

## О НЕКОТОРЫХ ОБЩИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ХРУПКОГО РАЗРУШЕНИЯ

Г. И. Баренблатт

(Москва)

Теория хрупкого разрушения возникла более сорока лет назад в классических работах А. А. Гриффитса [1,2]. До сравнительно недавнего времени эта теория рассматривалась скорее как объект чисто академического, нежели прикладного интереса, поскольку материалы, разрушающиеся при нормальных условиях по хрупкому механизму, сравнительно редки. В последнее время интерес к явлениям, связанным с хрупким разрушением, в частности, к равновесию и распространению трещин, возродился и сильно возрос. Выяснилось, что при повышенных и пониженных температурах по «квазихрупкому» механизму разрушаются многие конструкции, выполненные из широко используемых материалов, проявляющих себя при стандартных испытаниях на растяжение как вполне пластичные. Термин «квазихрупкое» разрушение означает, что разрушение происходит путем распространения трещин, причем пластическая область хотя и существует, но очень узка и сосредотачивается в непосредственной окрестности поверхности трещин. При расчете квазихрупкого разрушения оказывается возможным использовать закономерности, полученные для чисто хрупкого разрушения, заменяя поверхностное натяжение суммарной плотностью поверхностной энергии, затрачиваемой не только на разрыв межмолекулярных связей, но и на пластические деформации тонкого приповерхностного слоя, что было впервые отмечено Д. Ирвином [3] и Ю. Орованом [4]. За последнее десятилетие было выполнено большое число работ, посвященных исследованию статике и динамике упругих тел с трещинами. Достигнутые к настоящему времени результаты изучения равновесия и распространения трещин позволяют сформулировать постановки основных задач математической теории хрупкого разрушения в более общей форме.

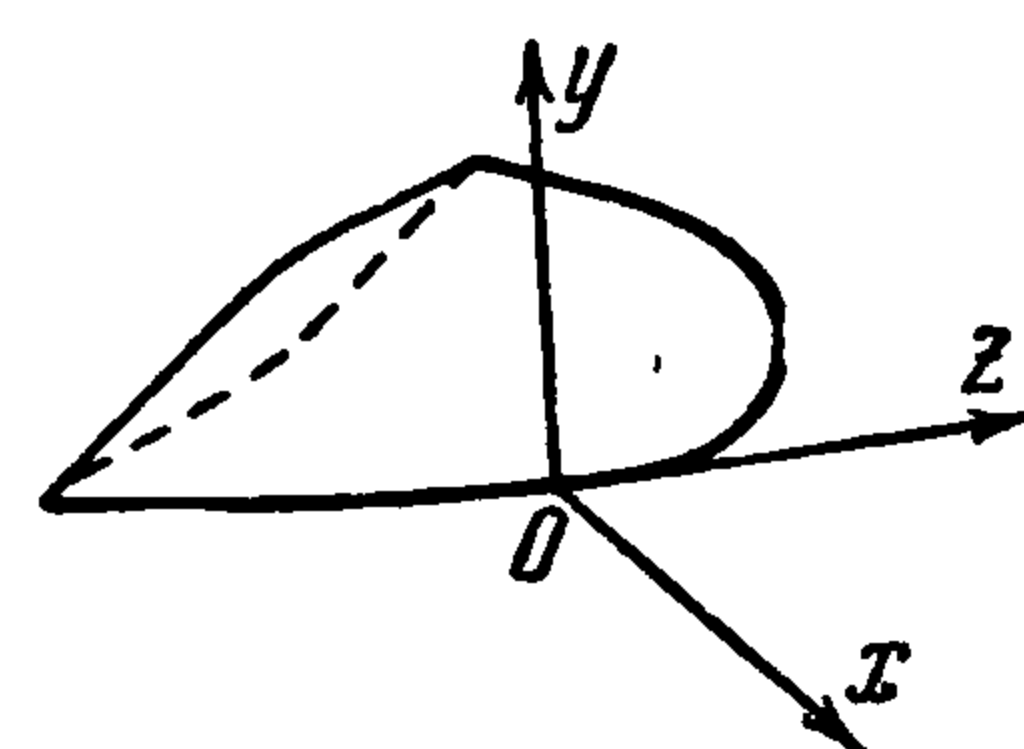
Задачей математической теории хрупкого разрушения следует считать аналитическое определение хрупкой прочности данного тела при данной системе нагрузок. Прежде всего следует определить, что именно является количественной характеристикой хрупкой прочности. Точное определение такой характеристики дается ниже. Здесь же следует подчеркнуть, что каково бы ни было это определение, при оценке хрупкой прочности тела с самого начала следует учитывать наличие в теле трещин и определять их влияние на прочность: хрупкое разрушение происходит путем развития имеющихся в теле дефектов. Поэтому для теории хрупкого разрушения имеет важное значение рассмотрение задач равновесия упругих тел с трещинами, т. е. задач определения упругих полей и конфигураций трещин. Спецификой этих задач является то, что форма поверхности трещин в теле при данной нагрузке не задана и определяется, вообще говоря, всем процессом нагружения тела и начальными трещинами, существовавшими в теле до нагружения. Это обстоятельство делает задачи теории трещин существенно нелинейными и весьма трудными; в настоящее время эффективное аналитическое решение имеется лишь для немногих задач.

Отметим, что решение задачи о равновесии тела с трещинами содержит гораздо большую информацию, чем это необходимо на практике: в конечном счете упругое поле и размеры трещины в теле мало интересны. На самом деле важно знать только, обладает ли тело при данной нагрузке несущей способностью или нет. Переводя на математический язык, можно сказать, что в действительности интересно

не самое решение задачи равновесия тела с трещинами, а только факт его существования или несуществования при данной нагрузке. Таким образом, разрушение означает наступление условий, обеспечивающих несуществование решения соответствующей задачи упругого равновесия тела с трещинами. Эти условия носят существенный интегральный характер и не определяются локальной структурой напряженного состояния в каких-либо точках тела. Развиваемый здесь подход к хрупкому [разрушению] согласуется с общей глобальной концепцией разрушения твердых тел<sup>[5]</sup>.

Некоторые исследователи склонны видеть существенную ограниченность теории в том, что она не охватывает зарождения трещин и получающиеся критерии прочности зависят от размера начальных трещин, имеющихся в теле. [Однако такая точка зрения является упрощенной: она основана на неправильном представлении о том, что во всех случаях, как только начинается развитие трещины, оно сразу же приобретает катастрофический характер и приводит к полному разрушению конструкции. На самом деле развитие трещин в правильно спроектированных и изготовленных конструкциях сперва носит устойчивый характер<sup>[6]</sup>, так что при повышении нагрузки размер трещины сначала возрастает непрерывно. В этих условиях оказывается, что характеристика прочности тела в определенных пределах не зависит от исходных размеров трещин. Имеющиеся внутри и на поверхности конструкции трещины не должны в назначенном для данной конструкции рабочем интервале нагрузок катастрофически развиваться; если же трещины достаточно малы и обеспечено их устойчивое развитие в рабочем интервале нагрузок, то характеристика хрупкой прочности данной конструкции, определенная для некоторой выбранной по конструктивным соображениям наиболее опасной конфигурации трещин, не зависит от размеров трещин и может быть принята при конструировании в качестве расчетной. Теория хрупкого разрушения допускает усовершенствование путем учета развития трещин из микродефектов; такое усовершенствование представляет принципиальный интерес. Однако, по-видимому, на практике хрупкое разрушение в большинстве случаев происходит за счет развития, хотя и малых, [но макроскопических дефектов<sup>[6]</sup>.

§ 1. Трещины хрупкого разрушения в твердых телах можно рассматривать как поверхности разрыва вектора упругих смещений. Вообще говоря, на такой поверхности претерпевают разрыв все три компонента этого вектора. До недавнего времени сколько-нибудь детально рассматривались трещины нормального разрыва, на поверхности которых претерпевает разрыв только нормальная к поверхности разрыва компонента вектора смещения, а также трещины сдвига, на которых претерпевает разрыв только тангенциальная компонента вектора смещения.



Фиг. 1

Возьмем окрестность произвольной точки  $O$  контура<sup>1</sup> одной из трещин в теле (фиг. 1). Введем естественную локальную систему координат с началом в точке  $O$ : ось  $z$  направим по касательной к линии контура трещины, ось  $y$  — по нормали к поверхности трещины в точке  $O$ , ось  $x$  — в глубь тела. Можно показать, что распределение напряжений в точках оси  $x$  вблизи начала имеет, вообще говоря, вид

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} &= \frac{N}{\sqrt{x}} + O(1), & \sigma_{xy} &= \frac{T}{\sqrt{x}} + O(1), & \sigma_{yz} &= \frac{S}{\sqrt{x}} + O(1) \\ \sigma_{xx}, \sigma_{xz}, \sigma_{zz} &= O(1) \end{aligned} \quad (1.1)$$

<sup>1</sup> Под контуром трещины, как обычно, понимается линия, ограничивающая поверхность разрыва смещений.

где  $\sigma_{xx} \dots \sigma_{zz}$  — компоненты тензора напряжений;  $N, T, S$  — «коэффициенты интенсивности напряжений» — величины, зависящие от приложенных нагрузок, формы границ тела и трещин, имеющих в теле и положения точки  $O$ , но не зависящие от  $x$ . Как показано в [7], напряжения на контуре трещины должны быть конечными, так что

$$N = T = S = 0 \quad (1.2)$$

В предыдущих работах (см. обзор [8]), за редкими исключениями рассматривались прямолинейные трещины нормального разрыва, для которых на оси  $x$  напряжения  $\sigma_{xy} \equiv 0, \sigma_{yz} \equiv 0$ , или трещины продольного сдвига, для которых  $\sigma_{yy} = \sigma_{xy} = \sigma_{xx} = \sigma_{zz} \equiv 0$  во всем теле. Условие  $N = 0$  в качестве основного соотношения, определяющего положение краев трещин, в гипотетической форме впервые выдвинуто С. А. Христиановичем [9] и доказано, исходя из принципа возможных перемещений, в работе [10]. Это условие означает конечность напряжений и плавность смыкания противоположных берегов на краях трещины нормального разрыва.

Естественно разбить поверхность трещины на две области [11]: внутреннюю, где противоположные берега трещины далеко отстоят один от другого и силы сцепления пренебрежимо малы, и концевую, где расстояния между противоположными берегами малы и действуют силы сцепления. (В случае квазихрупкого разрушения за поверхность трещины принимается граница окружающей трещину пластической области и внешней упругой области; роль сил сцепления при этом играют силы, действующие со стороны пластической головки трещины). Но в силу линейности задачи теории упругости для фиксированной формы тела и трещин, к которой приводится определение величин  $N, T$  и  $S$ , эти величины можно представить в виде

$$N = N_0 + N_a, \quad T = T_0 + T_a, \quad S = S_0 + S_a \quad (1.3)$$

где величины с индексом нуль вычисляются без учета сил сцепления, действующих в концевой области трещины, а величины с индексом  $a$  соответствуют действию одних только сил сцепления при той же конфигурации трещин.

По мере увеличения нагрузки, действующей на тело, силы сцепления возрастают и, наконец, достигают некоторой максимальной интенсивности, после чего трещина начинает в данном месте продвигаться. При рассмотрении трещин нормального разрыва в основу были положены две гипотезы (см. обзор [8]): гипотеза малости концевой области и гипотеза об автономности (независимости от нагрузок при данных условиях) формы поверхности трещины (и, следовательно, распределения сил сцепления) вблизи точек, в которых интенсивность сил сцепления максимальна. Эти гипотезы приводят к условию, что во всех точках контура трещины нормального разрыва

$$N_0 \leq K/\pi$$

где  $K$  — модуль сцепления [11,8] — константа материала, являющаяся интегральной характеристикой сил сцепления для трещин нормального разрыва и характеризующая сопротивление материала хрупкому разрушению. Состояния точек контура, в которых  $N_0 = K/\pi$ , являются предельными, так что всякое изменение нагрузки, которое должно было бы привести к увеличению  $N_0$ , на самом деле приводит к движению трещин в этих точках контура.

В общем случае трещина может располагаться произвольным образом по отношению к приложенным нагрузкам, так что одинаковости формы концевой области в начале распространения трещины уже не будет. Для определения условий начала развития трещины примем следующую гипотезу, естественно обобщающую гипотезу автономности концевой области для трещин нормального разрыва: для всякого тела, разрушающегося по хрупкому или квазихрупкому механизму, существует универсальная

Функция коэффициентов интенсивностей сил сцепления

$$\Phi(-N_a, -T_a, -S_a) \quad (1.4)$$

такая, что

$$\Phi \leq 0 \quad (1.5)$$

во всех точках контуров всех трещин в теле. Состояния точек контуров трещин, в которых  $\Phi = 0$ , являются предельными в том смысле, что достижение этого состояния в некоторой точке контура делает трещину подвижной в этой точке, и всякое изменение нагрузки, которое должно было бы привести к такой перестройке сил сцепления в данной точке, что стало бы  $\Phi > 0$ , на самом деле, в силу условия (1.5), приводит к продвижению трещины в данной точке контура. Соотношения (1.2) и (1.3) позволяют записать предельное условие в виде

$$\Phi(N_0, T_0, S_0) = 0 \quad (1.6)$$

В частности, если предельное условие соответствует постоянству энергии разрушения, так что плотность энергии  $\gamma$ , затрачиваемой при образовании новой поверхности трещины, постоянна вне зависимости от того, каким образом достигнуто предельное состояние в данной точке контура, то соотношение (1.6) имеет вид

$$\frac{\pi(1+\nu)}{E} [(1-\nu)(N_0^2 + T_0^2) + S_0^2] = \gamma$$

где  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $E$  — модуль Юнга. Но плотность поверхностной энергии  $\gamma$  связана с модулем сцепления  $K$  соотношением [11, 8]

$$K^2 = \pi E \gamma / (1 - \nu^2)$$

Поэтому из предыдущего выражения следует

$$\Phi \equiv N_0^2 + T_0^2 + \frac{1}{1-\nu} S_0^2 - \frac{1}{\pi^2} K^2 \quad (1.7)$$

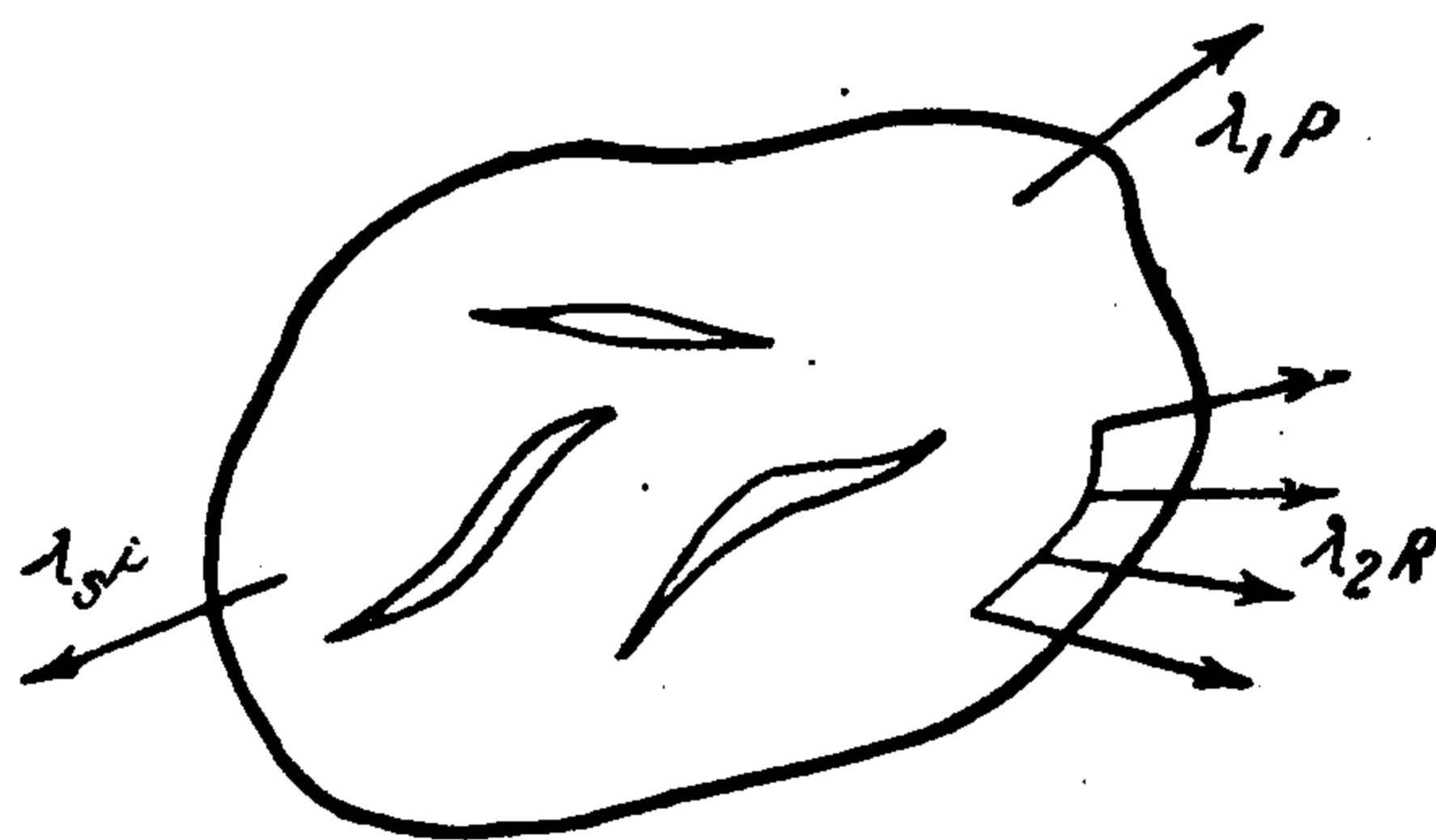
Для трещин нормального разрыва ( $T_0 = S_0 = 0$ ) соотношения (1.6) и (1.7) приводятся к известному условию [11, 8]:

$$\Phi \equiv N_0 - K/\pi = 0 \quad (1.8)$$

Соотношение (1.6) определяет условия начала развития трещины, но этого соотношения, вообще говоря, недостаточно для выяснения того, как будет происходить дальнейшее распространение трещины.

Предположим, что на хрупкое тело с некоторой системой начальных трещин действует система  $s$  нагрузок, пропорциональных некоторым безразмерным параметрам  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$  (фиг. 2) (а также, быть может, некоторая другая система нагрузок, остающаяся неизменной для всего рассматриваемого в дальнейшем процесса нагружения). Исходному состоянию тела соответствуют значения параметров  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_s = 0$ . Простейшим частным случаем является случай  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_s = \lambda$  — так называемое пропорциональное нагружение. Введем в рассмотрение пространство  $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_s$ . Кривая в этом пространстве

$$\lambda_1 = \lambda_1(t), \quad \lambda_2 = \lambda_2(t), \quad \dots, \quad \lambda_s = \lambda_s(t) \quad (t \text{ — параметр}) \quad (1.9)$$



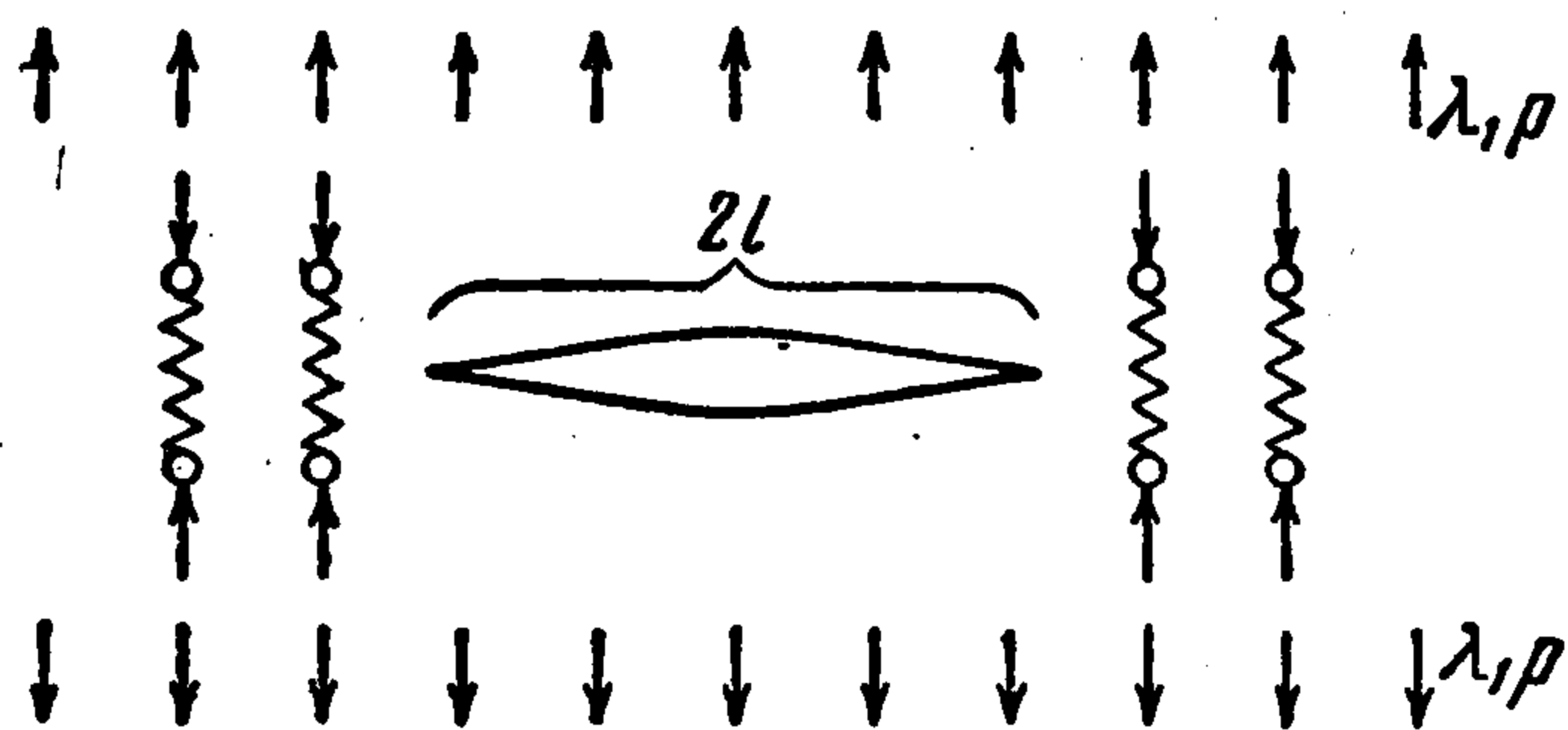
Фиг. 2

проходящая при  $t = 0$  через начало координат  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = 0$ , определяет некоторый путь нагружения тела.

Путь нагружения называется активным, если на всем пути нагружения величина  $\Phi$  для всех точек контуров всех трещин в теле не убывает.

Задача равновесия тела с трещинами формулируется следующим образом: для заданного при  $t = 0$  исходного состояния тела с некоторой исходной системой трещин и заданного пути нагружения определить упругое поле и конфигурацию системы трещин, соответствующую некоторому значению  $t = t_1 > 0$ .

§ 2. Рассмотрим пример. Представим себе (фиг. 3) бесконечную пластинку с трещиной, растягиваемую на бесконечности перпендикулярным трещине однородным напряжением  $\lambda_1 p$  ( $\lambda_1$  — безразмерный параметр нагружения,  $p$  — некоторая постоянная, имеющая размерность напряжения). Пластинка подкреплена двумя парами проволочных петель, продетых в специально просверленные в пластинке отверстия. Если начальные напряжения в петлях отсутствуют, то действие петель приближенно сводится к действию четырех пар сосредоточенных сил, которые возрастают



Фиг. 3

с увеличением параметра нагружения  $\lambda_1$ . Здесь имеет место простейший случай трещины нормального разрыва, для которого

$$\Phi \equiv N_0 - K / \pi.$$

В данном случае симметричной изолированной трещины [11, 8]:

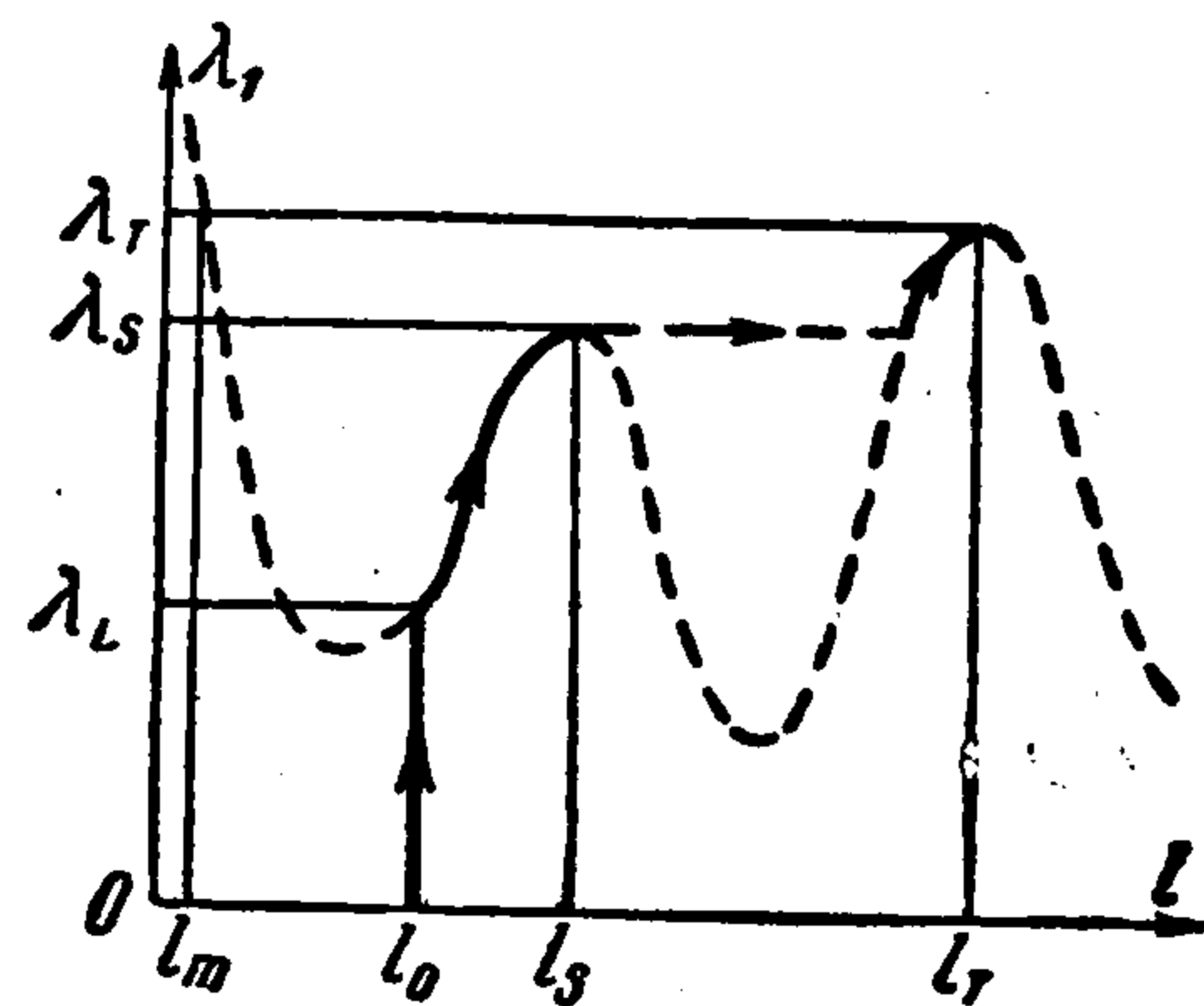
$$N_0 = \frac{V 2l}{\pi} \int_0^1 \frac{g(l\xi) d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad (2.1)$$

где  $l$  — полудлина трещины, а  $g(x)$  — распределение нормальных напряжений на месте трещины в сплошном теле под действием тех же нагрузок, так что предельное условие (1.8) принимает следующий вид:

$$\lambda_1 = \varphi(l) \equiv \frac{K}{V 2l} \left[ \int_0^1 \frac{g(l\xi) d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \right]^{-1} \quad (2.2)$$

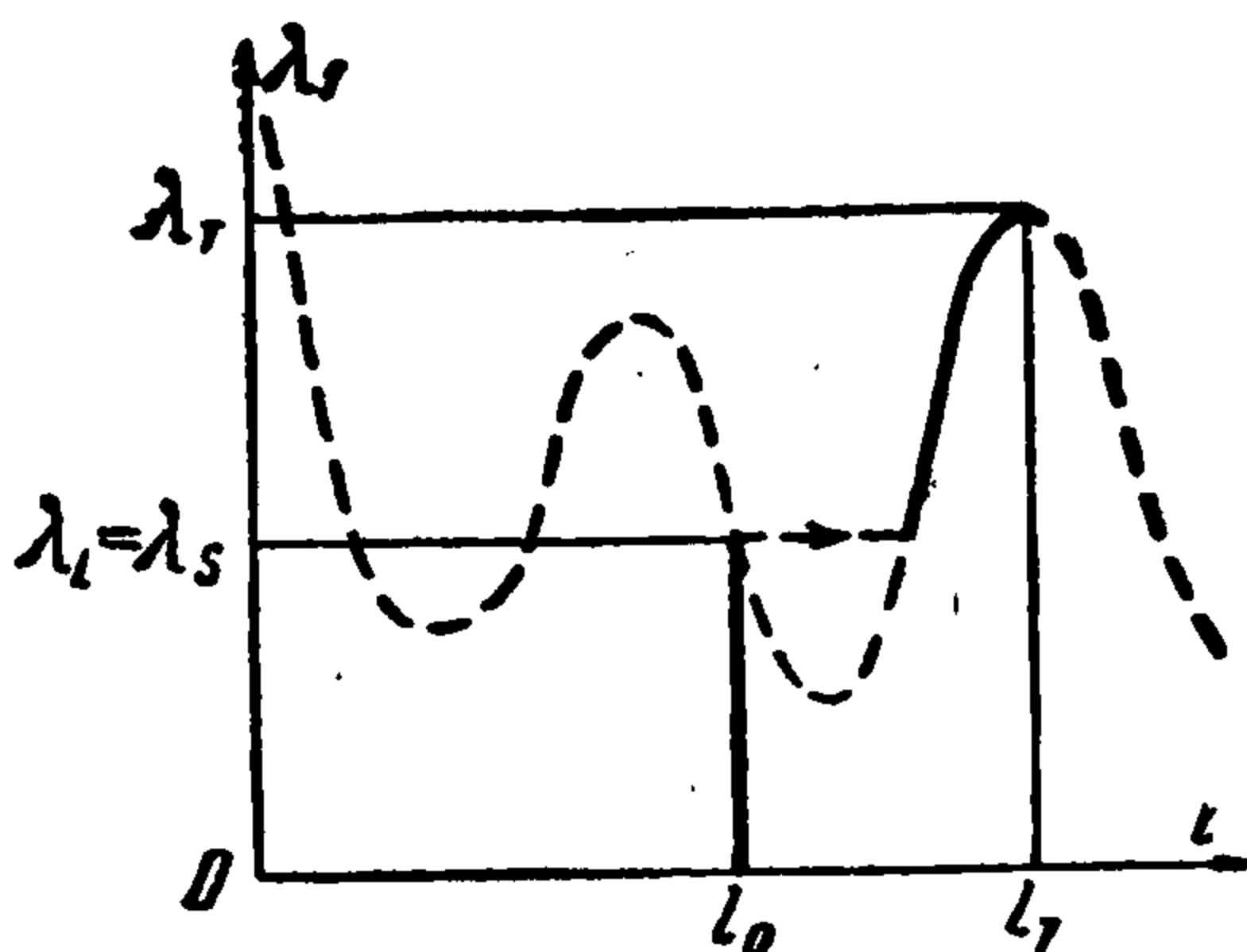
Соотношение (2.2) определяет, вообще говоря, размер трещины  $2l$ , соответствующий каждому значению параметра  $\lambda_1$ , если известен начальный размер трещины  $2l_0$  в ненагруженной пластинке (при  $\lambda_1 = 0$ ), т. е.

решает для данного случая основную задачу теории трещин. В самом деле, можно показать, что для данного случая график функции  $\varphi(l)$  будет иметь вид, представленный схематически на фиг. 4. При возрастании  $\lambda_1$  длина трещины остается неизменной и равной  $2l_0$ , пока не будет достигнуто значение параметра  $\lambda_1 = \lambda_L$ , при котором на концах трещины достигаются предельные условия и начинает выполняться соотношение (2.2). При дальнейшем увеличении параметра нагружения  $\lambda_1$  трещина начинает расши-

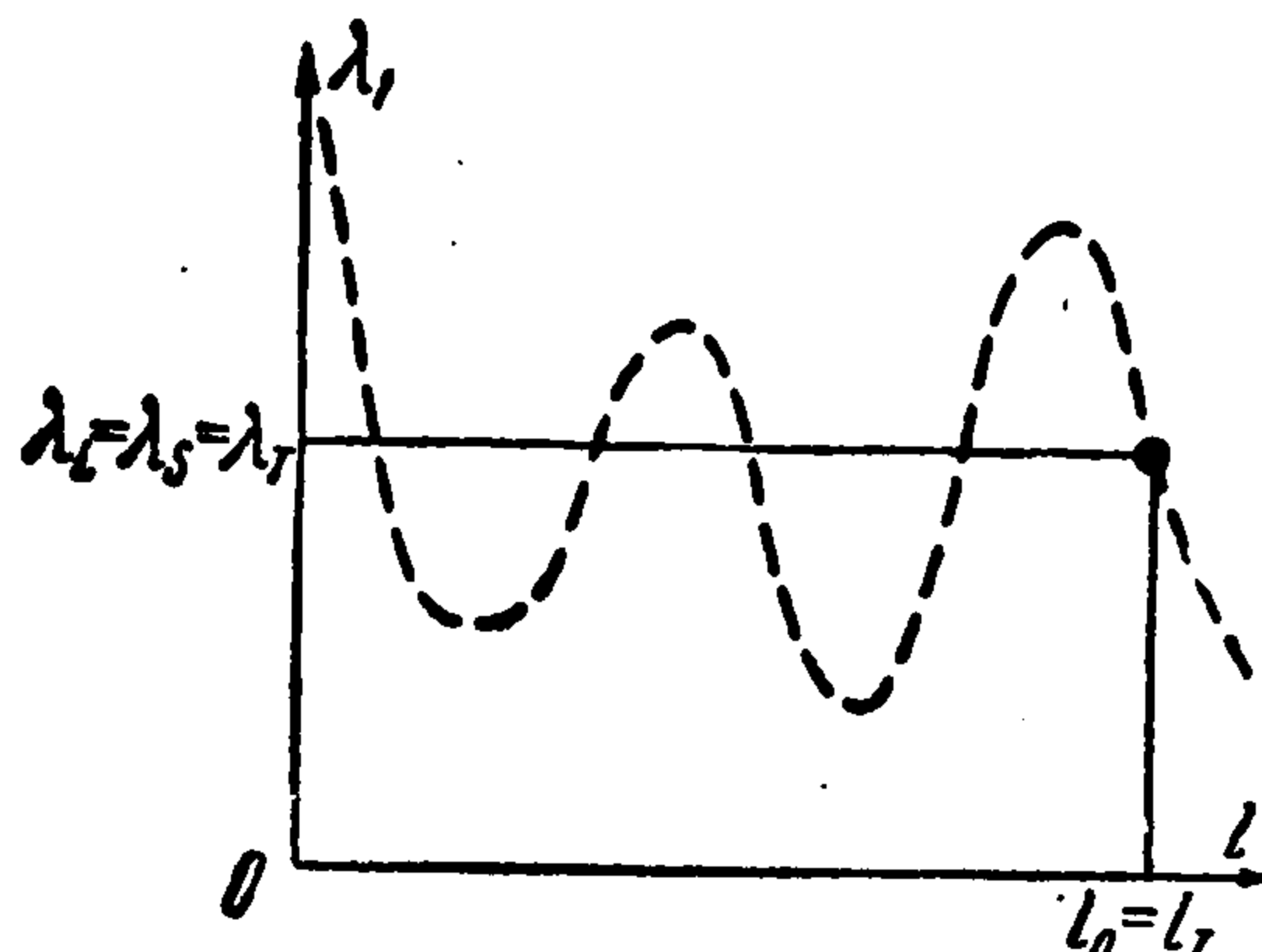


Фиг. 4

ряться; длина трещины определяется соотношением (2.2), причем существенно, что длина трещины непрерывно зависит от величины параметра нагружения (трещина развивается устойчиво), пока не достигается значение  $\lambda_1 = \lambda_S$ . Как видно, при возрастании параметра  $\lambda_1$  от  $\lambda_L$  до  $\lambda_S$ , несмотря на рост трещины, никакого разрушения тела не происходит: пластинка по-прежнему остается способной воспринимать возрастающую нагрузку.



Фиг. 5



Фиг. 6

После достижения значения параметра нагружения  $\lambda_1 = \lambda_S$  положение несколько меняется. Решение (в частности, размер трещины) перестает непрерывно зависеть от параметра нагружения: трещина теряет устойчивость и увеличивается скачком. Важно, что и это еще не означает разрушения тела: при последующем возрастании  $\lambda_1$  трещина продолжает увеличиваться устойчивым образом и пластинка остается способной воспринимать увеличивающуюся нагрузку вплоть до достижения параметром нагружения значения  $\lambda_1 = \lambda_T$ . При последующем увеличении параметра нагружения, даже сколь угодно малом, решение задачи равновесия тела с трещиной перестает существовать. Физически это означает, что при всех  $l > l_T$  предельное состояние на концах трещин достигается уже при значениях нагрузок, соответствующих меньшим значениям параметра нагружения  $\lambda_1$ , так что при  $\lambda_1 > \lambda_T$  силы сцепления не в состоянии сдержать развитие трещины, и происходит разрушение тела. Таким образом, наступление разрушения тела связано с несуществованием решения задачи равновесия тела с трещиной. Предельное значение параметра нагружения  $\lambda_T$  определяет прочность пластинки с трещиной.

При других значениях начальной длины трещины характерные значения параметра нагружения могут совпасть. Так, если  $l_0$  лежит на втором неустойчивом участке (фиг. 5), то  $\lambda_L = \lambda_S$ , т. е. развитие трещины сразу же после достижения предельного состояния на концах становится неустойчивым, но разрушения тела при этом не происходит. Если  $l_0$  соответствует третьему неустойчивому участку (фиг. 6), то  $\lambda_L = \lambda_S = \lambda_T$ , т. е. развитие трещины также сразу же становится неустойчивым, и происходит полное разрушение тела.

Очень важно, что предельное значение параметра нагружения  $\lambda_T$  (фиг. 4), характеризующее прочность тела, оказывается одинаковым для всех значений начального размера трещины в диапазоне  $l_m < l_0 < l_T$ . Если  $l_0 < l_m$  или  $l_0 > l_T$ , то сразу же после достижения предельного состояния на кон-

цах трещины начнется катастрофическое развитие трещины, приводящее к полному разрушению тела. Соответствующее значение параметра нагружения  $\lambda_F$  при  $l_0 < l_m$  больше  $\lambda_T$ , при  $l_0 > l_m$  меньше  $\lambda_T$ . Поэтому для рассматриваемой конструкции можно сформулировать следующий общий вывод:

1°. В ненагруженной пластинке длина трещины должна быть меньше  $2l_T$ .

2°. Если выполнено условие 1°, то приложение любой нагрузки, меньшей  $\lambda_T r$ , не приведет к разрушению конструкции.

Итак, для данного простейшего случая практическая рекомендация такова: пластинки с длиной трещины, большей  $2l_T$ , должны быть забракованы<sup>1</sup>; в качестве предела прочности можно указать величину нагрузки  $\lambda_T r$ , и эта величина не зависит от длины трещины. При  $l_0 < l_m$  такое значение предела прочности дает запас.

В литературе можно встретить утверждение, что условие  $N_0 = K/\pi$  всегда означает начало катастрофического развития трещины и разрушения тела.

Рассмотренный пример показывает, что начало локального разрушения, т. е. развития трещин в теле, не совпадает, вообще говоря, с началом неустойчивого развития трещин, а начало неустойчивого, катастрофического развития имеющихся в теле трещин, вообще говоря, не совпадает с полным разрушением тела. Иными словами, разрушение тела определяется не локальной структурой напряженного состояния в каких-либо точках тела, а существенно интегральным условием несуществования решения задачи равновесия тела с трещинами.

Принятие условия локального разрушения в качестве критерия разрушения тела может привести к существенной недооценке несущей способности тела. Пример показывает также, что теория хрупкого разрушения позволяет получить универсальную характеристику прочности конструкции, которая может вводиться в расчеты и не зависит от размера исходной трещины.

§ 3. Вернемся к общему случаю. Для данного тела, данной конфигурации трещин в нем и данной системы нагрузок введем в рассмотрение в пространстве  $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_s$  поверхность локального разрушения

$$F_L(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s) = 0 \quad (3.1)$$

обладающую следующими свойствами: для любых нагрузок, представляемых внутренними точками к этой поверхности и достигаемых в результате пути нагружения, также лежащего целиком внутри этой поверхности, не происходит развития системы трещин ни в одной точке контура ни одной трещины в теле. При переходе же к любой точке, лежащей в области, внешней к поверхности (3.1), происходит то или иное развитие системы трещин в теле. В частности, если при  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = 0$  напряжения в теле отсутствуют, то начало координат заведомо лежит во внутренней области к поверхности локального разрушения. В примере, рассмотренном в § 1, уравнение поверхности локального разрушения имеет вид

$$\lambda_1 - \lambda_L = 0 \quad (3.2)$$

Поверхность локального разрушения в общем случае строится следующим образом.

<sup>1</sup> Это требование очевидно: оно означает просто, что трещина не должна вылезать из-под подкрепляющих петель.

Для заданной конфигурации системы трещин в теле величины  $N_0$ ,  $T_0$  и  $S_0$  представляют собой линейные функции параметров  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ :

$$N_0 = \sum_{i=1}^s \lambda_i n_i + N_{00}, \quad T_0 = \sum_{i=1}^s \lambda_i t_i + T_{00}, \quad S_0 = \sum_{i=1}^s \lambda_i s_i + S_{00} \quad (3.3)$$

где  $n_i, t_i, s_i$  — величины  $N_0, T_0, S_0$ , соответствующие единичным значениям параметра  $\lambda_i$  и нулевым значениям остальных параметров;  $N_{00}, T_{00}, S_{00}$  — величины  $N_0, T_0$  и  $S_0$ , соответствующие нулевым значениям всех  $s$  параметров  $\lambda_i$ .

Подставим соотношения (3.3) в выражение функции  $\Phi(N_0, T_0, S_0)$ , получим некоторую функцию от параметров  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  и координат точек контуров, в которых вычисляются величины  $n_i, t_i$  и  $s_i$ . Обращение  $\Phi(N_0, T_0, S_0)$  в нуль определяет наступление предельного состояния именно в данной точке контура трещины, так что соотношение  $\Phi = 0$  определяет однопараметрическое семейство поверхностей в пространстве  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ . Поверхность, ограничивающая пересечение внутренних областей всего семейства, и представляет собой поверхность локального разрушения. Она определяет область нагрузок, при приложении которых не происходит развития системы трещин в теле.

При выходе в область, внешнюю к поверхности локального разрушения, происходит развитие системы трещин в теле хотя бы в одной точке. Рассмотрим сначала более частный, хотя и достаточно широкий класс задач, для которых направление распространения трещин заранее предписано (например, задач, для которых симметрия тела и нагружения обеспечивает развитие плоских трещин, [или задач о трещинах в склеенных телах]). Для таких задач в случае активного пути нагружения упругое поле и конфигурация системы трещин в теле не зависят от пути нагружения, а зависят только от конечных нагрузок. Поэтому, наряду с поверхностью локального разрушения, имеет смысл ввести поверхность потери устойчивости и поверхность полного разрушения, определяемые следующим образом. Поверхность

$$F_S(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s) = 0 \quad (3.4)$$

в пространстве  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ , обладающая тем свойством, что при движении по любому активному пути нагружения, лежащему внутри этой поверхности, трещины развиваются устойчиво, так что конфигурация системы трещин меняется при движении по пути нагружения непрерывно, а при выходе пути нагружения за пределы области, внутренней к этой поверхности, хотя бы одна из трещин теряет устойчивость, называется поверхностью потери устойчивости. В примере, рассмотренном в § 2, уравнение поверхности потери устойчивости имеет вид

$$\lambda_1 - \lambda_s = 0 \quad (3.5)$$

Поверхность потери устойчивости определяет область значений параметров нагружения, в которой не происходит катастрофического развития имеющихся в теле трещин.

Поверхностью полного разрушения в пространстве  $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_s$  называется поверхность

$$F_T(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s) = 0 \quad (3.6)$$

такая, что решение задачи равновесия тела с трещинами существует для всех точек области, внутренней к этой поверхности при подходе к ним по любому активному пути нагружения, не выходящему за пределы внутренней области, и не существует для точек, внешних к этой поверхности.

В примере § 2 уравнение поверхности полного разрушения имеет вид

$$\lambda_1 - \lambda_T = 0 \quad (3.7)$$

Поверхность полного разрушения является наиболее важной характеристикой прочности тела при данном характере нагружения — она определяет «безопасную» область значений параметров нагружения, для которых не происходит разрушения тела. Практический интерес представляет именно определение поверхности полного разрушения, так как самый факт начала развития трещин в теле или даже потери устойчивости системы трещин, как уже отмечалось, несуществен — по настоящему существенно лишь исчерпание несущей способности, т. е. разрушение тела.

Таким образом, для класса задач, в которых направление распространения трещин заранее предписано, определение основной характеристики прочности — поверхности полного разрушения — сводится к выяснению области существования решения математически четко поставленной задачи равновесия тела с трещинами.

Дело существенно осложняется в общем случае криволинейной поверхности трещин, когда направление распространения трещин не предписано заранее и форма поверхности трещин существенно зависит от всего пути нагружения, а не только от положения его конечной точки. Здесь необходима дополнительная гипотеза, определяющая направление распространения трещин; одна из таких гипотез будет обсуждена ниже. Пока не существенно, что это за гипотеза, для наших целей достаточно предположения, что существует некоторое условие, определяющее направление распространения трещины в бесконечно малой окрестности ее контура через существующую в данный момент конфигурацию системы трещин и систему нагрузок.

Рассмотрим некоторый путь нагружения  $\lambda_1 = \lambda_1(t)$ ,  $\lambda_2 = \lambda_2(t), \dots$ ,  $\lambda_s = \lambda_s(t)$  и будем двигаться по нему от начала координат  $t = 0$ . При достаточно малых  $t$  конфигурация системы трещин в теле не меняется, так как ни в одной точке контуров трещин не достигается предельное состояние. Пусть при  $t = t_*$  предельное состояние достигается хотя бы в одной точке. Возьмем близкую точку рассматриваемого активного пути нагружения, отвечающую  $t = t_* + \Delta t$ . В силу условия направление распространения трещин во всех точках, где достигнуто предельное состояние, известно. Поэтому, вообще говоря, для достаточно малого  $\Delta t$  можно найти такую бесконечно близкую к исходному форму контура трещин в теле, что предельное условие (1.6) будет удовлетворено во всех новых точках контуров трещин. Затем дается новое приращение  $\Delta_1 t$ , и проделанная операция повторяется. Может случиться, что на каком-то этапе (в частности, на первом же) при сколь угодно малом  $\Delta t$  не существует близкой формы контуров, такой, что предельное условие (1.6) удовлетворяется во всех новых точках контуров трещин. Это означает либо потерю устойчивости одной из трещин (т. е. несуществование бесконечно близкого решения), либо раз-

рушение (т. е. несуществование решения вообще). Различать в общем случае эти две формы несуществования решения в рамках развиваемой чисто статической теории нельзя и это — по существу, так как процесс перехода трещины от одного, неустойчивого, состояния к другому, устойчивому, существенно динамический. Если направление развития трещин заранее предопределено, то сам динамический процесс развития трещин для анализа несуществен, и можно ограничиться сведениями об исходном и конечном состояниях, обязательно удовлетворяющих статическим условиям. В общем же случае форма поверхности трещины в конце динамического процесса развития трещин определяется всем ходом динамического процесса.

Таким образом, в общем случае принципиально возможно только указать предельное значение параметра  $t$  для данного пути нагружения (если оно существует), начиная с которого решение задачи равновесия упругого тела с трещинами перестает непрерывно зависеть от параметра  $t$ . Соответствует ли это предельное значение полному разрушению или только катастрофическому неустойчивому развитию одной из трещин без потери телом несущей способности, выяснить в общем случае нельзя.

Анализ опытных данных позволяет сформулировать условие, определяющее направление распространения криволинейных трещин.

Если задача равновесия тела с трещинами — плоская, так что поверхность трещины — цилиндрическая, то в качестве основной гипотезы, определяющей направление распространения трещины, можно принять гипотезу локальной симметрии [12] напряженного состояния вблизи нового конца трещины. Эта гипотеза заключается в следующем. Пусть имеется криволинейная трещина (фиг. 7), на конце которой  $O$  достигнуто предельное состояние. Тогда угол  $\theta$ , под которым будет распространяться трещина при бесконечно малом увеличении нагрузки, определяется условием симметрии напряженного состояния в малой области вблизи нового конца трещины  $O'$  относительно линии  $OO'$ . Это означает, в частности, отсутствие поперечного сдвига в этой области, т. е. равенство нулю касательных напряжений, лежащих в плоскости  $xu$ , вблизи точки  $O'$  на линии распространения трещины. В частности, согласно этому условию, при отсутствии также и продольного сдвига трещина распространяется по направлению максимального растягивающего напряжения, а при отсутствии нормального разрыва (трещины продольного сдвига) — по направлению максимального касательного напряжения. Гипотеза локальной симметрии была использована при решении конкретных задач в работах [13, 14]. Положение точки  $O'$  определяется выполнением в этой точке предельного условия (1.6), которое в силу того, что значение коэффициента интенсивности поперечных касательных напряжений  $T_0$  в точке  $O'$  равно нулю, записывается в виде

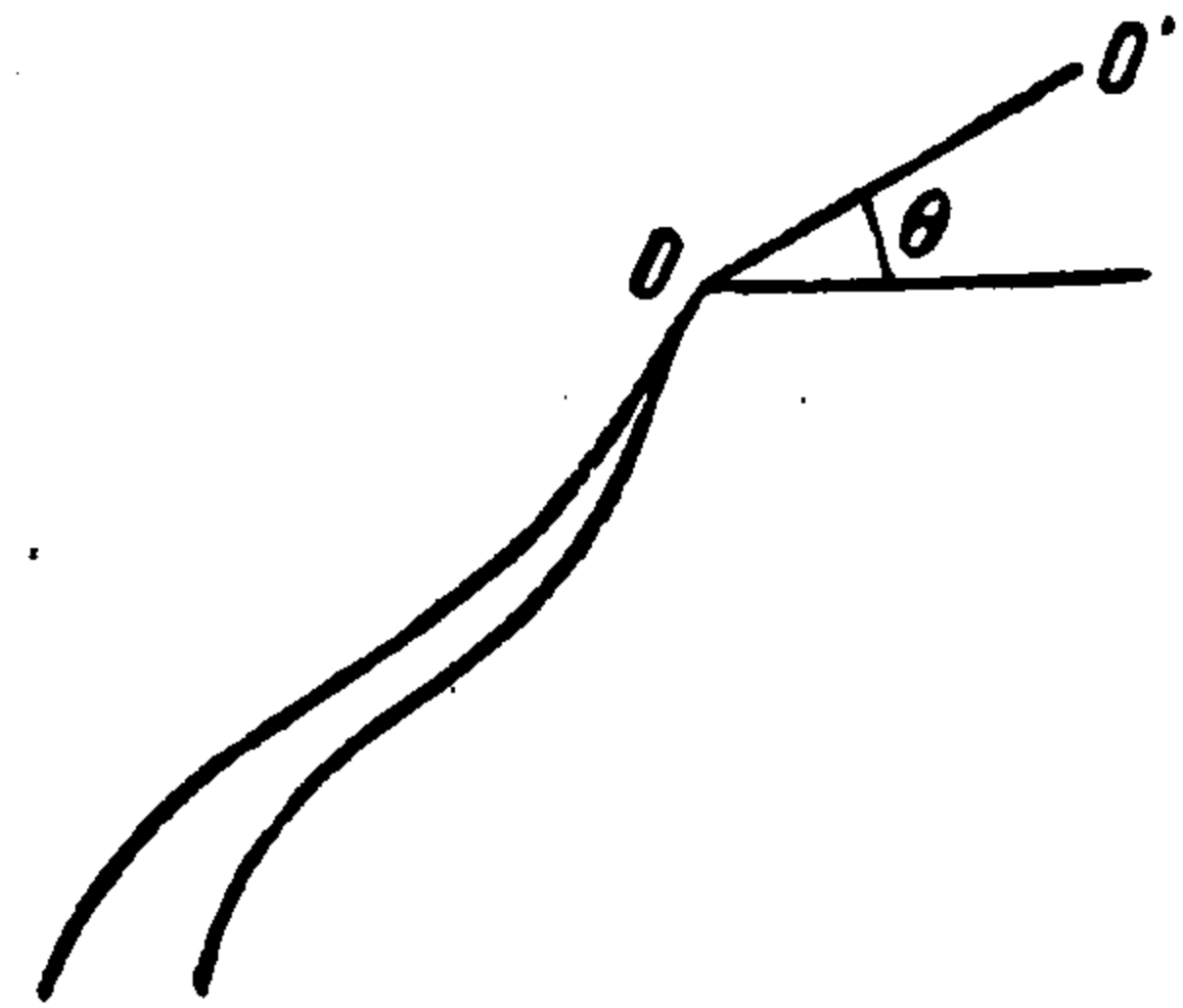
$$\Phi(N_{0'}, 0, S_{0'}) = 0 \quad (3.8)$$

где  $N_{0'}$  и  $S_{0'}$  — соответственно значения коэффициентов интенсивности напряжений в точке  $O'$ . Если, в частности, отсутствует продольный сдвиг, то условие (3.8) принимает обычный вид

$$N_{0'} = K / \pi \quad (3.9)$$

Если, наоборот, отсутствует нормальный разрыв, то это условие принимает вид

$$S_{0'} = L / \pi \quad (10)$$

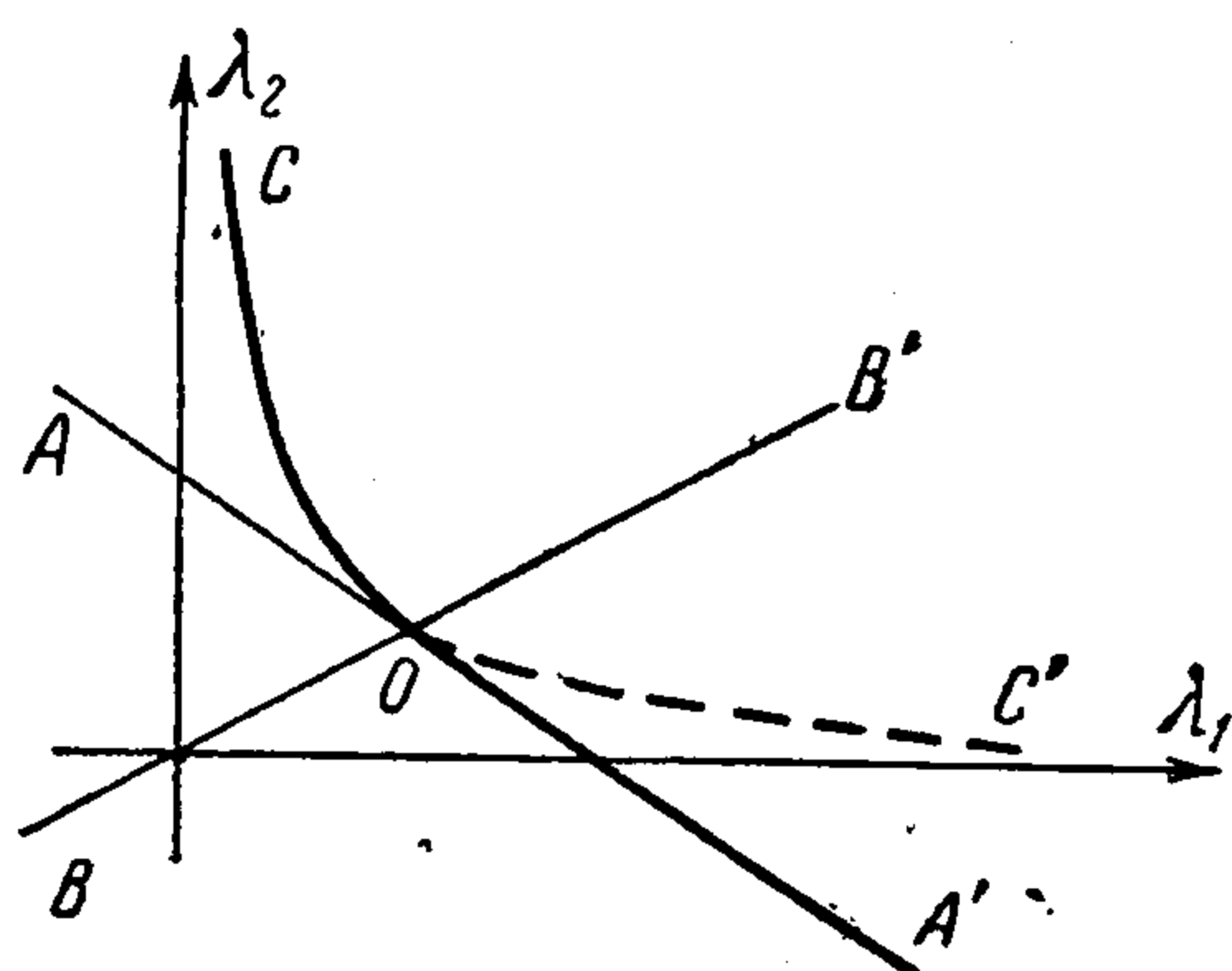


Фиг. 7

где  $L$  — соответствующая константа типа модуля сцепления для трещин продольного сдвига. Если исходить из условия постоянства плотности поверхностной энергии, то в силу (1.7)

$$L = K \sqrt{1-\nu} \quad (3.11)$$

Разберем в качестве иллюстративного примера построение поверхностей локального разрушения, потери устойчивости и полного разрушения для бесконечной пластинки с одной изолированной трещиной, растягиваемой на бесконечности однородным напряжением  $\lambda_1 p$ , перпендикулярным линии трещины, и сосредоточенными силами  $\lambda_2 P$ , приложенными в противоположных точках поверхности трещины на ее середине. Длина трещины в ненагруженной пластинке составляет  $2l_0$ .



Фиг. 8

Простой анализ, основанный на использовании метода Н. И. Muskhelishvili, дает

$$N_0 = \frac{\lambda_1 p \sqrt{l}}{\sqrt{2}} + \frac{\lambda_2 P}{\sqrt{2} \pi \sqrt{l}} \quad (3.12)$$

В силу условия (1.8) поверхность (в данном случае, естественно, линия) локального разрушения представляется в виде (линия  $AA'$  на фиг. 8)

$$\frac{\lambda_1 p \sqrt{l_0}}{\sqrt{2}} + \frac{\lambda_2 P}{\sqrt{2} \pi \sqrt{l_0}} = \frac{K}{\pi} \quad (3.13)$$

После достижения на концах трещины предельного состояния полу-длина трещины  $l$  определяется соотношением

$$\frac{\lambda_1 p \sqrt{l}}{\sqrt{2}} + \frac{\lambda_2 P}{\sqrt{2} \pi \sqrt{l}} = \frac{K}{\pi} \quad (3.14)$$

Дифференцируя соотношение (3.14) по  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , получим

$$\frac{\partial l}{\partial \lambda_1} \left( \lambda_1 p - \frac{\lambda_2 P}{\pi l} \right) + 2pl = 0, \quad \frac{\partial l}{\partial \lambda_2} \left( \lambda_1 p - \frac{\lambda_2 P}{\pi l} \right) + \frac{2P}{\pi} = 0 \quad (3.15)$$

так что при

$$\lambda_1 p - \frac{\lambda_2 P}{\pi l} < 0 \quad (3.16)$$

производные  $\partial l / \partial \lambda_1$  и  $\partial l / \partial \lambda_2$  одновременно положительны. Поскольку всегда  $l \geq l_0$ , во всех точках линии локального разрушения, лежащих ниже точки  $O$  ее пересечения с прямой

$$\lambda_1 p - \frac{\lambda_2 P}{\pi l_0} = 0 \quad (3.17)$$

(прямая  $BB'$  на фиг. 8) трещина, достигая подвижно-равновесного состояния, сразу же становится неустойчивой. Координаты упомянутой точки пересечения  $O$  следующие:

$$\lambda_1 = \frac{K}{p \pi \sqrt{2l_0}}, \quad \lambda_2 = \frac{K \sqrt{l_0}}{P \sqrt{2}} \quad (3.18)$$

Как нетрудно видеть, линия

$$\lambda_1 p - \frac{\lambda_2 P}{\pi l} = 0 \quad (3.19)$$

где  $l$  определяется уравнением (3.14), представляет собой гиперболу

$$\lambda_1 \lambda_2 = K^2 / 2\pi p P \quad (3.20)$$

проходящую через точку  $O$  (линия  $CC'$  на фиг. 8), так что линия потери устойчивости ниже точки  $O$  совпадает с линией локального разрушения (3.13), а выше точки (3.18) совпадает с гиперболой (3.20). Далее, разрешая уравнение (3.14) относительно  $\sqrt{l}$ , находим

$$\sqrt{l} = \frac{\sqrt{2}}{\lambda_1 p} \left\{ \frac{K}{2\pi} \pm \left( \frac{Pp}{2\pi} \left[ \frac{K^2}{4\pi^2} - \frac{\lambda_1 \lambda_2 Pp}{2\pi} \right] \right)^{1/2} \right\} \quad (3.21)$$

так что выше гиперболы (3.20) решение (3.21) становится комплексным и действительное решение перестает существовать. Отсюда следует, что линия полного разрушения вплоть до точки  $O$  совпадает с гиперболой (3.20). При переходе через линию потери устойчивости, ниже точки  $O$  совпадающую с линией локального разрушения (3.13), производные  $\partial l / \partial \lambda_1$  и  $\partial l / \partial \lambda_2$  становятся отрицательными, поэтому ясно, что значениям  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , лежащим между линией локального разрушения (3.13) и гиперболой (3.20), соответствуют значения  $l < l_0$ , чего не может быть. Стало быть, линия полного разрушения совпадает в данном случае с линией потери устойчивости во всех ее точках.

Отметим теперь, что гипербола (3.20) является огибающей линий локального разрушения (3.13), соответствующих различным значениям параметра  $l_0$  — начального размера трещины. Поэтому, если путь нагружения таков, что трещина, становясь подвижно-равновесной, развивается устойчиво, то характеристика прочности — линия полного разрушения, совпадающая при этом условии с гиперболой (3.20), не зависит от начального размера трещины и в этом смысле является универсальной.

§ 4. Рассмотрим теперь вопрос о подобии при хрупком и квазихрупком разрушении. Эта сторона дела имеет большое значение, потому что ввиду значительной математической трудности задач хрупкого разрушения трудно рассчитывать на то, что удастся построить всевозможные поверхности разрушения аналитическим путем для достаточно сложных конструкций. По-видимому, в большинстве случаев эти и другие характеристики хрупкой прочности необходимо определять, экспериментируя на моделях. Для этой цели изготавливается модель рассматриваемой конструкции, на модели создаются трещины и производится нагружение модели по различным путям. Следя за поведением трещин, получаем, что когда одна из трещин впервые тронулась с места, точка, изображающая действующую нагрузку, лежит на поверхности локального разрушения. Если одна из трещин впервые стала развиваться неустойчиво — изображающая точка лежит на поверхности потери устойчивости. Доводя модель до разрушения по различным путям нагружения, получаем различные точки поверхности полного разрушения. Практически можно ограничиться несколькими вероятными для конструкции наиболее опасными путями нагружения.

Безразмерные параметры нагружения  $\lambda_i$  всегда фигурируют в произведении с размерными множителями, характеризующими приложенную к телу нагрузку. Наиболее часто встречаются случаи, когда эти величины имеют размерность давления, силы, отнесенной к длине (натяжения) и просто силы. Пусть для определенности при  $\lambda_1$  стоит множитель  $p$  размерности давления  $[p] = FL^{-2}$ , при  $\lambda_2$  — множитель  $R$  размерности натяжения  $[R] = FL^{-1}$  и при  $\lambda_3$  — множитель  $P$  размерности силы  $[P] = F$ . Тогда уравнение любой из поверхностей разрушения записывается в виде

$$F(\lambda_1 p, \lambda_2 R, \lambda_3 P, \dots, K, d) = 0 \quad (4.1)$$

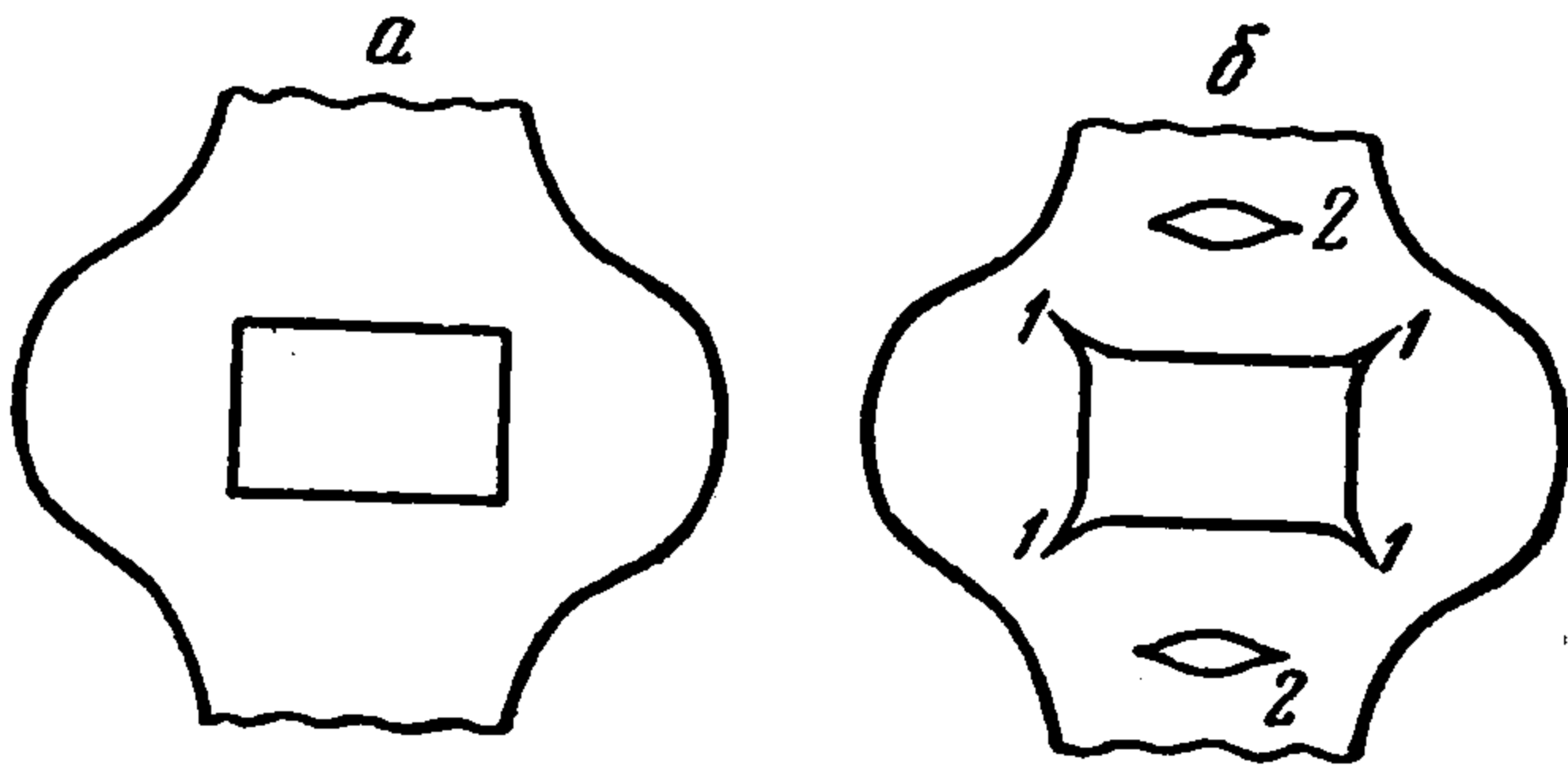
где  $K$  — модуль сцепления тела,  $d$  — характерный размер тела.

Заметим, что среди аргументов в (4.1) могут быть и другие величины, помимо  $K$  и  $d$ , но величины  $K$  и  $d$  будут обязательно. В силу  $\Pi$ -теоремы анализа размерностей [15] соотношение (4.1) можно записать в виде

$$\Theta (\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \dots, \Pi_i, \Pi_j, \Pi_k \dots) = 0 \quad (4.2)$$

$$\Pi_1 = \frac{\lambda_1 d^{1/2} p}{K}, \quad \Pi_2 = \frac{\lambda_2 R}{K d^{1/2}}, \quad \Pi_3 = \frac{\lambda_3 P}{K d^{3/2}}, \dots, \quad \Pi_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_1}, \quad \Pi_j = \frac{\lambda_j}{\lambda_2}, \quad \Pi_k = \frac{\lambda_k}{\lambda_3}$$

где  $\lambda_i, \lambda_j, \lambda_k$  — соответственно, другие параметры, при которых стоят множители размерности давления, натяжения и силы (всегда можно сделать так, чтобы эти размерные множители равнялись, соответственно,  $p, R$  и  $P$ ). Рассмотрим теперь два тела, хрупкую прочность которых мы определяем, и укажем условия подобия. Одно из тел назовем условно натурой, другое — моделью, соответствующие величины будем обозначать индексами  $n$  и  $m$ . Прежде всего, вообще говоря, должно быть выполнено условие геометрического подобия формы обо-



Фиг. 9

их тел и начальных трещин. Далее, должны выполняться условия равенства безразмерных параметров подобия для модели и природы  $(\Pi_a)_m = (\Pi_a)_n$ .

Эти соотношения дают возможность пересчитывать результаты определения прочностных характеристик тел в условиях хрупкого и квазихрупкого разрушения с модели на натуру.

Таким образом, целесообразный порядок расчета конструкции на хрупкое разрушение представляется следующим. На основе анализа геометрической формы конструкции и технологии ее изготовления выбирается определенная схематизация данной конструкции с характерными для избранного технологического режима ее изготовления дефектами. Еще раз подчеркнем, что при такой схематизации принимается во внимание не идеальная форма конструкции, изображаемая на чертеже (фиг. 9, а), но и поверхностные трещины 1, возникающие при механической обработке, а также внутренние трещины 2, возникающие при сварке, отливке и т. п. (фиг. 9, б). Далее, теоретически или экспериментально на моделях определяются поверхности разрушения для выбранной схематизации, или, по крайней мере одна или несколько необходимых точек поверхности разрушения. После этого, если задана максимальная нагрузка, воспринимаемая конструкцией, то предъявляются такие контрольные требования к размерам дефектов изделий, чтобы заданная нагрузка лежала внутри поверхности полного разрушения или, с некоторым запасом, внутри поверхности потери устойчивости. Если, наоборот, задана определенная конструкция и технология ее изготовления, то определяется предельная нагрузка, обеспечивающая неразрушение конструкции или, с некоторым запасом, устойчивость трещин.

Приведенные выше соображения, по-видимому, вполне выясняют положение дел в рассмотренном чисто статическом аспекте математической теории хрупкого разрушения. Задачи статической теории приводятся к четко формулируемым математическим постановкам и вполне ясным экспериментальным схемам. По-видимому, одной из важных задач математической теории хрупкого разрушения должно стать развитие методов получения верхних и нижних оценок для характеристик хрупкой прочности. Гораздо сложнее обстоит дело с кинетикой разрушения и распространением трещин. Дело в том, что во многих задачах кинетики разрушения, помимо сильного усложнения математической стороны вопроса, существенно проявляется пластическая область, окружающая трещины. Несмотря на то что область тонкая, процессы в ней уже нельзя так просто схематизировать при помощи конечных соотношений, определяющих предельные условия, как это делалось в статической теории. По-

ведение пластического слоя, окружающего трещины, описывается, в свою очередь, дифференциальными уравнениями, которые должны сопрягаться с дифференциальными уравнениями упругого деформирования вне пластической зоны. Трудность этих задач обуславливается недостаточной разработанностью теории пластичности в условиях сложного напряженного состояния (а именно таким является напряженное состояние в области вблизи головки трещины). Некоторые надежды внушает тонкость пластической области, позволяющая в принципе использовать методы пограничного слоя.

Важным представляется учет влияния вязкости и вообще временных эффектов как в основной массе материала, так и особенно в приповерхностной зоне трещин. В исследовании этого влияния в значительной мере упирается решение проблемы так называемой длительной прочности. Имеющиеся здесь трудности вполне аналогичны тем трудностям, которые возникают при изучении кинетики разрушения; очень перспективные исследования этого вопроса были начаты Л. М. Качановым [16,17].

В заключение автор с особой благодарностью отмечает ценные советы С. С. Григоряна, немало способствовавшие выяснению разобранных здесь вопросов. Автор приносит также свою благодарность Б. М. Малышеву, Р. Л. Салганику и В. А. Городцову за полезное обсуждение статьи.

Поступила 19 IV 1964

Институт механики  
Московского университета

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Griffith A. A. The phenomenon of rupture and flow in solids. Philos. Trans. Roy. Soc., 1920, A221, pp. 163—198.
2. Griffith A. A. The theory of rupture. Proc. 1-st International Congr. Appl. Mech. Delft, 1924, pp. 55—63.
3. Irwin G. R. Fracture dynamics, in «Fracturing of Metals». ASM, Cleveland, 1948, pp. 147—166.
4. Orowan E. O. Fundamentals of brittle behavior of metals, in «Fatigue Fracture of Metals». Wiley, N.—Y., 1950, pp. 139—167.
5. Работнов Ю. Н. Механика твердого тела и пути ее развития. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1962, № 2.
6. Дроздовский Б. А. и Фридман Я. Б. Влияние трещин на механические свойства конструкционных сталей. Metallurgizdat, М., 1960.
7. Баренблатт Г. И. и Черепанов Г. П. О конечности напряжений на краю произвольной трещины. ПММ, 1961, т. 25, вып. 4.
8. Баренблатт Г. И., Математическая теория равновесных трещин, образующихся при хрупком разрушении. ПМТФ, 1961, № 4.
9. Желтов Ю. П. и Христианович С. А. О механизме гидравлического разрыва нефтеносного пласта. Изв. АН СССР, ОТН, 1955, № 5.
10. Баренблатт Г. И. Об условиях конечности в механике сплошных сред. Статические задачи теории упругости. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 2.
11. Баренблатт Г. И. О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении. ПММ, 1959, т. 23, вып. 3—5.
12. Баренблатт Г. И. и Черепанов Г. П. О хрупких трещинах продольного сдвига. ПММ, 1961, т. 25, вып. 6.
13. Черепанов Г. П. Одна задача о вдавливании индентора с образованием трещин. ПММ, 1963, т. 27, вып. 1.
14. Панасюк В. В. и Бережницкий Л. Т. О распространении криволинейных (дугообразных) трещин при растяжении пластин. Прикладная механика, 1964, № 6.
15. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике, изд. 4-е. Гостехиздат, М., 1957.
16. Качанов Л. М., К кинетике роста трещин. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 3.
17. Качанов Л. М. К вопросу о кинетике роста трещин. Сб. «Исследования по упругости и пластичности», № 2, Изд. Ленингр. ун-та, 1963.