления ортогональной группы, если G — группа вращений — сумме чисел представлений $D_0{}^g$ и $D_0{}^u$ в том же разложении. Формулы редукции неприводимых представлений ортогональной группы к представлениям ее подгрупп [7] дают возможность подсчитать число единичных представлений каждой группы в разложении $\tau \times [\alpha^q]$, т. е. найти m_q для всех остальных групп.

4. Наборы геометрических тензоров $K_{(\pi)}$, определяющих предельные точечные группы, указаны Л. И. Седовым и В. В. Лохиным [4,11]; здесь они выписаны в слегка измененном виде, более удобном для применения.

Пусть e_1, e_2, e_3 — единичные векторы декартовой системы координат, причем e_3 направлен по главной оси. Их компоненты в произвольной системе координат обозначаются ξ^i, η^i и ζ^i соответственно. Для краткости вводятся обозначения $\xi^i\xi^j \ldots \xi^k \equiv \xi^{ij\ldots k}$ и аналогично $\eta^{ij\ldots k}$ и $\zeta^{ij\ldots k}$.

Геометрические тензоры для всех предельных групп[1] имеют в этих обозначениях следующий вид:

группа $\infty / \infty \cdot m$	$g^{ik} \equiv \xi^{ik} + \eta^{ik} + \zeta^{ik}$	
группа ∞ / ∞	$g^{ik}, E^{ijk} \equiv 6\xi^{[i}\eta^{j}\zeta^{k]}$	
группа $m \cdot \infty : m$	$\zeta^{ik}, \quad \gamma^{ik} \equiv g^{ik} - \zeta^{ik}$	
группа $\infty : 2$	$\zeta^{ik}, \quad \gamma^{ik}, \quad \zeta^{i}\Omega^{jk}$	$(\Omega^{jk} \equiv 2\xi^{[j}\eta^{k]})$
группа $\infty \cdot m$	$\zeta^{i}, \quad \gamma^{ik}$	
группа $\infty : m$	$\zeta^{ik}, \quad \gamma^{ik}, \quad \Omega^{ik}$	
группа ∞	$\zeta^{i}, \quad \gamma^{ik}, \quad \Omega^{ik}$	

Далее выписаны базисные инварианты $\varphi_\varkappa$ вектора **B**, скалярные функции f (**B**), вектор-функции **V** (**B**), антисимметричные **W** (**B**) и симметричные **S** (**B**) тензор-функции второго ранга, совместимые с симметрией анизотропной среды, для каждой из семи предельных точечных групп.

Группы $\infty / \infty \cdot m$ и ∞ / ∞

$$\varphi = g_{\alpha\beta}B^{\alpha}B^{\beta}, \qquad f = f(\varphi); \qquad V^{i} = fB^{i}, \qquad S^{ik} = f_1 g^{ik} + f_2 B^{i}B^{k}$$

$$W^{ik} = 0 \ \text{ для } \infty/\infty\cdot m, \qquad W^{ik} = fE^{ik}_{\cdot\cdot\alpha}B^{\alpha} \ \text{ для } \infty/\infty \tag{4.1}$$

Группа $m \cdot \infty : m$

$$\varphi_1 = \zeta_{\alpha\beta}B^{\alpha}B^{\beta}, \qquad \varphi_2 = \gamma_{\alpha\beta}B^{\alpha}B^{\beta}; \qquad f = f(\varphi_1, \varphi_2)$$

$$V^{i} = (f_1\zeta^{i}_{\alpha} + f_2\gamma^{i}_{\alpha})\, B^{\alpha}; \qquad W^{ik} = f\zeta^{[i}_{\alpha}\gamma^{k]}_{\beta}B^{\alpha}B^{\beta}$$

$$S^{ik} = f_1\zeta^{ik} + f_2\gamma^{ik} + (f_3\gamma^{i}_{\alpha}\gamma^{k}_{\beta} + f_4\zeta^{(i}_{\alpha}\gamma^{k)}_{\beta})\, B^{\alpha}B^{\beta} \tag{4.2}$$

Группа $\infty : 2$

$$\varphi_1 = \zeta_{\alpha\beta}B^{\alpha}B^{\beta}, \qquad \varphi_2 = \gamma_{\alpha\beta}B^{\alpha}B^{\beta}, \qquad f = f(\varphi_1, \varphi_2)$$

$$V^{i} = (f_1\zeta^{i}_{\alpha} + f_2\gamma^{i}_{\alpha})\, B^{\alpha} + f_3\zeta_{\alpha}\Omega^{i}_{\cdot\beta}B^{\alpha}B^{\beta}$$

$$W^{ik} = (f_1\zeta_{\alpha}\Omega^{ik} + f_2\zeta^{[i}\Omega^{k]}_{\cdot\alpha})\, B^{\alpha} + f_3\zeta^{[i}_{\alpha}\gamma^{k]}_{\beta}B^{\alpha}B^{\beta}$$

$$S^{ik} = f_1\zeta^{ik} + f_2\gamma^{ik} + f_3\zeta^{(i}\Omega^{k)}_{\cdot\alpha}B^{\alpha} + (f_4\gamma^{i}_{\alpha}\gamma^{k}_{\beta} + f_5\zeta^{(i}_{\alpha}\gamma^{k)}_{\beta})\, B^{\alpha}B^{\beta} + f_6\zeta_{\alpha}\Omega^{(i}_{\cdot\beta}\gamma^{k)}_{\lambda}B^{\alpha}B^{\beta}B^{\lambda} \tag{4.3}$$

Группа $\infty \cdot m$

$$\varphi_1 = \zeta_{\alpha}B^{\alpha}, \qquad \varphi_2 = \gamma_{\alpha\beta}B^{\alpha}B^{\beta}; \qquad f = f(\varphi_1, \varphi_2)$$

$$V^{i} = f_1\zeta^{i} + f_2\gamma^{i}_{\alpha}B^{\alpha}; \qquad W^{ik} = f\zeta^{[i}\gamma^{k]}_{\alpha}B^{\alpha}$$

$$S^{ik} = f_1\zeta^{ik} + f_2\gamma^{ik} + f_3\zeta^{(i}\gamma^{k)}_{\alpha}B^{\alpha} + f_4\gamma^{i}_{\alpha}\gamma^{k}_{\beta}B^{\alpha}B^{\beta} \tag{4.4}$$

Группа $\infty : m$

$$\varphi_1 = \zeta_{\alpha\beta}B^{\alpha}B^{\beta}, \qquad \varphi_2 = \gamma_{\alpha\beta}B^{\alpha}B^{\beta}; \qquad f = f(\varphi_1, \varphi_2)$$

$$V^{i} = (f_1\zeta^{i}_{\alpha} + f_2\gamma^{i}_{\alpha} + f_3\Omega^{i}_{\cdot\alpha})\, B^{\alpha}, \qquad W^{ik} = f_1\Omega^{ik} + (f_2\zeta^{[i}_{\alpha}\gamma^{k]}_{\beta} + f_3\zeta^{[i}_{\alpha}\Omega^{k]}_{\cdot\beta})\, B^{\alpha}B^{\beta}$$

$$S^{ik} = f_1\zeta^{ik} + f_2\gamma^{ik} + (f_3\gamma^{i}_{\alpha}\gamma^{k}_{\beta} + f_4\zeta^{(i}_{\alpha}\gamma^{k)}_{\beta} + f_5\zeta^{(i}_{\alpha}\Omega^{k)}_{\cdot\beta} + f_6\gamma^{(i}_{\alpha}\Omega^{k)}_{\cdot\beta})\, B^{\alpha}B^{\beta} \tag{4.5}$$

Группа ∞

$$\varphi_1 = \zeta_{\alpha}B^{\alpha}, \qquad \varphi_2 = \gamma_{\alpha\beta}B^{\alpha}B^{\beta}, \qquad f = f(\varphi_1, \varphi_2)$$

$$V^{i} = f_1\zeta^{i} + (f_2\gamma^{i}_{\alpha} + f_3\Omega^{i}_{\cdot\alpha})\, B^{\alpha}, \qquad W^{ik} = f_1\Omega^{ik} + (f_2\zeta^{[i}\gamma^{k]}_{\alpha} + f_3\zeta^{[i}\Omega^{k]}_{\cdot\alpha})\, B^{\alpha}$$

$$S^{ik} = f_1\zeta^{ik} + f_2\gamma^{ik} + (f_3\zeta^{(i}\gamma^{k)}_{\alpha} + f_4\zeta^{(i}\Omega^{k)}_{\cdot\alpha})\, B^{\alpha} + (f_5\gamma^{i}_{\alpha}\gamma^{k}_{\beta} + f_6\gamma^{(i}_{\alpha}\Omega^{k)}_{\cdot\beta})\, B^{\alpha}B^{\beta} \tag{4.6}$$

---

[1] Группы обозначаются по А. В. Шубникову [6].

5. Аксиальный вектор **H** записан здесь (как и **W** в предыдущем параграфе) в виде дуального ему антисимметричного тензора второго ранга H^{ik}.

Группы $\infty / \infty\cdot m$ и ∞ / ∞

$$\varphi = g_{\alpha\lambda} g_{\beta\mu} H^{\alpha\beta} H^{\lambda\mu}; \qquad f = f(\varphi)$$
$$W^{ik} = f H^{ik}; \qquad S^{ik} = f_1 g^{ik} + f_2 g_{\alpha\beta} H^{i\alpha} H^{k\beta}$$
$$V^i = 0 \quad \text{для } \infty/\infty\cdot m, \qquad V^i = f E^{i}_{\cdot\alpha\beta} H^{\alpha\beta} \quad \text{для } \infty/\infty \tag{5.1}$$

Группы $m\cdot\infty : m$, $\infty : 2$, $\infty\cdot m$

$$\varphi_1 = \gamma_{\alpha\lambda}\gamma_{\beta\mu} H^{\alpha\beta} H^{\lambda\mu}, \qquad \varphi_2 = \gamma_{\alpha\lambda}\zeta_{\beta\mu} H^{\alpha\beta} H^{\lambda\mu}, \qquad f = f(\varphi_1, \varphi_2)$$
$$W^{ik} = (f_1 \zeta_\alpha^{[i} \gamma_\beta^{k]} + f_2 \gamma_\alpha^i \gamma_\beta^k) H^{\alpha\beta} + f_3 \zeta_\alpha^{[i} \gamma_\lambda^{k]} \gamma_{\beta\mu} H^{\alpha\beta} H^{\lambda\mu}$$
$$S^{ik} = f_1 \zeta^{ik} + f_2 \gamma^{ik} + f_3 \zeta_\alpha^{(i} \gamma_\beta^{k)} H^{\alpha\beta} + (f_4 \gamma_\alpha^i \gamma_\lambda^k \zeta_{\beta\mu} + f_5 \zeta_\alpha^{(i} \gamma_\lambda^{k)} \gamma_{\beta\mu}) H^{\alpha\beta} H^{\lambda\mu} +$$
$$+ f_6 \gamma_\alpha^{(i} \gamma_\lambda^{k)} \gamma_{\beta\rho} \gamma_{\mu\sigma} H^{\alpha\beta} H^{\lambda\mu} H^{\rho\sigma}$$
$$V^i = 0 \quad \text{для } m\cdot\infty : m$$
$$V^i = (f_1 \zeta^i \Omega_{\alpha\beta} + f_2 \zeta_\alpha \Omega^{i}_{\cdot\beta}) H^{\alpha\beta} + f_3 \zeta_\alpha \Omega_{\beta\lambda} \gamma_\mu^i H^{\alpha\beta} H^{\lambda\mu} \quad \text{для } \infty : 2$$
$$V^i = f_1 \zeta^i + f_2 \zeta_\alpha \gamma_\beta^i H^{\alpha\beta} + f_3 \zeta_\alpha \gamma_\lambda^i \gamma_{\beta\mu} H^{\alpha\beta} H^{\lambda\mu} \quad \text{для } \infty\cdot m \tag{5.2}$$

Группы $\infty : m$ и ∞

$$\varphi_1 = \Omega_{\alpha\beta} H^{\alpha\beta}, \qquad \varphi_2 = \gamma_{\alpha\lambda}\zeta_{\beta\mu} H^{\alpha\beta} H^{\lambda\mu}$$
$$f = f(\varphi_1, \varphi_2), \qquad W^{ik} = f_1 \Omega^{ik} + (f_2 \zeta_\alpha^{[i} \gamma_\beta^{k]} + f_3 \zeta_\alpha^{[i} \Omega^{k]}_{\cdot\beta}) H^{\alpha\beta}$$
$$S^{ik} = f_1 \zeta^{ik} + f_2 \gamma^{ik} + (f_3 \zeta_\alpha^{(i} \Omega^{k)}_{\cdot\beta} + f_4 \zeta_\alpha^{(i} \gamma_\beta^{k)}) H^{\alpha\beta} + (f_5 \gamma_\alpha^i \gamma_\lambda^k \zeta_{\beta\mu} +$$
$$+ f_6 \gamma_\alpha^{(i} \Omega^{k)}_{\cdot\lambda} \zeta_{\beta\mu}) H^{\alpha\beta} H^{\lambda\mu}$$
$$V^i = 0 \quad \text{для } \infty : m, \qquad V^i = f_1 \zeta^i + (f_2 \gamma_\alpha^i \zeta_\beta + f_3 \Omega^{i}_{\cdot\alpha} \zeta_\beta) H^{\alpha\beta} \quad \text{для } \infty \tag{5.3}$$

6. В приложениях на материальные тензоры часто налагается дополнительное требование симметричности по индексам. Если, например, **E** — вектор напряженности, а **D** — вектор индукции электрического поля, то тензор диэлектрической проницаемости, определяющий связь между ними $D^i = \varepsilon^{i}_{\cdot k} E^k$ — должен быть симметричен: $\varepsilon_{ki} = \varepsilon_{ik}$. Из вывода этого соотношения [20] ясно, что при обобщении его на нелинейную связь $\mathbf{D} = F(\mathbf{E})$, необходимо потребовать потенциальности [1] функции F, т. е. $D^i = \partial f(\mathbf{E}) / \partial E_i$, где $f(\mathbf{E})$ — функция инвариантов вектора **E** относительно группы G симметрии среды.

Полученные результаты позволяют выписать потенциальные функции вида **V** (**B**) и **W** (**H**) (используются обозначения § 4 и 5):

группы $\infty / \infty\cdot m$, ∞ / ∞

$$V^i = 2 \frac{\partial f}{\partial \varphi} B^i \tag{6.1}$$

группы $m : \infty : m$, $\infty : 2$, $\infty : m$

$$V^i = 2 \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi_1} \zeta_\alpha^i + \frac{\partial f}{\partial \varphi_2} \gamma_\alpha^i \right) B^\alpha \tag{6.2}$$

группы $\infty\cdot m$, ∞

$$V^i = \frac{\partial f}{\partial \varphi_1} \zeta^i + 2 \frac{\partial f}{\partial \varphi_2} \gamma_\alpha^i B^\alpha \tag{6.3}$$

группы $\infty / \infty \cdot m$, ∞ / ∞

$$W^{ik} = 2 \frac{\partial f}{\partial \varphi} H^{ik} \tag{6.4}$$

группы $m \cdot \infty : m$, $\infty : 2$, $\infty \cdot m$

$$W^{ik} = 2 \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi_1} \gamma^i_\alpha \gamma^k_\beta + \frac{\partial f}{\partial \varphi_2} \zeta^{[i}_\alpha \gamma^{k]}_\beta \right) H^{\alpha\beta} \tag{6.5}$$

группы $\infty : m$, ∞

$$W^{ik} = \frac{\partial f}{\partial \varphi_1} \Omega^{ik} + 2 \frac{\partial f}{\partial \varphi_2} \zeta^{[i}_\alpha \gamma^{k]}_\beta H^{\alpha\beta} \tag{6.6}$$

Вообще потенциальные функции могут быть определены и для других случаев, например

$$S^{ik} = \frac{\partial^2 f(\mathbf{B})}{\partial B_i \partial B_k}, \qquad W^{ik} = E^{ik}_{\cdot\cdot\alpha} \frac{\partial f(\mathbf{B})}{\partial B_\alpha}, \qquad V^i = E^i_{\cdot\alpha\beta} \frac{\partial f(\mathbf{H})}{\partial H_{\alpha\beta}} \tag{6.7}$$

причем в формулах (6.7) предполагается, что группа G оставляет геометрический тензор $\mathbf{E}$ инвариантным (если она не обладает этим свойством, соответствующие функции тождественно равны нулю).

Сравнение формул для потенциальных функций с общими формулами § 4 и 5 позволяет вывести условия потенциальности тензорных функций $\mathbf{V}(\mathbf{B})$ и $\mathbf{W}(\mathbf{H})$, причем для различных групп эти условия различны. Рассмотрим, например, функции $\mathbf{V}(\mathbf{B})$.

Группы $\infty / \cdot \infty \cdot m$ и ∞ / ∞ — все функции $\mathbf{V}(\mathbf{B})$ потенциальны.

Группы $m \cdot \infty : m$ и $\infty : m$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \varphi_2} = \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_1} \tag{6.8}$$

Группа $\infty : 2$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \varphi_2} = \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_1}, \qquad f_3 = 0 \tag{6.9}$$

Группа $\infty \cdot m$

$$2 \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_2} = \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_1} \tag{6.10}$$

Группа ∞

$$2 \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_2} = \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_1}, \qquad f_3 = 0 \tag{6.11}$$

В § 4—6 даны все возможные случаи зависимости полярного и аксиального вектора, а также любого тензора второго ранга от полярного или аксиального вектора и произвольного числа скаляров, совместимые с симметрией изотропных и гиротропных сред и различных текстур. Действительно, в разложении $\mathbf{T} = \Sigma f_{(\nu)} \mathbf{Q}_{(\nu)}$ функции $f_{(\nu)}$ могут зависеть не только от инвариантов тензора $\mathbf{A}$, но и от произвольного числа любых других инвариантов группы симметрии среды, в частности и от скаляров, т. е. инвариантов группы $\infty / \infty \cdot m$. Ясно также, что в формулах § 4—6 содержится зависимость от соответствующих аргументов не только симметричного и антисимметричного, но любого тензора T^{ik} второго ранга: в этом случае тензорная функция имеет вид

$$T^{ik}(\mathbf{A}) = S^{ik}(\mathbf{A}) + W^{ik}(\mathbf{A})$$

В прямоугольной декартовой системе координат, построенной на единичных векторах $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ (см. начало § 4), все формулы приобретают простой вид. Они еще упрощаются, если, пользуясь свободой вращения векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ в их плоскости, направить $\mathbf{e}_2$ перпендикулярно вектору $\mathbf{B}$ или аксиальному вектору $\mathbf{H}$.

7. Выполнение требований, сформулированных в начале § 3, позволяет получить из формул §§ 4—6 ценную информацию. Именно, из этих формул без труда выводится общий вид тензоров внутренней симметрии $[V^q]$, $V\,[V^q]$, $\{V^2\}\,[V^q]$, $[V^2]\,[V^q]$, $V^2\,[V^q]$, $[\{V^2\}^q]$, $V\,[\{V^2\}^q]$, $\{V^2\}\,[\{V^2\}^q]$, $[V^2]\,[\{V^2\}^q]$, $V^2\,[\{V^2\}^q]$, инвариантных относительно заданной группы Кюри, при любом q.

Каждый из тензоров $\mathbf{T}_{(q)}$ в разложении (3.1) имеет вид

$$T_{(q)}^{i_1\ldots,i_r} = P_{(q)}^{i_1\ldots i_r}{}_{\beta_1{}^{(1)}\ldots\beta_s{}^{(1)}\ldots\beta_1{}^{(q)}\ldots\beta_s{}^{(q)}} A^{\beta_1{}^{(1)}\ldots\beta_s{}^{(1)}} \ldots A^{\beta_1{}^{(q)}\ldots\beta_s{}^{(q)}} \tag{7.1}$$

Тензор $\mathbf{P}_{(q)}$ определяется равенством (7.1) с точностью до всевозможных перестановок групп индексов $\beta_1{}^{(l)} \ldots \beta_s{}^{(l)}$; естественно симметрировать его по всем перестановкам этих групп индексов. При этом условии тензор $\mathbf{P}_{(q)}$ определен однозначно, а внутренняя его симметрия равна $\tau \times [\alpha^q]$. Тензор $\mathbf{P}_{(q)}$, очевидно, инвариантен относительно группы G, определяемой геометрическими тензорами $\mathbf{K}_{(\pi)}$, из которых он построен. Число его линейно независимых компонент $m_q = m_q{}^*$ (см. § 3). Итак, можно утверждать, что когда коэффициенты полиномов $f_{(\nu)}$ (степени $q - c\,(\nu)$) независимо пробегают все вещественные значения, тензоры $\mathbf{P}_{(q)}$ пробегают все линейное пространство тензоров внутренней симметрии $\tau \times [\alpha^q]$ с постоянными вещественными компонентами, инвариантных относительно группы G.

Рассмотрим этот метод на простом примере: выведем тензор девятого ранга $\mathbf{P}$ внутренней симметрии $[V^2]\,[V^7]$, инвариантный относительно группы $\infty : 2$. Будем исходить из функции $\mathbf{S}\,(\mathbf{B})$ для группы $\infty : 2$ (см. § 4). Чтобы получить тензор $\mathbf{S}_{(7)}$ (седьмой степени относительно компонент $\mathbf{B}$), нужно положить

$$f_1 = f_2 = f_4 = f_5 = 0, \qquad f_3 = k_1\varphi_1{}^3 + k_2\varphi_1{}^2\varphi_2 + k_3\varphi_1\varphi_2{}^2 + k_4\varphi_2{}^3$$

$$f_6 = k_5\varphi_1{}^2 + k_6\varphi_1\varphi_2 + k_7\varphi_2{}^2$$

Подставляя выражения φ_1 и φ_2, получим

$$S_{(7)}^{ij} = \zeta^{(i}\Omega^{j)}_{\cdot\beta} B^\beta \,(k_1\zeta_{\varkappa\lambda\mu\nu\rho\sigma} + k_2\zeta_{\varkappa\lambda\mu\nu}\,\gamma_{\rho\sigma} + k_3\zeta_{\varkappa\lambda}\,\gamma_{\mu\nu}\,\gamma_{\rho\sigma} + k_4\gamma_{\varkappa\lambda}\,\gamma_{\mu\nu}\,\gamma_{\rho\sigma})\, B^\varkappa B^\lambda B^\mu B^\nu B^\rho B^\sigma +$$
$$+ \zeta_\beta \Omega^{(i}_{\cdot\varkappa}\gamma_\lambda{}^{j)} B^\beta B^\varkappa B^\lambda\,(k_5\zeta_{\mu\nu\rho\sigma} + k_6\zeta_{\mu\nu}\gamma_{\rho\sigma} + k_7\gamma_{\mu\nu}\gamma_{\rho\sigma})\, B^\mu B^\nu B^\rho B^\sigma$$

Искомый тензор $\mathbf{P}$ — должным образом симметрированный набор коэффициентов при $B^\beta \ldots B^\sigma$, т. е.

$$P^{ij}_{\cdot\cdot klmnprs} = k_1\Omega^{(i}_{\cdot(k}\,\zeta^{j)}_{lmnprs)} + k_2\Omega^{(i}_{\cdot(k}\zeta^{j)}_{lmnp}\,\gamma_{rs)} + k_3\Omega^{(i}_{\cdot(k}\,\zeta^{j)}_{lm}\,\gamma_{np}\,\gamma_{rs)} +$$
$$+ k_4\Omega^{(i}_{\cdot(k}\,\zeta^{j)}\,\gamma_{lm}\,\gamma_{np}\,\gamma_{rs)} + k_5\Omega^{(i}_{\cdot(k}\,\gamma^{j)}_l\,\zeta_{mnprs)} + k_6\Omega^{(i}_{\cdot(k}\gamma^{j)}_l\,\gamma_{mn}\,\zeta_{prs)} + k_7\,\Omega^{(i}_{\cdot(k}\,\gamma^{j)}_l\,\gamma_{mn}\gamma_{pr}\zeta_{s)}$$

Таким образом, здесь без всяких, в сущности, вычислений решается для тензоров произвольно высокого ранга задача, поставленная и решенная в работах [4,21] только для тензоров четырех низших рангов; правда, она решается здесь лишь для тензоров, обладающих определенной внутренней симметрией.

8. Формула Гамильтона — Кэли

$$T^{ik} = f_1 g^{ik} + f_2 A^{ik} + f_3 A^i_{\cdot\alpha} A^{\alpha k}, \qquad f_{1,2,3} = f_{1,2,3}\,(A^\alpha_{\cdot\alpha},\ A^\alpha_{\cdot\beta}A^\beta_{\cdot\alpha},\ A^\alpha_{\cdot\beta}A^\beta_{\cdot\gamma}A^\gamma_{\cdot\alpha}) \tag{8.1}$$

определяет наиболее общий вид функциональной зависимости одного симметричного тензора второго ранга от другого, совместимый с изотропностью среды. Эта формула играет важную роль в нелинейной механике изотропных сплошных сред [1]; из нее, в частности, вытекают более специальные соотношения, применяемые в нелинейной теории упругости [1]. Аналогичную роль в нелинейной теории изотропных сплошных сред играют и более очевидные соотношения вида

$$V^i = f\,(B_\alpha B^\alpha)\, B^i, \qquad S^{ik} = f_1\,(B_\alpha B^\alpha)\, g^{ik} + f_2\,(B_\alpha B^\alpha)\, B^i B^k \tag{8.2}$$

[1] См., например, [2], гл. II, § 15 и гл. III, § 15, а также [3], гл. IV, § 2.

Вообще формулу вида $\mathrm{T} = F(\mathrm{A})$, раскрывающую общий вид функциональной зависимости тензора T от тензора A (в более общем случае — от тензоров $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_{(m)}$), совместимой с изотропностью среды, естественно назвать обобщенной формулой Гамильтона — Кэли для изотропной среды. Таким образом, формулы (8.2)— обобщенные формулы Гамильтона — Кэли, определяющие зависимость вектора от вектора и тензора второго ранга от вектора для изотропной среды.

Полученные в § 4 результаты можно назвать поэтому обобщенными формулами Гамильтона — Кэли, описывающими зависимость вектора, симметричного, антисимметричного и общего тензора второго ранга от вектора, для сред предельной симметрии. Равным образом формулы § 5 можно считать обобщенными формулами Гамильтона — Кэли, описывающими зависимость тех же величин от аксиального вектора, или антисимметричного тензора второго ранга.

Быть может, имеет смысл также выделить, как важный частный случай, формулы Гамильтона — Кэли для потенциальной зависимости; некоторые из таких формул содержатся в § 6.

Тема и основные идеи этой работы сложились в результате бесед с Л. И. Седовым. Автор приносит Л. И. Седову и В. В. Лохину глубокую благодарность.

Поступила 4 IV 1964

Московский университет

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Введение в механику сплошной среды. Физматгиз, 1962.
2. Новожилов В. В. Теория упругости. Судпромгиз, 1958.
3. Гольденблатт И. И. Некоторые вопросы механики деформируемых сред. Гостехтеоретиздат, 1955.
4. Лохин В. В., Седов Л. И. Нелинейные тензорные функции от нескольких тензорных аргументов. ПММ, 1963, т. 27, вып. 3.
5. Сиротин Ю. И. Групповые тензорные пространства. Кристаллография, 1960, т. 5, вып. 2.
6. Шубников А. В. Симметрия и антисимметрия конечных фигур. Изд-во АН СССР, 1951.
7. Jahn H. A. Note on the Bhagavantam Suryanarayana method of enumerating the physical constants of crystals. Acta Crystallogr., 1949, v. 2, No. 1.
8. Шубников А. В. О симметрии векторов и тензоров. Изв. АН СССР. Сер. физ., 1949, т. 13, вып. 3.
9. Любарский Г. Я. Теория групп и ее применение в физике. Гостехтеоретиздат, 1957.
10. Сиротин Ю. И. Построение тензоров заданной симметрии. Кристаллография, 1961, т. 6, вып. 3.
11. Седов Л. И., Лохин В. В., Описание с помощью тензоров точечных групп симметрии. Докл. АН СССР, 1963, т. 149, № 4.
12. Вейль Г. Классические группы. Изд. иностр. лит., 1947.
13. Smith G. F., Rivlin R. S. The anisotropic tensors. Quart. Appl. Math., 1957, v. 15, No. 3.
14. Smith G. F. Further results on the strain-energy function for anisotropic elastic materials. Arch. Rat. Mech. Anal., 1962, v. 10, No. 2.
15. Pipkin A. C., Rivlin R. S. The formulation of constitutive equations in continuum phisics. Arch. Rat. Mech. Anal., 1959, v. 4, No. 2.
16. Rivlin R. S. Constitutive equations involving functional dependence of one vector on another. Z. Angew. Math. und Phys., 1961, B. 12, No. 5.
17. Pipkin A. C., Wineman A. S. Material symmetry restrictions on non-polynomial constitutive equations. Arch. Rat. Mech. Anal., 1963, v. 12, No. 5.
18. Риордан Дж. Введение в комбинаторный анализ. Изд. иностр. лит., 1963, гл. 6, § 1, 2, 4.
19. Murnaghan F. D. On the decomposition of tensors by contraction. Proc. Nation. Acad. Sci. USA, 1952, v. 38, No. 11.
20. Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. Гостехтеоретиздат, 1957, § 13.
21. Лохин В. В. Общие формы связи между тензорными полями в анизотропной сплошной среде, свойства которой описываются векторами, тензорами второго ранга и антисимметричными тензорами третьего ранга. Докл. АН СССР, 1963, т. 149, № 6.