

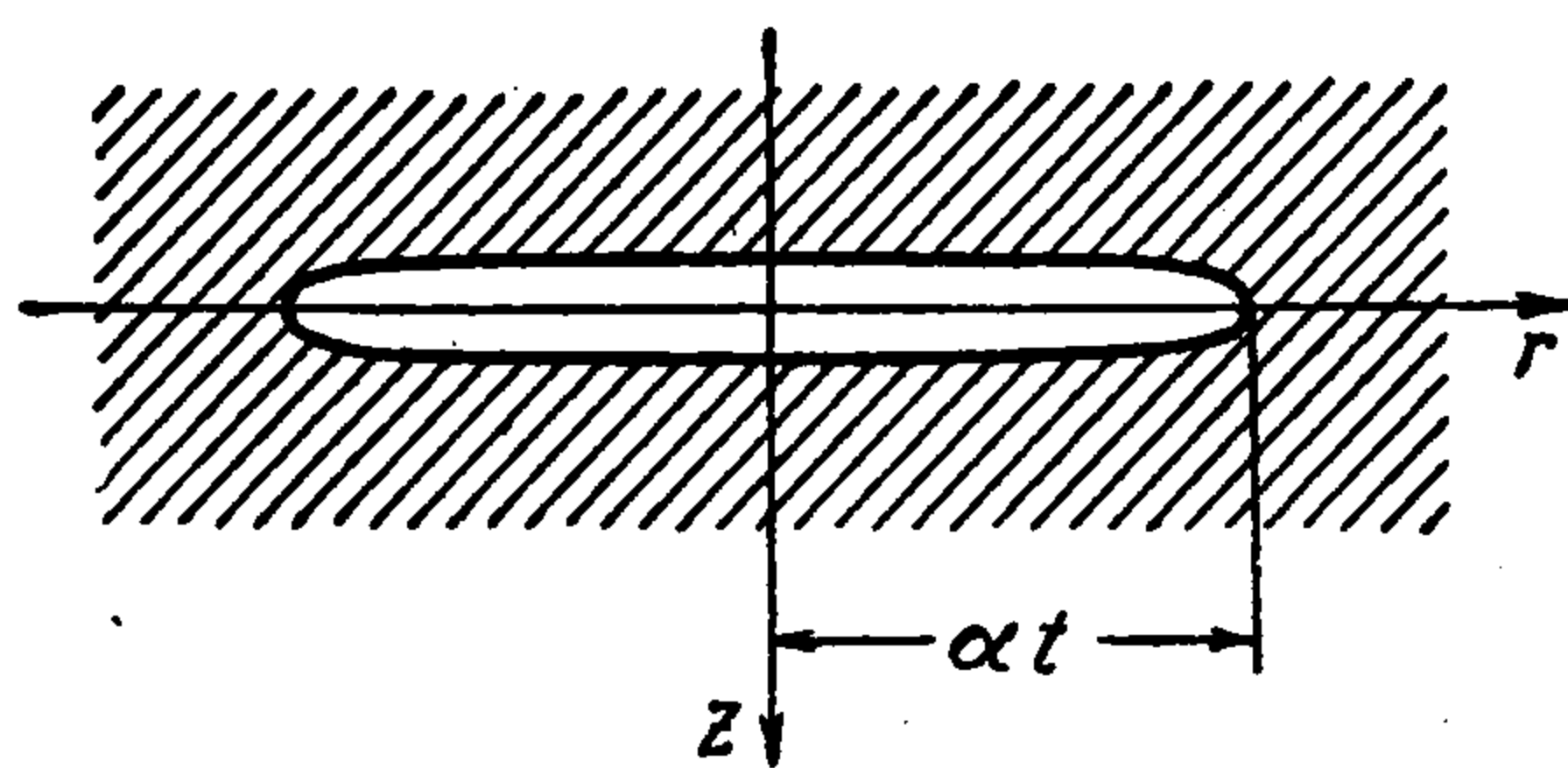
## ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА О РАСПРОСТРАНЕНИИ ТРЕЩИНЫ НОРМАЛЬНОГО РАЗРЫВА

Б. В. Костров  
(Москва)

В работе решается пространственная (осесимметричная) задача о неустановившемся распространении трещины в упругой среде под действием однородного растягивающего напряжения. Аналогичная плоская задача рассматривалась в работе [1]. Анализ постановки задачи и результатов работы [1], основанный на учете сил сцепления, действующих в концевой области трещины, проведен в [2], где получено уравнение для определения скорости распространения трещины. Там же можно найти сравнение с экспериментальными результатами Уэллса и Поста [3]. Плоская задача о распространении трещины после мгновенного проведения полубесконечного разреза в напряженной среде решена в [4].

Ниже приводится решение осесимметричной задачи. Получены формулы для смещения на поверхности трещины и для напряжений вблизи края. Показано, что, как и в плоской задаче, скорость распространения трещины не может быть больше скорости поверхностных волн Релея. Получено уравнение, определяющее скорость распространения трещины.

1. Постановка задачи. Пусть неограниченная упругая среда с модулем сдвига  $\mu$  и скоростями распространения продольных и поперечных волн  $a$  и  $b$ , соответственно, находится при  $t < 0$  в состоянии однородного растяжения, так что отлична от нуля только одна компонента тензора напряжения  $\sigma_z$ . В момент времени  $t = 0$  в начале координат образуется трещина, которая затем распространяется в плоскости  $z = 0$  с постоянной скоростью  $\alpha$ .



Фиг. 1

При  $t > 0$  поверхность трещины в цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$  определяется соотношениями (фиг. 1)

$$z = 0, \quad r \leq \alpha t \quad (1.1)$$

Поверхность трещины должна быть свободна от напряжений (мы отвлекаемся от сил молекулярного сцепления,

действующих в краевой области трещины, считая эту область бесконечно узкой), следовательно, упругие возмущения, порождаемые распространением трещины, должны удовлетворять на ее поверхности условиям

$$\sigma_z = -\sigma_z^0, \quad \tau_{rz} = 0, \quad \tau_{\varphi z} = 0 \quad \text{при } z = 0, \quad 0 \leq r < \alpha t \quad (1.2)$$

Возмущения отсутствуют в начальный момент времени, что выражается в однородности начальных условий

$$\mathbf{u} = \dot{\mathbf{u}} = 0 \quad \text{при } t = 0 \quad (1.3)$$

Здесь  $\mathbf{u}$  — вектор смещения с компонентами  $u_r, u_\varphi, u_z$ . При этом, очевидно,  $u_\varphi \equiv 0$ , а все остальные величины не зависят от  $\varphi$  (осесимметричная задача). Точкой обозначено дифференцирование по времени.

Кроме граничных и начальных условий, необходимо еще наложить условие на поведение решения в окрестности края трещины. Это добавочное условие, ограничивающее порядок роста напряжений вблизи края трещины, можно получить, рассматривая дополнительные напряжения, порождаемые силами сцепления [2]. Ниже предлагается несколько иной путь. Физически ясно, что на образование трещины расходуется определенная энергия. Пользуясь интегралом энергии для уравнений движения применительно к полному полю, можно установить, что скорость расхода энергии (мощность, затрачиваемая на образование трещины) равна

$$W = \lim_{\delta \rightarrow 0} \iint_{S_\delta} \left\{ t_n v - \frac{1}{2} [\rho (v)^2 + \tau \varepsilon] \alpha \cos(n, r) \right\} dS \quad (1.4)$$

Здесь  $\varepsilon$  и  $\tau$  — тензоры деформации и напряжения,  $v \equiv u'$  — вектор скорости частиц среды, поверхность  $S_\delta$  окружает край трещины на расстоянии  $\delta$  от него, а  $n$  — внешняя нормаль к  $S_\delta$ . Таким образом, требуется, чтобы интеграл в (1.4) стремился к конечному положительному (не равному нулю) пределу, не зависящему от способа стягивания  $S_\delta$  к краю трещины. Вторым членом в фигурных скобках, связанным с движением поверхности интегрирования, дает в пределе нуль, что можно показать, выбрав поверхность  $S_\delta$ , имеющую в сечении плоскостью  $rz$  форму прямоугольника со сторонами  $2\delta_1$  и  $2\delta_2$  по направлениям  $r$  и  $z$ , соответственно, и устремляя  $\delta_2$  к нулю при фиксированном  $\delta_1$ . Таким образом, требуемое условие имеет вид

$$0 < 2\pi \alpha t \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{l_\delta} t_n v dl < \infty \quad (1.5)$$

где  $l_\delta$  — сечение  $S_\delta$  плоскостью  $rz$ . Здесь использована симметрия задачи относительно оси  $z$ . В п. 3 показано, что компоненты напряжения и скорости имеют особенность одинакового порядка при  $r \rightarrow \alpha t$ ,  $z \rightarrow 0$ . Чтобы интеграл в (1.5) стремился к конечному пределу, необходимо, следовательно, чтобы компоненты напряжения и скорости (по крайней мере, некоторые из них) возрастали вблизи края трещины как  $\delta^{-1/2}$ .

Легко заметить, что компоненты напряжения и скорости должны быть однородными функциями координат и времени нулевого измерения. Отсюда и из указанного требования к скорости их роста следует, что асимптотические выражения компонент скорости и напряжения должны быть пропорциональны  $\sqrt{t/\delta}$  при  $\delta \rightarrow 0$ . Интеграл в (1.5) оказывается тогда пропорциональным  $t$ , т. е.  $W \sim t^2$ . Это заключение кажется странным, так как поверхность трещины растет со скоростью  $4\alpha^2 t$ , так что энергия расходуется не пропорционально ее площади. Это можно объяснить следующим образом (см. также [2]). Можно предположить, что край трещины окружен областью, в которой происходит пластическая деформация материала. В настоящей задаче эта область считается бесконечно малой, но на деле она имеет малые, но конечные размеры. Так как в начальный момент эта пластическая область отсутствует, размеры ее должны возрасть вместе с ростом трещины, пока не достигнут некоторой стационарной величины. При малых значениях  $t$  можно считать, что размеры пластической области растут с постоянной скоростью (пропорциональной скорости распространения трещины  $\alpha$ ), а энергия, затрачиваемая на образование пластической области, возрастает пропорционально ее объему. Тогда можно положить

$$W = 2\pi \alpha^3 t^2 C \quad (C = \text{const})$$

Вместо (1.5) получаем дополнительное условие в следующем виде:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{l_\delta} t_n v dl = \alpha^2 t C \quad (1.6)$$

Заметим, что закон роста напряжений в окрестности края трещины пропорционально  $\sqrt{t/\delta}$  получался также в работах [1, 4], а также подтверждается экспериментально [2, 3]. Из изложенного ясно, что предположение о постоянстве скорости распространения трещины пригодно лишь для начального периода ее развития. Этот вывод из несколько иных соображений был сделан в работе [2].

Задачу удобно свести к граничной задаче для полупространства  $z > 0$ . Для этого заметим, что напряжения должны быть непрерывны всюду, а смещения — вне трещины при переходе через плоскость  $z = 0$ , и разложим вектор смещения в возмущении на симметричное и антисимметричное относительно плоскости  $z = 0$  слагаемые. В антисимметричном слагаемом  $u_z$  и  $\tau_{rz}$  являются четными, а  $u_r$  и  $\sigma_z$  — нечетными функциями  $z$ . Пользуясь указанными требованиями непрерывности и условиями (1.2), видим, что в антисимметричном слагаемом  $u_r$  и  $\sigma_z$  должны исчезать на всей плоскости  $z = 0$ . Вместе с начальными условиями это показывает, что антисимметричное слагаемое равно нулю тождественно, т. е. решение задачи симметрично относительно плоскости  $z = 0$ . При этом  $u_z$  и  $\tau_{rz}$  нечетны, а  $u_r$  и  $\sigma_z$  — четны относительно  $z$ . Это дает граничные условия при  $z = 0$ :

$$\begin{aligned} \tau_{rz} &= 0 & \text{при } z = 0, & \quad 0 \leq r < \infty \\ \sigma_z &= -\sigma_z^0 & \text{при } z = 0, & \quad 0 \leq r < at \\ u_z &= 0 & \text{при } z = 0, & \quad at < r < \infty \end{aligned} \quad (1.7)$$

2. Решение задачи. Решение автомодельной осесимметричной задачи, когда компоненты скорости и напряжения суть однородные функции координат и времени нулевого измерения, при условии

$$\tau_{rz} = 0 \quad \text{при } z = 0, \quad 0 \leq r < \infty \quad (2.1)$$

может быть записано в виде [5]

$$\begin{aligned} u_r \equiv v_r &= v_r^{(1)} + v_r^{(2)}, & v_r^{(1,2)} &= \operatorname{Re} \int_{-\pi}^{\pi} V_{\xi}^{(1,2)}(\vartheta^{(1,2)}) \cos \Omega d\Omega \\ u_z \equiv v_z &= v_z^{(1)} + v_z^{(2)}, & v_z^{(1,2)} &= \operatorname{Re} \int_{-\pi}^{\pi} V_z^{(1,2)}(\vartheta^{(1,2)}) d\Omega \\ \tau_{rz} &= \tau_{rz}^{(1)} + \tau_{rz}^{(2)}, & \tau_{rz}^{(1,2)} &= \operatorname{Re} \int_{-\pi}^{\pi} T_{\xi z}^{(1,2)}(\vartheta^{(1,2)}) \cos \Omega d\Omega \\ \sigma_z &= \sigma_z^{(1)} + \sigma_z^{(2)}, & \sigma_z^{(1,2)} &= \operatorname{Re} \int_{-\pi}^{\pi} \Sigma_z^{(1,2)}(\vartheta^{(1,2)}) d\Omega \end{aligned} \quad (2.2)$$

где  $\vartheta^{(1)}$  и  $\vartheta^{(2)}$  определяются из уравнений

$$\begin{aligned} \delta^{(1)} &\equiv t - \vartheta^{(1)} r \cos \Omega - z \sqrt{a^{-2} - \vartheta^{(1)2}} = 0 \\ \delta^{(2)} &\equiv t - \vartheta^{(2)} r \cos \Omega - z \sqrt{b^{-2} - \vartheta^{(2)2}} = 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

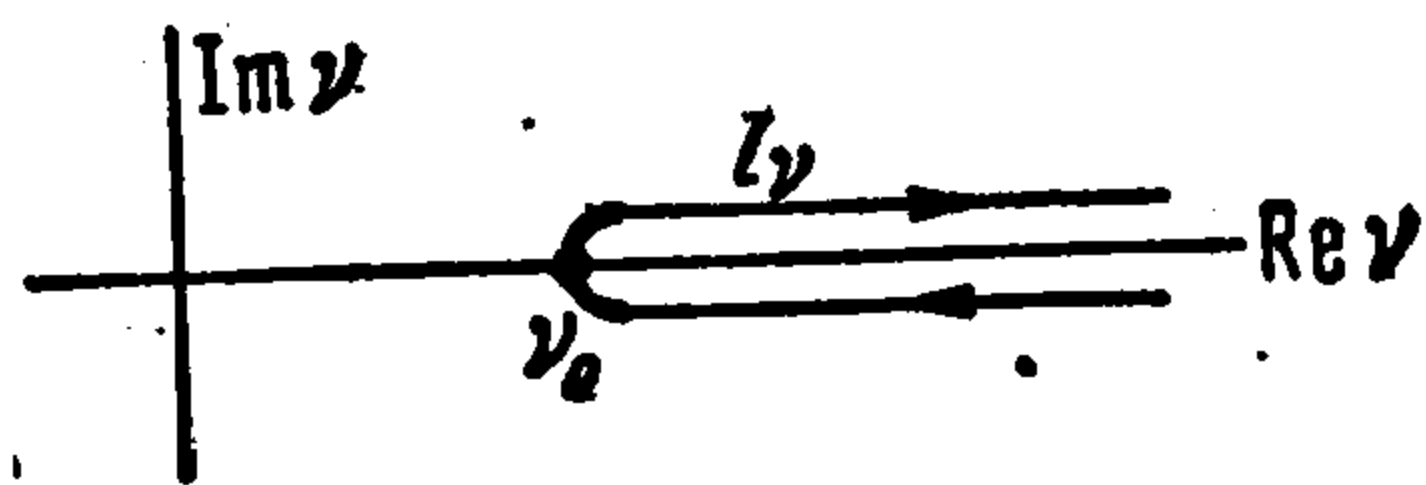
а функции, стоящие под интегралами, выражаются через одну неизвестную функцию  $F(\vartheta^2)$  соотношениями

$$\begin{aligned} V_{\xi}^{(1)'}(\vartheta) &= \frac{2\vartheta^2(1 - 2b^2\vartheta^2)}{\sqrt{a^{-2} - \vartheta^2}} F'(\vartheta^2), & V_{\xi}^{(2)'}(\vartheta) &= -4b^2\vartheta^2 \sqrt{b^{-2} - \vartheta^2} F'(\vartheta^2) \\ \bar{V}_z^{(1)'}(\vartheta) &= 2\vartheta(1 - 2b^2\vartheta^2) F'(\vartheta^2), & V_z^{(2)'}(\vartheta) &= 4b^2\vartheta^3 F'(\vartheta^2) \\ \frac{1}{2\mu} \Sigma_z^{(1)'}(\vartheta) &= -\frac{4b^2\vartheta(\vartheta^2 - 1/2b^2)^2}{\sqrt{a^{-2} - \vartheta^2}} F'(\vartheta^2) \\ \frac{1}{2\mu} \Sigma_z^{(2)'}(\vartheta) &= -4b^2\vartheta^3 \sqrt{b^{-2} - \vartheta^2} F'(\vartheta^2) \\ \frac{1}{2\mu} T_{\xi z}^{(1)'}(\vartheta) &= -\frac{1}{2\mu} T_{\xi z}^{(2)'}(\vartheta) = -2\vartheta^2(1 - 2b^2\vartheta^2) F'(\vartheta^2) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь штрихом обозначены производные по аргументам соответствующих функций (т. е., например,  $V_{\xi}^{(1)'}(\vartheta) = dV_{\xi}^{(1)}/d\vartheta$ , но  $F'(\vartheta^2) = dF/d(\vartheta^2)$ ). Это решение получено методом В. И. Смирнова и С. Л. Соболева<sup>1</sup>.

При  $z = 0$  функции  $\vartheta^{(1)}$  и  $\vartheta^{(2)}$  принимают одинаковые значения  $\vartheta^{(1)} = \vartheta^{(2)} = t/r \cos \Omega = \vartheta$ . Дифференцируя второе и четвертое выражения (2.3) по времени, полагая  $z = 0$ , пользуясь (2.4) и переходя к новой переменной интегрирования  $v = \vartheta^2$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{r}{2} v_z \dot{\phantom{z}} &= \operatorname{Re} \int_{i_v} F'(v) \frac{dv}{\sqrt{v-v_0}} \text{ при } z=0 \\ \frac{r}{2} \sigma_z \dot{\phantom{z}} &= -4\mu b^2 \operatorname{Re} \int_{i_v} \frac{R(v)}{\sqrt{a^{-2}-v}} F'(v) \frac{dv}{\sqrt{v-v_0}} \end{aligned} \quad (2.5)$$



Фиг. 2.

$$v_0 = t^2/r^2, \quad R(v) = (v - 1/2b^{-2}) + v\sqrt{a^{-2}-v}\sqrt{b^{-2}-v} \quad (2.6)$$

а контур интегрирования  $L_v$  показан на фиг. 2. Входящие в (2.5) радикалы униформизируем, проведя соответствующие разрезы вдоль положительной действительной полуоси и потребовав, чтобы  $\sqrt{a^{-2}-v}$  и  $\sqrt{b^{-2}-v}$  были положительны, а  $\sqrt{v-v_0}$  равен  $i\sqrt{v_0}$  при  $v = 0$ .

Для выполнения начальных условий требуется, чтобы выражения (2.5) исчезали при  $r > at$ , т. е. при  $v_0 < 1/a^2$ . Для этого необходимо, чтобы подынтегральные выражения достаточно быстро убывали на бесконечности и чтобы контур интегрирования можно было беспрепятственно деформировать в полуплоскости  $\operatorname{Re} v < v_0$  при  $v_0 < 1/a^2$ . Отсюда следует, что  $F'(v)$  должна быть регулярна вне разреза от  $1/a^2$  до  $\infty$  и убывать быстрее, чем  $v^{-1}$  при  $v \rightarrow \infty$ . Далее, из граничных условий (1.7) следует, что первое из выражений (2.5) исчезает при  $r > at$ , т. е. при  $v_0 < 1/a^2$ . Для этого функция  $F'(v)$  должна быть регулярна при  $\operatorname{Re} v < 1/a^2$ . Второе из выражений (2.5) должно исчезать при  $r < at$ , т. е. при  $v_0 > 1/a^2$ , для чего подынтегральное выражение должно быть регулярно и однозначно при  $\operatorname{Re} v > v_0 > 1/a^2$ . Эти соображения дают возможность найти  $F'(v)$ . Окончательное выражение для  $F'(v)$  зависит от величины  $\alpha$ . Рассмотрим сначала случай  $0 < \alpha < c$ , где  $c$  — скорость поверхностных волн Релея ( $R(1/c^2) = 0$ ). В этом случае перечисленным условиям удовлетворяет выражение]

$$F'(v) = \frac{A(v)}{(\alpha^{-2}-v)^n}$$

где  $n$  — целое, а  $A(v)$  — целая функция, не исчезающая при  $v = 1/\alpha^2$ . Для определения  $n$  следует обратиться к добавочному условию (1.6), которое, в частности, требует, чтобы функция  $\sigma_z$  возрастала как  $\delta^{-1/2}$  при  $\delta = |r - at| \rightarrow 0$ . Следовательно,  $\sigma_z \dot{\phantom{z}}$  должна возрастать как  $\delta^{-3/2}$ , а это будет только при  $n = 2$ . Учитывая, что  $F'(v) = o(v^{-1})$  при  $v \rightarrow \infty$ , заключаем, что  $A(v)$  должна быть ограничена и  $A(v) = A = \text{const.}$

Таким образом,

$$F'(v) = \frac{A}{(\alpha^{-2}-v)^2} \quad (2.7)$$

<sup>1</sup> Гл. XII в книге [6].

Аналогично выражениям (2.5) можно получить

$$\begin{aligned} \sigma_z &= -4\mu b^2 \sqrt{v_0} \operatorname{Re} \int_{i v_0}^v G(v) \frac{dv}{v \sqrt{v-v_0}} \\ v_z &= \sqrt{v_0} \operatorname{Re} \int_{i v_0}^v F(v) \frac{dv}{v \sqrt{v-v_0}} \end{aligned} \quad \text{при } z=0 \quad (2.8)$$

где

$$F(v) = \int_0^v F'(\lambda) d\lambda, \quad G(v) = \int_0^v \frac{R(\lambda)}{\sqrt{a^{-2}-\lambda}} F'(\lambda) d\lambda \quad (2.9)$$

Здесь нижний предел интегрирования выбран равным нулю, чтобы точка  $v=0$  не была полюсом подынтегральных выражений в (2.8), что необходимо для выполнения начальных условий. Функция  $F(v)$  вычисляется непосредственно и равна

$$F(v) = \frac{\alpha^2 v A}{\alpha^{-2} - v} \quad (2.10)$$

а  $G(v)$  преобразуем следующим образом:

$$G(v) = \int_0^{-\infty} \frac{R(v)}{\sqrt{a^{-2}-v}} F'(v) dv + \int_{\infty v}^v \frac{R(\lambda)}{\sqrt{a^{-2}-\lambda}} F'(\lambda) d\lambda = M + G_1(v) \quad (2.11)$$

Теперь из (2.8) видно, что  $v_z$  действительно равна нулю при  $r = \alpha t$ . Рассматривая  $G(v)$  в виде (2.11), видим, что  $G_1(v)$  меняет знак при переходе через разрез от  $1/\alpha^2$  до  $\infty$ , а интеграл от этого слагаемого в (2.8) исчезает при  $v_0 > 1/\alpha^2$ . Следовательно,

$$\sigma_z = -4\mu b^2 \int_{i v_0}^v \frac{dv}{v \sqrt{v-v_0}} M \sqrt{v_0} = -8\mu \lambda b^2 M \quad \text{при } z=0, r < \alpha t$$

Это значение должно быть равно  $-\sigma_z^0$ , т. е.

$$-\sigma_z^0 = 8\mu \lambda b^2 A \int_0^{\infty} \frac{(v + 1/2b^{-2}) - v \sqrt{a^{-2}+v} \sqrt{b^{-2}+v}}{(\alpha^{-2}+v)^2 \sqrt{a^2+v}} dv \quad (2.12)$$

Отсюда получаем значение  $A$ . Так как  $A$  отрицательно, то положим

$$A_1 = -2\lambda A \quad (2.13)$$

Найдем теперь выражение для  $v_z$  при  $z=0$

$$v_z = \frac{-\alpha^3 A_1 t}{\sqrt{\alpha^2 t^2 - r^2}} \quad \text{при } z=0, r < \alpha t \quad (2.14)$$

Интегрируя это выражение по времени, получим выражения для смещения берегов трещины

$$u_z = \alpha A_1 \sqrt{\alpha^2 t^2 - r^2} \quad (2.15)$$

Остается еще удовлетворить условию (1.6), это будет сделано в следующем пункте.

Обратимся к случаю  $c < \alpha < b$ . Теперь нуль функции  $R(v)$ , т. е. точка  $v = 1/c^2$ , лежит справа от точки  $v = 1/\alpha^2$ , поэтому  $F'(v)$  можно взять в виде

$$F'(v) = \frac{A(v)}{(c^2 - v)(\alpha^{-2} - v)^n} \quad (2.16)$$

Как и в предыдущем случае, заключаем, что  $n = 2$ , но теперь  $A(v)$  оказывается линейной функцией, которую запишем в виде

$$A(v) = A(c^{-2} - v) + B(\alpha^{-2} - v)$$

так что

$$F'(v) = \frac{A}{(\alpha^{-2} - v)^2} + \frac{B}{(c^{-2} - v)(\alpha^{-2} - v)} \quad (2.17)$$

Первое слагаемое совпадает с решением для случая  $0 < \alpha < c$ , но наличие второго слагаемого показывает, что теперь задача оказывается недоопределенной.

Действительно, вместо (2.12) получаем уравнение

$$-\sigma_z^0 = 8\mu b^2 \pi \left[ A \int_0^\infty \frac{(v + 1/2 b^{-2})^2 - v \sqrt{a^{-2} + v} \sqrt{b^{-2} + v}}{(\alpha^{-2} + v)^2 \sqrt{\alpha^{-2} + v}} dv + \right. \\ \left. + B \int_0^\infty \frac{(v + 1/2 b^{-2})^2 - v \sqrt{a^{-2} + v} \sqrt{b^{-2} + v}}{(c^{-2} + v)(\alpha^{-2} + v) \sqrt{a^{-2} + v}} dv \right] \quad (2.18)$$

которого недостаточно для определения двух постоянных  $A$  и  $B$ .

В случае  $b < \alpha < a$  функция  $F'(v)$  строится более сложным образом, но можно показать, что в этом случае напряжения не могут иметь на краю трещины особенность порядка  $1/2$ . По этой причине не будем останавливаться на этом случае.

Решение, полученное для случая  $0 < \alpha < c$ , однозначно, так что из условия (1.6) определяется скорость распространения трещины  $\alpha$  в зависимости от начального напряжения  $\sigma_z^0$ . В следующем пункте увидим, что при  $c < \alpha < b$  условие (1.6) не может быть удовлетворено, так как интеграл в правой части (1.6) оказывается отрицательным.

**3. Поведение решения вблизи края трещины.** Асимптотическое поведение решения вблизи края трещины ( $r = \alpha t$ ,  $z = 0$ ) определяется особенностью  $F'(v)$  в точке  $v = 1/\alpha^2$ . Так как в (2.17) второе слагаемое имеет более слабую особенность в этой точке, чем первое, оно не даст вклада в первый член асимптотического разложения решения вблизи края. Следовательно, необходимо изучить асимптотику решения с  $F'(v)$  в виде (2.7) при  $0 < \alpha < b$ .

Прежде всего вычислим первообразные функции (2.4), но так как важно только поведение решения вблизи точки  $r = \alpha t$ ,  $z = 0$ , достаточно вычислить первые члены асимптотических разложений этих функций вблизи точек  $\vartheta^{(1,2)} = \pm 1/\alpha$ . Для этого поступим следующим образом:

$$V_\xi^{(1)}(\vartheta^{(1)}) = A \int_0^{\vartheta^{(1)}} \frac{2\vartheta^2(1 - 2b^2\vartheta^2) d\vartheta}{\sqrt{a^{-2} - \vartheta^2}(\alpha^{-2} - \vartheta^2)^2} = \frac{2A\vartheta^{(1)2}(1 - 2b^2\vartheta^{(1)2})}{\sqrt{a^{-2} - \vartheta^{(1)2}}} \int_0^{\vartheta^{(1)}} \frac{d\vartheta}{(\alpha^{-2} - \vartheta^2)^2} + \\ + 2A \int_0^{\vartheta^{(1)}} \left[ \frac{\vartheta^2(1 - 2b^2\vartheta^2)}{\sqrt{a^{-2} - \vartheta^2}} - \frac{\vartheta^{(1)2}(1 - 2b^2\vartheta^{(1)2})}{\sqrt{a^{-2} - \vartheta^{(1)2}}} \right] \frac{d\vartheta}{(\alpha^{-2} - \vartheta^2)^2}$$

Второе слагаемое имеет в точках  $\vartheta^{(1)} = \pm 1/\alpha$  не более, чем логарифмическую особенность, в то время как первое имеет полюс первого

порядка. Таким образом,

$$V_{\xi}^{(1)}(\vartheta^{(1)}) \approx \frac{\alpha^2 A \vartheta^{(1)3} (1 - 2b^2 \vartheta^{(1)2})}{(\alpha^{-2} - \vartheta^{(1)2}) \sqrt{a^{-2} - \vartheta^{(1)2}}} \quad (3.1)$$

Аналогично

$$\begin{aligned} V_{\xi}^{(2)}(\vartheta^{(2)}) &= - \frac{2\alpha^2 b^2 A \vartheta^{(2)2} \sqrt{b^{-2} - \vartheta^{(2)2}}}{\alpha^{-2} - \vartheta^{(2)2}} + O(\ln(1 - \alpha^2 \vartheta^{(2)2})) \\ V_z^{(1)}(\vartheta^{(1)}) &= \frac{\alpha^2 A \vartheta^{(1)2} (1 - 2b^2 \vartheta^{(1)2})}{\alpha^{-2} - \vartheta^{(1)2}} + O(\ln(1 - \alpha^2 \vartheta^{(1)2})) \\ V_z^{(2)}(\vartheta^{(2)}) &= \frac{2\alpha^2 b^2 A \vartheta^{(2)4}}{\alpha^{-2} - \vartheta^{(2)2}} + O(\ln(1 - \alpha^2 \vartheta^{(2)2})) \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\frac{1}{2\mu} \Sigma_z^{(1)}(\vartheta^{(1)}) = - \frac{2\alpha^2 b^2 A \vartheta^{(1)2} (\vartheta^{(1)2} - 1/2 b^{-2})}{\sqrt{a^{-2} - \vartheta^{(1)2}} (\alpha^{-2} - \vartheta^{(1)2})} + O(\ln(1 - \alpha^2 \vartheta^{(1)2}))$$

$$\frac{1}{2\mu} \Sigma_z^{(2)}(\vartheta^{(2)}) = - \frac{2\alpha^2 b^2 A \vartheta^{(2)4} \sqrt{b^{-2} - \vartheta^{(2)2}}}{\alpha^{-2} - \vartheta^{(2)2}} + O(\ln(1 - \alpha^2 \vartheta^{(2)2}))$$

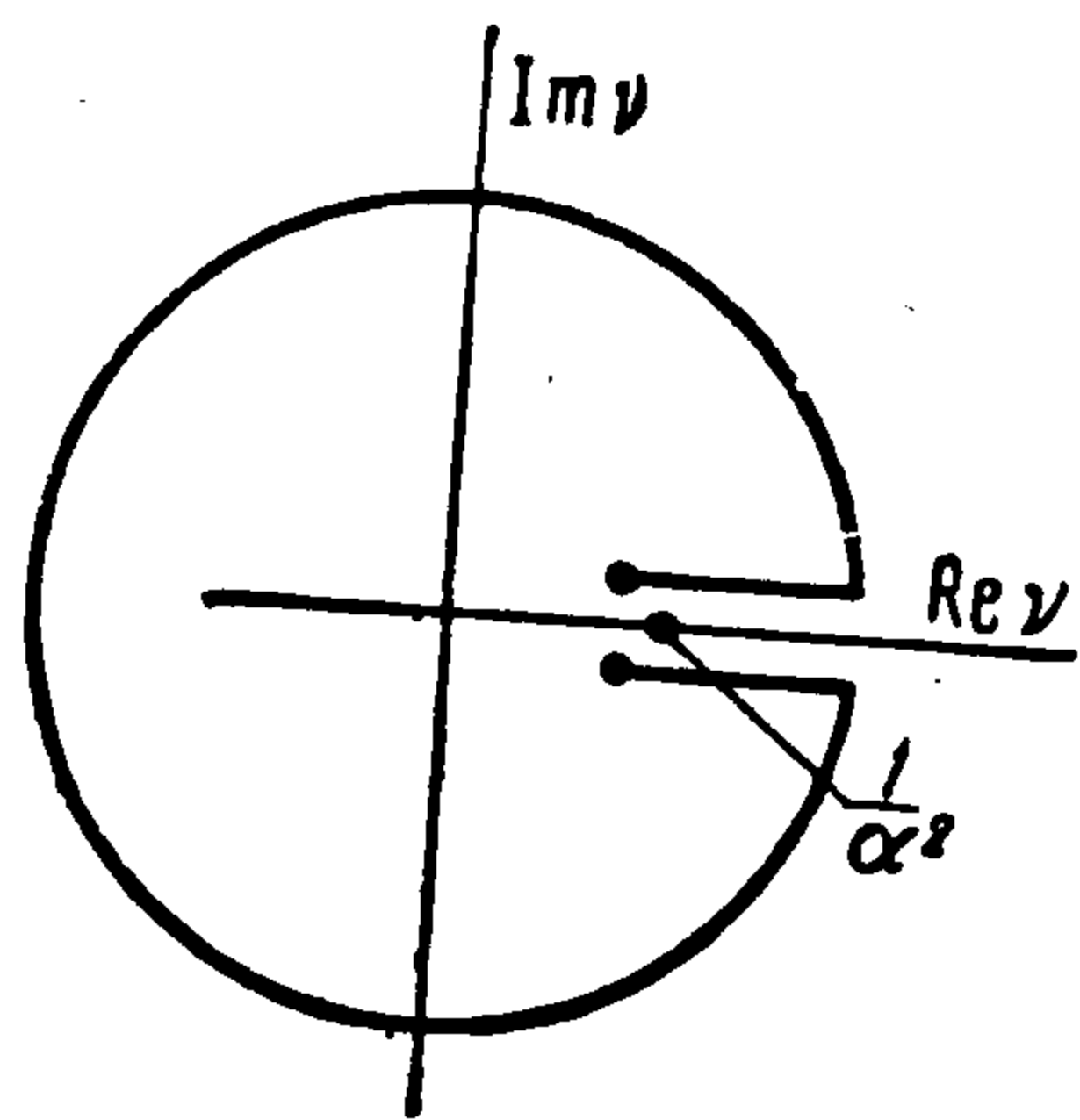
$$\frac{1}{2\mu} T_{\xi z}^{(1)}(\vartheta^{(1)}) = - \frac{\alpha^2 A \vartheta^{(1)3} (1 - 2b^2 \vartheta^{(1)2})}{\alpha^{-2} - \vartheta^{(1)2}} + O(\ln(1 - \alpha^2 \vartheta^{(1)2}))$$

$$\frac{1}{2\mu} T_{\xi z}^{(2)}(\vartheta^{(2)}) = \frac{\alpha^2 A \vartheta^{(2)3} (1 - 2b^2 \vartheta^{(2)2})}{\alpha^{-2} - \vartheta^{(2)2}} + O(\ln(1 - \alpha^2 \vartheta^{(2)2}))$$

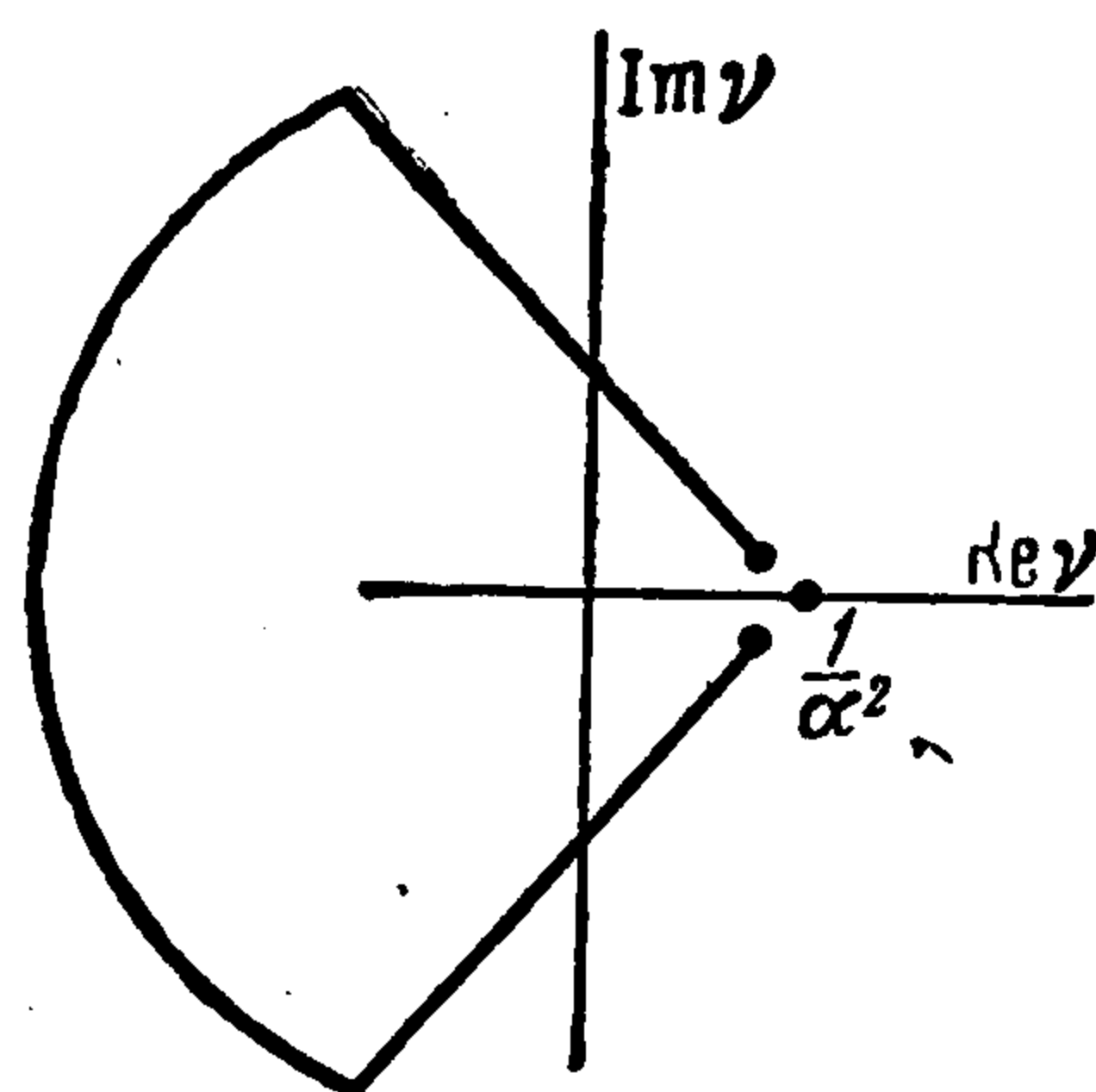
Теперь можем написать

$$v_r^{(1)} \approx \alpha^2 A \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\vartheta^{(1)3} (1 - 2b^2 \vartheta^{(1)2})}{(\alpha^{-2} - \vartheta^{(1)2}) \sqrt{a^{-2} - \vartheta^{(1)2}}} \cos \Omega d\Omega \quad (3.3)$$

Здесь удобно перейти к интегрированию по переменной  $v = \vartheta^{(1)2}$ .



Фиг. 3



Фиг. 4

Тогда с точностью до членов порядка  $\ln|z|$  и  $\ln|\alpha t - r|$  получим

$$v_r^{(1)} \approx A \int_{l^{(1)}} \frac{(1 - 2b^2 v) dv}{(\alpha^{-2} - v) \sqrt{a^{-2} - v} \sqrt{v - \alpha^{-2} (1 - 2\eta - 2\alpha \zeta \sqrt{a^{-2} - v})}} \quad (3.4)$$

Здесь  $\eta = (r - \alpha t) / \alpha t$ ,  $\zeta = z / \alpha t$ , а контур  $l^{(1)}$  показан на фиг. 3. Концы контура  $l^{(1)}$  находятся в точках

$$v_{1,2}^{(1)} = \alpha^{-2} (1 - 2\eta \pm 2i\zeta \sqrt{1 - \alpha^2 a^{-2}})$$

Последний радикал в знаменателе подынтегрального выражения (3.4) должен быть униформирован так, чтобы он принимал положительно мнимое значение при  $v = 0$ . Контур  $l^{(1)}$  можно деформировать, как показано на фиг. 4. Теперь ясно, что асимптотическое поведение интеграла при  $\eta, \zeta \rightarrow 0$  определяется поведением подынтегральной функции на прямолинейных частях контура вблизи точек  $v_1^{(1)}$  и  $v_2^{(2)}$ , и мы легко получаем

$$v_r^{(1)} \approx - \frac{\sqrt{2} \pi A (\alpha^2 - 2b^2)}{\sqrt{1 - \alpha^2 a^{-2}}} \operatorname{Re} \frac{1}{\sqrt{\eta - i\zeta} \sqrt{1 - \alpha^2 a^{-2}}} \quad (3.5)$$

Аналогично

$$\begin{aligned} v_r^{(2)} &= - 2 \sqrt{2} \pi b^2 A \sqrt{1 - \alpha^2 b^{-2}} \operatorname{Re} \frac{1}{\sqrt{\eta - i\zeta} \sqrt{\alpha^2 b^{-2}}} \\ v_z^{(1)} &\approx - \sqrt{2} \pi A (\alpha^2 - 2b^2) \operatorname{Im} \frac{1}{\sqrt{\eta - i\zeta} \sqrt{1 - \alpha^2 a^{-2}}} \\ v_z^{(2)} &\approx - 2 \sqrt{2} \pi b^2 A \operatorname{Im} \frac{1}{\sqrt{\eta - i\zeta} \sqrt{1 - \alpha^2 b^{-2}}} \\ \frac{1}{2\mu} \tau_{rz}^{(1)} &\approx \sqrt{2} \pi \alpha^{-1} A (\alpha^2 - 2b^2) \operatorname{Im} \frac{1}{\sqrt{\eta - i\zeta} \sqrt{1 - \alpha^2 a^{-2}}} \\ \frac{1}{2\mu} \tau_{rz}^{(2)} &\approx - \sqrt{2} \pi \alpha^{-1} A (\alpha^2 - 2b^2) \operatorname{Im} \frac{1}{\sqrt{\eta - i\zeta} \sqrt{1 - \alpha^2 b^{-2}}} \\ \frac{1}{2\mu} \sigma_z^{(1)} &\approx \frac{\sqrt{2} \pi A (\alpha^2 - 2b^2)^2}{2b^2 \alpha \sqrt{1 - \alpha^2 a^{-2}}} \operatorname{Re} \frac{1}{\sqrt{\eta - i\zeta} \sqrt{1 - \alpha^2 a^{-2}}} \\ \frac{1}{2\mu} \sigma_z^{(2)} &\approx - 2 \sqrt{2} \pi \alpha^{-1} b^2 A \sqrt{1 - \alpha^2 b^{-2}} \operatorname{Re} \frac{1}{\sqrt{\eta - i\zeta} \sqrt{1 - \alpha^2 b^{-2}}} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Обратимся к условию (1.6). Возьмем контур  $l_\delta$  и в виде малого прямоугольника со сторонами  $2\delta_1$  и  $2\delta_2$  по направлениям  $r$  и  $z$ , соответственно, и устремим  $\delta_2$  к нулю при фиксированном  $\delta_1$ . Тогда интегралы по сторонам, параллельным оси  $z$ , исчезнут, и левая часть (1.6) примет вид

$$2 \lim_{\delta_1 \rightarrow 0} \lim_{\delta_2 \rightarrow 0} \int_{\alpha t - \delta_1}^{\alpha t + \delta_1} (\tau_{rz} v_r + \sigma_z v_z) dr$$

Легко видеть, что  $\tau_{rz}$  не имеет особенности при  $r = \alpha t, z = 0$ , так что интеграл от первого слагаемого может быть отброшен. При помощи (3.6) получим

$$8\mu \pi^3 b^2 A^2 \frac{\sqrt{1 - \alpha^2 a^{-2}} \sqrt{1 - \alpha^2 b^{-2}} - (1 - 1/2 \alpha^2 b^{-2})^2}{\sqrt{1 - \alpha^2 a^{-2}}} = C \quad (3.7)$$

Отсюда видно, что  $\alpha$  не может быть больше или равна  $c$ , так как при  $\alpha = c$  левая часть меняет знак. Подставляя значение  $A$  из (2.12), имеем

$$\frac{\pi (\sigma_z^0)^2 [\sqrt{1 - \alpha^2 a^{-2}} \sqrt{1 - \alpha^2 b^{-2}} - (1 - 1/2 \alpha^2 b^{-2})^2]}{8\mu b^2 [J(\alpha)]^2 \sqrt{1 - \alpha^2 a^{-2}}} = C \quad (3.8)$$

где

$$J(\alpha) = \int_0^\infty \frac{(v + 1/2 b^{-2})^2 - v \sqrt{\alpha^{-2} + v} \sqrt{b^{-2} + v}}{(\alpha^{-2} + v)^2 \sqrt{\alpha^{-2} + v}} dv \quad (3.9)$$

Уравнение (3.8) определяет скорость распространения трещины в зависимости от начального напряжения. При  $\alpha \rightarrow 0$  имеем

$$J(\alpha) \approx \frac{\pi(a^2 - b^2)}{4x^2 b^2} \alpha$$

и, следовательно, при малых  $\alpha$  можно написать

$$\frac{a^2 [\sigma_z^\circ(0)]^2}{\mu\pi(a^2 - b^2)} = C \quad (3.10)$$

Это дает наименьшее значение  $\sigma_z^\circ(0)$ , при котором может начаться развитие трещины

$$\sigma_z^\circ(0) = a^{-1} \sqrt{\mu\pi(a^2 - b^2)C} \quad (3.11)$$

В этом пункте задача смыкается с теорией равновесных трещин. Строго говоря, задача предполагает наличие в начальный момент малой трещины, размеры которой при математической формулировке задачи не учитывались. Если учесть это обстоятельство, можно заключить, что  $\sigma_z^\circ(0)$  совпадает с предельным напряжением для начальной трещины. Это позволяет выразить константу  $C$  через статический модуль сцепления  $K$  (см., например, [7]). Пользуясь решением статической задачи [8]

$$\sigma_z = \frac{2\sigma_z^\circ r_0}{\pi \sqrt{r^2 - r_0^2}} - \frac{2\sigma_z^\circ}{\pi} \arcsin \frac{r_0}{r} \quad \text{при } z = 0, r > r_0$$

где  $r_0$  — радиус начальной трещины, и критерием равновесности [7], получим

$$\sigma_z^\circ(0) = \frac{K}{\sqrt{2r_0}}$$

Это значение должно быть равно (3.11), откуда

$$C = \frac{K^2 a^2}{2\mu\pi(a^2 - b^2)r_0} \quad (3.12)$$

В заключение автор пользуется случаем выразить свою признательность Н. В. Зволинскому, А. А. Гвоздеву и В. А. Афанасьеву за внимание к работе и полезные дискуссии. Автор благодарен также Г. И. Баренблатту за ценное обсуждение работы.

Поступила 25 III 1964

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В о б е р г К. В. The propagation of a brittle crack. Arkiv. fys., 1960, Bd. 18, Hft. 2.
2. Б а р е н б л а т т Г. И., С а л г а н и к Р. С., Ч е р е п а н о в Г. П. О неустановившемся распространении трещин. ПММ, 1962, т. 26, вып. 2.
3. W e l l s A. A. a. P o s t D. The dynamic stress distribution surrounding a running crack- a photoelastic analysis. Naval Research Lab. NPL-4935, Washington, D. C., Apr. 23, 1957.
4. Б э к е р. Динамические напряжения, вызываемые распространением трещины. Trans. ASME, ser. E, 1962, № 3 (русский перевод).
5. К о с т р о в Б. В. Автомодельные динамические задачи о вдавливании жесткого штампа в упругое полупространство. Механика и машиностроение, 1964, № 4.
6. Ф р а н к Ф. и М и з е с Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. ОНТИ, М.—Л., 1937.
7. Б а р е н б л а т т Г. И. Математическая теория равновесных трещин, образующихся при хрупком разрушении. ПМТФ, 1961, № 4.
8. У ф л я н д Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1963.