

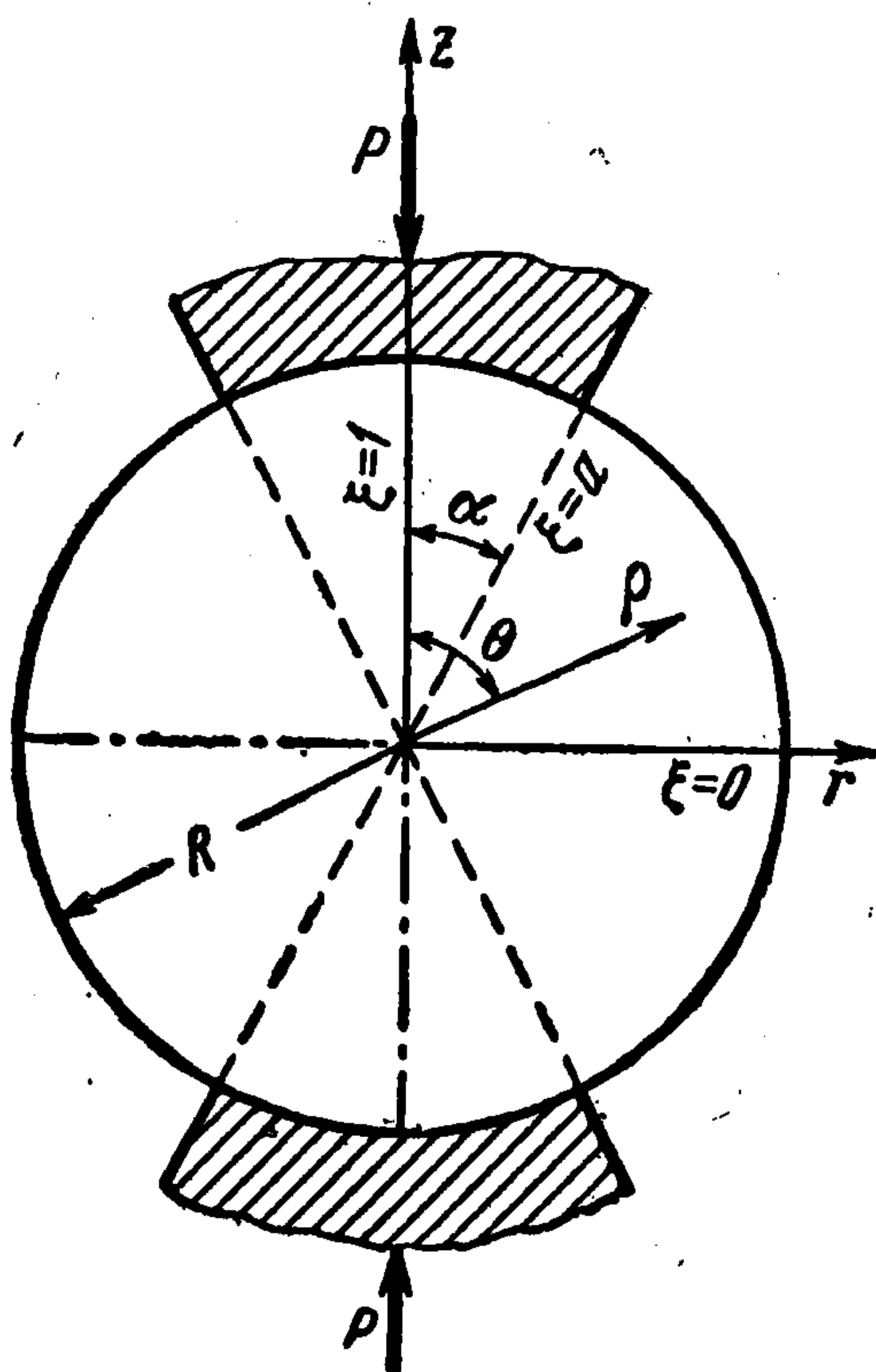
О ДВУХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ УПРУГОЙ СФЕРЫ

Б. Л. Абрамян, Н. Х. Арутюнян, А. А. Баблоян

(Ереван)

В работе приводится решение двух контактных задач для упругой сферы. Эти задачи, по-видимому, рассматриваются впервые.

§ 1. Вдавливание двух жестких штампов в упругую сферу. Рассмотрим задачу о вдавливании двух жестких симметрично расположенных штампов в упругую сферу (фиг. 1). Предполагаем, что поверхность сферы вне штампов свободна от напряжений и под штампами касательные напряжения отсутствуют.



Фиг. 1

В силу симметрии достаточно рассматривать деформацию только четвертой части сферы.

Граничные условия для данной задачи в сферических координатах будут выражены соотношениями

$$\begin{aligned} u_\rho |_{\rho=R} &= g^*(\theta) & (0 \leq \theta < \alpha) \\ \tau_{\rho\theta} |_{\rho=R} &= 0 & (0 \leq \theta \leq 1/2\pi) \\ \sigma_\rho |_{\rho=R} &= 0 & (\alpha < \theta \leq 1/2\pi) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Из условий симметрии относительно оси z и плоскости $\theta = 1/2\pi$ ($z = 0$) имеем

$$\begin{aligned} u_\theta |_{\theta=0} &= \tau_{\rho\theta} |_{\theta=0} = 0 \\ u_\theta |_{\theta=1/2\pi} &= \tau_{\rho\theta} |_{\theta=1/2\pi} = 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь u_ρ и u_θ — радиальный и меридиональный компоненты перемещения, а $\tau_{\rho\theta}$ и σ_ρ — соответственно касательное и нормальное напряжения, $g^*(\theta)$ — гладкая функция, определяющая формы поверхностей штампов, а α — параметр, определяющий размеры штампов.

Уравнения равновесия в сферических координатах при условии осевой симметрии имеют вид

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \sin \theta \frac{\partial \Delta}{\partial \theta} + \mu \frac{\partial}{\partial \rho} (2\rho\omega_\varphi \sin \theta) &= 0 \\ (\lambda + 2\mu) \sin \theta \frac{\partial \Delta}{\partial \rho} - \mu \frac{\partial}{\partial \theta} (2\rho\omega_\varphi \sin \theta) &= 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

где

$$\Delta = \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 u_\rho \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho u_\theta \sin \theta) \right], \quad \omega_\varphi = \frac{1}{2\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho u_\theta) - \frac{\partial u_\rho}{\partial \theta} \right] \quad (1.4)$$

(λ и μ — коэффициенты Ламе)

Перейдя от координаты θ к координате $\xi = \cos \theta$, будем искать решение уравнений (1.3) в форме рядов

$$u_\rho = f(\rho) + \sum_{k=2,4,\dots}^{\infty} f_k(\rho) P_k(\xi), \quad u_\theta = \sqrt{1-\xi^2} \sum_{k=2,4,\dots}^{\infty} \varphi_k(\rho) P_k'(\xi) \quad (1.5)$$

Здесь $P_k(\xi)$ — полиномы Лежандра [16], $f_0(\rho)$, $f_k(\rho)$ и $\varphi_k(\rho)$ — неизвестные функции, подлежащие определению, штрих означает дифференцирование по ξ .

Подставляя выражения (1.5) и (1.4) в уравнения равновесия (1.3), для определения функций $f_0(\rho)$, $f_k(\rho)$ и $\varphi_k(\rho)$ получим дифференциальные уравнения типа Эйлера, решения которых берем в форме

$$f_0(\rho) = A_0 \frac{\rho^1}{R^1}$$

$$f_k(\rho) = -kA_k \left(\frac{\rho}{R}\right)^{k-1} - \frac{\lambda k + \mu(k-2)}{\lambda(k+3) + \mu(k+5)} (k+1) C_k \left(\frac{\rho}{R}\right)^{k+1} \quad (1.6)$$

$$\varphi_k(\rho) = A_k \left(\frac{\rho}{R}\right)^{k-1} + C_k \left(\frac{\rho}{R}\right)^{k+1} \quad (k=2, 4, \dots)$$

Здесь постоянные интегрирования A_0 , A_k и C_k подлежат определению из граничных условий.

В координатной системе ρ , ξ , φ граничные условия (1.1) и условия симметрии (1.2) примут вид

$$u_\rho|_{\rho=R} = g(\xi) = g^*(\theta) \quad (\cos \alpha = a < \xi \leq 1)$$

$$\tau_{\rho\theta}|_{\rho=R} = 0 \quad (0 \leq \xi \leq 1), \quad \sigma_\rho|_{\rho=R} = 0 \quad (0 \leq \xi < a) \quad (1.7)$$

$$u_\theta|_{\xi=1} = \tau_{\rho\theta}|_{\xi=1} = 0, \quad u_\theta|_{\xi=0} = \tau_{\rho\theta}|_{\xi=0} = 0 \quad (0 \leq \rho \leq R) \quad (1.8)$$

Пользуясь обычными формулами для напряжений

$$\sigma_\rho = \frac{\lambda}{\rho^2} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 u_\rho) - \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho u_\theta \sin \theta) \right] + 2\mu \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho}, \quad \tau_{\rho\theta} = \mu \left[\frac{\partial u_\theta}{\partial \rho} - \frac{\sin \theta}{\rho} \frac{\partial u_\rho}{\partial \xi} - \frac{u_\theta}{\rho} \right]$$

а также соотношениями (1.5), (1.6) и учитывая, что $P_{2m}'(0) = 0$, нетрудно показать, что условия (1.8) удовлетворяются тождественно.

Удовлетворяя далее второму из условий (1.7), находим

$$C_k = - \frac{(k-1)[\lambda(k+3) + \mu(k+5)]}{\lambda k(k+2) + \mu_1(k^2 + 2k - 1)} A_k \quad (k=2, 4, \dots) \quad (1.10)$$

а для определения коэффициентов A_0 и A_k ($k=2, 4, \dots$) из остальных условий (1.7) получим следующие ряды-уравнения:

$$\sum_{k=0,2,\dots}^{\infty} B_k \left[1 + O_1 \left(\frac{1}{k} \right) \right] P_k(\xi) = g(\xi) \quad (a < \xi \leq 1)$$

$$\sum_{k=0,2,\dots}^{\infty} B_k \left(k + \frac{1}{2} \right) P_k(\xi) = 0 \quad (0 \leq \xi < a) \quad (1.11)$$

Здесь (1.12)

$$A_0 = \frac{\mu(\lambda + \mu) B_0}{(3\lambda + 2\mu)(\lambda + 2\mu)}, \quad A_k = -\frac{(2k+1)(\lambda + \mu)[\lambda k(k+2) + \mu(k^2 + 2k - 1)] B_k}{2(k-1)(\lambda + 2\mu)[\lambda(2k^2 + 4k + 3) + 2\mu(k^2 + k + 1)]}$$

$$O_1\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{4\mu^2 k^2 - (\lambda - \mu)(3\lambda + 2\mu)k + 2(3\lambda^2 + 7\lambda\mu + 3\mu^2)}{2(\lambda + 2\mu)(k-1)[\lambda(2k^2 + 4k + 3) + 2\mu(k^2 + k + 1)]} \quad (1.13)$$

Таким образом, решение поставленной задачи свелось к определению коэффициентов B_k ($k = 0, 2, \dots$) из «парных» рядов (1.11), содержащих полиномы Лежандра. После определения B_k все постоянные интегрирования определяются соотношениями (1.10) и (1.12).

§ 2. Исследование «парных» рядов (1.11). Предварительно отметим, что если в задаче, рассмотренной в § 1, на поверхности упругой сферы вне штампов действует нормальная нагрузка или если сфера находится в осесимметричном стационарном температурном поле, тогда при решении этих задач вместо системы (1.11) получим «парные» ряды-уравнения более общего вида

$$\sum_{n=0, 2, \dots}^{\infty} B_n \left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right] P_n(\xi) = g(\xi) \quad (a < \xi \leq 1)$$

$$\sum_{n=0, 2, \dots}^{\infty} B_n \left(n + \frac{1}{2}\right) P_n(\xi) = f(\xi) \quad (0 \leq \xi < a) \quad (2.1)$$

Здесь B_n — неизвестные коэффициенты, числа $O(n^{-1})$ при $n \rightarrow \infty$ стремятся к нулю как n^{-1} ; непрерывная функция $g(\xi)$ имеет кусочно-непрерывную производную; функция $f(\xi)$ — кусочно-непрерывная. Поэтому вместо системы (1.11) рассмотрим более общую систему (2.1).

Предварительно рассмотрим систему

$$\sum_{n=0}^{\infty} X_n \left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right] P_n(\xi) = g(\xi) \quad (0 < a < \xi \leq 1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} X_n \left(n + \frac{1}{2}\right) P_n(\xi) = f_1(\xi) \quad (-1 \leq \xi < a) \quad (2.2)$$

Подобная система в частном случае была рассмотрена И. М. Минковым [1]; общее решение такой системы при $O(n^{-1}) = 0$ дано в работе А. А. Баблюна [2].

Займемся исследованием «парных» рядов (2.2). Для этого обозначим значение второго ряда (2.2) в области $a < \xi \leq 1$ через

$$V(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n \left(n + \frac{1}{2}\right) P_n(\xi) \quad (a < \xi \leq 1) \quad (2.3)$$

Тогда из второго уравнения системы (2.2) и (2.3) для определения коэффициентов X_n получим

$$X_n = \int_{-1}^a f_1(\xi) P_n(\xi) d\xi + \int_a^1 V(\xi) P_n(\xi) d\xi \quad (2.4)$$

При помощи известной формулы

$$\cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \arccos \gamma \right] = - \frac{\sqrt{1-\gamma^2}}{\sqrt{2}} \frac{d}{d\gamma} \int_{\gamma}^1 \frac{P_n(\xi) d\xi}{(\xi-\gamma)^{1/2}} \quad (2.5)$$

преобразуем первое уравнение системы (2.2) к виду

$$\sum_{n=0}^{\infty} X_n \left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right] \cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \arccos \gamma \right] = - \frac{\sqrt{1-\gamma^2}}{\sqrt{2}} \frac{d}{d\gamma} \int_{\gamma}^1 \frac{g(\xi) d\xi}{(\xi-\gamma)^{1/2}} \quad (2.6)$$

$(a < \gamma \leq 1)$

Подставляя выражение для X_n из (2.4) в (2.6), находим

$$\int_a^{\gamma} \frac{V(\xi) d\xi}{(\gamma-\xi)^{1/2}} = - \int_a^1 V(\xi) S(\xi, \gamma) d\xi - \sqrt{1-\gamma^2} \frac{d}{d\gamma} \int_{\gamma}^1 \frac{g(\xi) d\xi}{(\xi-\gamma)^{1/2}} -$$

$$- \int_{-1}^a f_1(\xi) [(\gamma-\xi)^{-1/2} + S(\xi, \gamma)] d\xi \quad (a < \gamma \leq 1) \quad (2.7)$$

Здесь

$$S(\xi, \gamma) = \sqrt{2} \sum_{n=0}^{\infty} O\left(\frac{1}{n}\right) P_n(\xi) \cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \arccos \gamma \right] \quad (2.8)$$

При выводе соотношения (2.7) использовано также значение ряда [3]

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\xi) \cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \arccos \gamma \right] = \begin{cases} [2(\gamma-\xi)]^{-1/2} & (\gamma > \xi) \\ 0 & (\gamma < \xi) \end{cases} \quad (2.9)$$

Пользуясь формулой обращения интегрального уравнения типа Абеля, для определения функции $V(\xi)$ из (2.7) получим следующее интегральное уравнение Фредгольма второго рода:

$$V(z) = - \frac{1}{\pi} \frac{d}{dz} \int_a^z \frac{d\gamma}{(z-\gamma)^{1/2}} \left\{ \int_a^1 V(\xi) S(\xi, \gamma) d\xi + \sqrt{1-\gamma^2} \frac{d}{d\gamma} \int_{\gamma}^1 \frac{g(\xi) d\xi}{(\xi-\gamma)^{1/2}} + \right.$$

$$\left. + \int_{-1}^a f_1(\xi) [(\gamma-\xi)^{-1/2} + S(\xi, \gamma)] d\xi \right\} \quad (a < z \leq 1) \quad (2.10)$$

Примем далее, что

$$f_1(\xi) = \begin{cases} V(\xi) & (-1 \leq \xi < -a) \\ f(\xi) & (-a < \xi < a) \end{cases} \quad (2.11)$$

и рассмотрим случай, когда функции $V(\xi)$ и $f(\xi)$ четные. В этом случае формулу (2.4) и интегральное уравнение (2.10) можно представить в виде

$$X_n = [1 + (-1)^n] \left\{ \int_0^a f(\xi) P_n(\xi) d\xi + \int_a^1 V(\xi) P_n(\xi) d\xi \right\} \quad (2.12)$$

$$V(z) = - \frac{1}{\pi} \frac{d}{dz} \int_a^z \frac{d\gamma}{(z-\gamma)^{1/2}} \left\{ \int_a^1 [(\gamma+\xi)^{-1/2} + S_1(\xi, \gamma)] V(\xi) d\xi + \right.$$

$$\left. + \int_0^a f(\xi) [(\gamma-\xi)^{-1/2} + (\gamma+\xi)^{-1/2} + S_1(\xi, \gamma)] d\xi + \sqrt{1-\gamma^2} \frac{d}{d\gamma} \int_{\gamma}^1 \frac{g(\xi) d\xi}{(\xi-\gamma)^{1/2}} \right\} \quad (2.13)$$

где

$$S_1(\xi, \gamma) = S(\xi, \gamma) + S(-\xi, \gamma) \quad (2.14)$$

Отсюда видно, что решение (2.12) системы (2.2) совпадает с решением системы (2.1), т. е.

$$X_{2k} = B_{2k}, \quad X_{2k+1} = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.15)$$

а функция $V(z)$, которая определяется из интегрального уравнения (2.13), будет значением второго ряда системы (2.1) в области $a < z < 1$, т. е. значением нормального напряжения под штампами.

Для задачи, рассмотренной в § 1, в формулах (2.12) и (2.13), положим $f(\xi) = 0$; тогда для коэффициентов B_k «парных» рядов (1.11) получим следующие выражения

$$B_k = 2 \int_a^1 V(\xi) P_n(\xi) d\xi \quad (2.16)$$

где функция $V(\xi)$ определяется из интегрального уравнения

$$V(z) = \int_a^1 K(\xi, z) V(\xi) d\xi + F(z) \quad (2.17)$$

Здесь $K(\xi, z)$ и $F(z)$ даются соотношениями

$$K(\xi, z) = -\frac{1}{\pi} \frac{d}{dz} \int_a^z (z - \gamma)^{-1/2} [(\gamma + \xi)^{-1/2} + S_1(\xi, \gamma)] d\gamma \quad (2.18)$$

$$F(z) = -\frac{1}{\pi} \frac{d}{dz} \int_a^z \left(\frac{1 - \gamma^2}{z - \gamma}\right)^{1/2} d\gamma \frac{d}{d\gamma} \int_\gamma^1 \frac{g(\xi) d\xi}{(\xi - \gamma)^{1/2}} \quad (2.19)$$

$$S_1(\xi, \gamma) = 2\sqrt{2} \sum_{n=0, 2, \dots}^{\infty} O_1\left(\frac{1}{n}\right) P_n(\xi) \cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right) \arccos \gamma\right] \quad (2.20)$$

Легко показать, что в квадрате $0 < a < \xi, z < 1$ ядро $K(\xi, z)$ интегрируемо и уравнение (2.17) имеет единственное решение.

Следует отметить, что если в (2.10) и (2.11) принять обе функции $V(\xi)$ и $f(\xi)$ нечетными (это может иметь место при решении других задач о равновесии сферы: так, например, для задачи о кручении экваториальной крутящей нагрузкой упругого шара, зажатого двумя жесткими штампами), то формула (2.4) и интегральное уравнение (2.10) сводятся уже к виду

$$X_n = [1 - (-1)^n] \left(\int_0^a f(\xi) P_n(\xi) d\xi + \int_a^1 V(\xi) P_n(\xi) d\xi \right) \quad (2.21)$$

$$V(z) = -\frac{1}{\pi} \frac{d}{dz} \int_a^z \frac{d\gamma}{(z - \gamma)^{1/2}} \left(\int_a^1 [S_2(\xi, \gamma) - (\gamma + \xi)^{-1/2}] V(\xi) d\xi + \right. \quad (2.22)$$

$$\left. + \int_0^a f(\xi) [(\gamma - \xi)^{-1/2} - (\gamma + \xi)^{-1/2} + S_2(\xi, \gamma)] d\xi + \sqrt{1 - \gamma^2} \frac{d}{d\gamma} \int_\gamma^1 \frac{g(\xi) d\xi}{(\xi - \gamma)^{1/2}} \right)$$

где

$$S_2(\xi, \gamma) = S(\xi, \gamma) - S(-\xi, \gamma) \quad (2.23)$$

В этом случае решение системы (2.2) совпадает с решением следующих «парных» рядов-уравнений

$$\sum_{n=1, 3, \dots}^{\infty} A_n \left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right] P_n(\xi) = g(\xi) \quad (a < \xi \leq 1) \quad (2.24)$$

$$\sum_{n=1, 3, \dots}^{\infty} A_n \left(n + \frac{1}{2} \right) P_n(\xi) = f(\xi) \quad (0 \leq \xi < a)$$

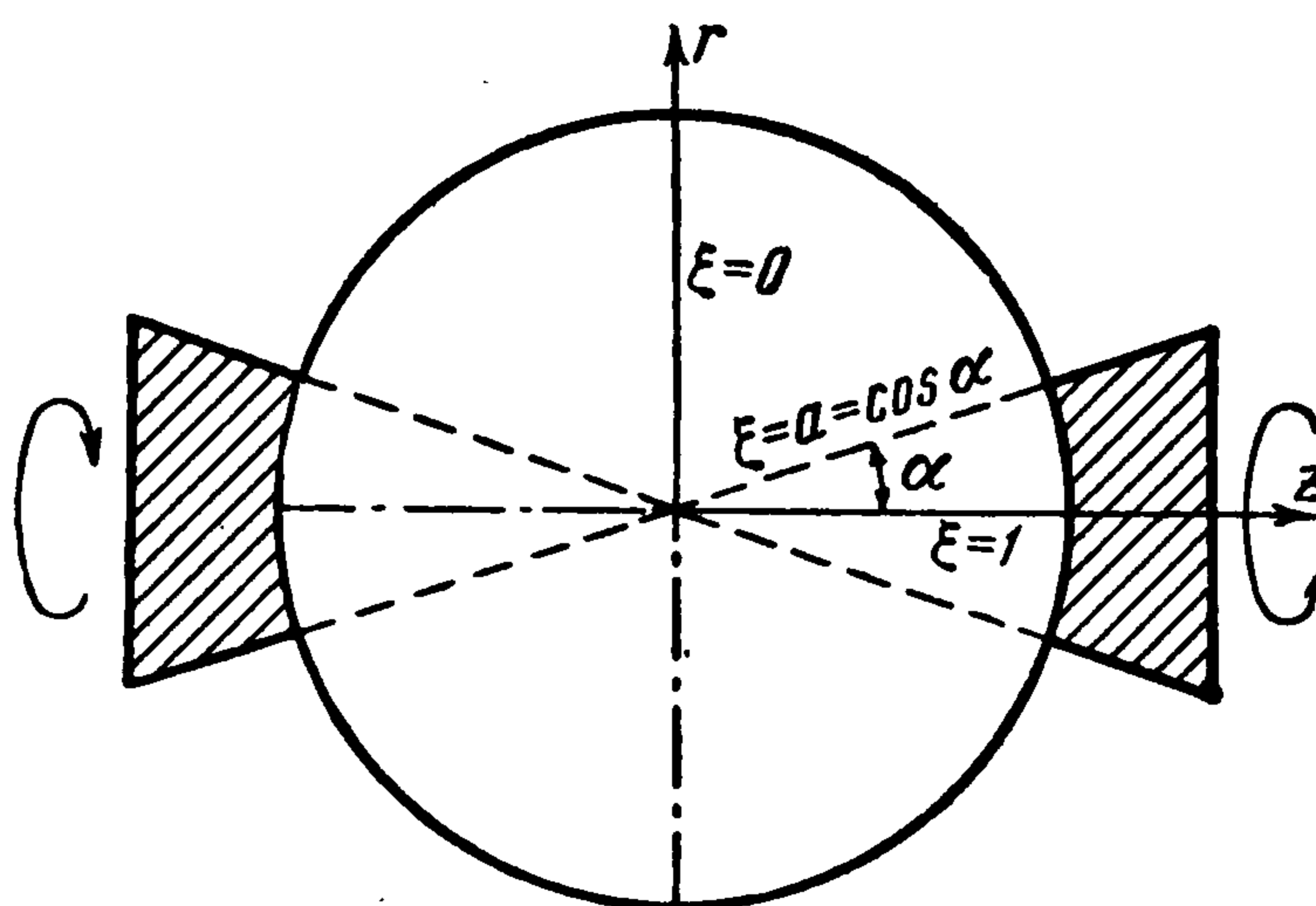
т. е.

$$X_{2k+1} = A_{2k+1}, \quad X_{2k} = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.25)$$

а функция $V(z)$, входящая в интегральное уравнение (2.22), будет уже значением второго ряда системы (2.24) в области $a < z < 1$.

Точно таким же методом решения «парных» рядов-уравнений (2.1) и (2.24) можно свести к определению функции $W(z)$ из интегральных уравнений типа (2.13) и (2.22), где $W(z)$ — значение первых рядов систем (2.1) и (2.24) в области $0 < z < a$.

В заключение этого параграфа отметим, что при исследовании напряженного состояния упругой сферы при вдавливании в нее двух жестких одинаковых штампов мы отдельно рассмотрели случаи симметричного и кососимметричного нагружения упругой сферы. Это, во-первых, сделало более обозримым полученные формулы и «парные» ряды-уравнения, и, во-вторых, каждое из этих нагружений имеет самостоятельное значение, так как соответствует определенной характерной деформации упругой сферы. Следует отметить, что случай произвольного нагружения упругой сферы при одинаковых жестких штампах, расположенных симметрично, может быть получен из (2.12) и (2.21) путем наложения указанных выше двух случаев.



Фиг. 2

§ 3. Кручение упругой сферы под действием двух штампов, жестко связанных со сферой. Аналогичным образом может быть решена задача о кручении сплошной упругой сферы, когда она скручивается двумя одинаковыми жесткими штампами, связанными со сферой.

Остальную часть поверхности сферы, для простоты, считаем свободной от внешних нагрузок (фиг. 2).

В сферической системе координат (t, ξ, φ) эта задача сводится к интегрированию уравнения [4, 5]

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} + (1 - \xi^2) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} + 3 \frac{\partial \Psi}{\partial t} - 4\xi \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} = 0 \quad (3.1)$$

где $\Psi(t, \xi)$ — функция перемещения.

При этом напряжения $\tau_{\xi\varphi}$ и $\tau_{t\varphi}$ и перемещение v выразятся через функцию $\Psi(t, \xi)$ формулами

$$\tau_{\xi\varphi} = G(1 - \xi^2) \frac{\partial \Psi}{\partial \xi}, \quad \tau_{t\varphi} = G\sqrt{1 - \xi^2} \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \quad v = \text{Re}^t \sqrt{1 - \xi^2} \Psi(t, \xi) \quad (3.2)$$

Граничные условия и условие симметрии для рассматриваемой задачи будут иметь вид

$$\begin{aligned} \tau_{t\varphi}(0, \xi) &= 0 & (0 \leq \xi < a) \\ v(0, \xi) &= R\beta \sqrt{1 - \xi^2} & (a < \xi \leq 1) \\ v(t, 0) &= 0 & (-\infty < t \leq 0) \end{aligned} \quad (3.3)$$

где β — угол поворота штампов, а $R\sqrt{1 - \xi^2} = r$ — расстояние точек поверхности сферы от оси z . Ищем функцию $\Psi(t, \xi)$ в виде ряда

$$\Psi(t, \xi) = \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} Y_n e^{(n-1)t} P_n'(\xi) \quad (3.4)$$

Легко видеть, что последнее условие (3.3) удовлетворяется тождественно. Удовлетворяя остальным условиям (3.3), для определения неизвестных коэффициентов Y_n , входящих в (3.4), получим следующие «парные» ряды:

$$\begin{aligned} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} X_n \left(1 + \frac{1.5}{n-1}\right) P_n'(\xi) &= \beta & (a < \xi \leq 1) \\ \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} X_n \left(n + \frac{1}{2}\right) P_n'(\xi) &= 0 & (0 \leq \xi < a) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Здесь введено обозначение

$$(n-1) Y_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) X_n \quad (3.6)$$

Предварительно рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \sum_{n=0,2,\dots}^{\infty} X_n \left(1 + \frac{1.5}{n-1}\right) P_n(\xi) &= \beta\xi + c_0 & (a < \xi \leq 1) \\ \sum_{n=0,2,\dots}^{\infty} X_n \left(n + \frac{1}{2}\right) P_n(\xi) &= c & (0 \leq \xi < a) \end{aligned} \quad (3.7)$$

где c_0 и c — пока неизвестные постоянные.

Из (3.5) и (3.7) видно, что одну из постоянных величин c_0 или c можно выбрать произвольно (например $c = 0$), а другая постоянная определяется следующим образом: решение системы (3.7) (как и системы (2.1)) сводится к определению функции $V(z)$ из интегрального уравнения (2.13). Если решение этого уравнения искать в виде ряда по степеням $(z - a)$, то легко показать, что этот ряд должен иметь вид

$$V(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^{\frac{n-1}{2}} \quad (3.8)$$

Так как функция $V'(z)$ представляет собой касательное напряжение $\tau_{t\varphi}(0, z)$ в области $a < z \leq 1$ (под штампом), то она в этой области должна быть суммируемой, т. е.

$$\int_a^1 V'(z) dz = V(1) - V(a) < \infty \quad (3.9)$$

Это соотношение имеет место только в случае, если

$$a_0 = 0 \quad (3.10)$$

Значение постоянной c_0 определяем из условия (3.10).

Отметим, что системы (3.5) и (3.7) будут эквивалентны только при условии (3.10).

Таким образом, в силу (2.1), (2.12) — (2.14) и (3.7) рассмотренная выше задача о кручении упругой сферы двумя жесткими штампами сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$V(z) = \int_a^1 K(\xi, z) V(\xi) d\xi + F_1(z) \quad (3.11)$$

где

$$K(\xi, z) = -\frac{1}{\pi} \frac{d}{dz} \int_a^z \frac{(\gamma + \xi)^{-1/2} + S_1(\xi, \gamma)}{(z - \gamma)^{1/2}} d\gamma \quad (3.12)$$

$$F_1(z) = \frac{c_0 + \beta(3z - 1 - a)}{\pi} \left(\frac{1+a}{z-a}\right)^{1/2} + \frac{3\beta z + c_0}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \arctg \left(\frac{1+a}{z-a}\right)^{1/2}\right] \quad (3.13)$$

$$S_1(\xi, \gamma) = 3\sqrt{2} \sum_{n=0, 2, \dots}^{\infty} \frac{P_n(\xi)}{n-1} \cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right) \arccos \gamma\right] \quad (3.14)$$

После некоторых преобразований выражение (3.13) можно записать и в следующем виде:

$$S_1(\xi, \gamma) = -3(\gamma \sqrt{\xi + \gamma} + \sqrt{1 - \gamma^2} \sqrt{\xi - \gamma}) - \frac{3\xi}{2} \left[(2\gamma + 1) \sqrt{1 - \gamma} \arccos \frac{\sqrt{1 - \gamma^2} - \sqrt{\xi^2 - \gamma^2}}{1 + \xi} - (2\gamma - 1) \sqrt{1 + \gamma} \ln \frac{\sqrt{1 + \gamma} + \sqrt{\xi + \gamma}}{\sqrt{1 - \gamma} + \sqrt{\xi - \gamma}} \right] \quad \text{при } \gamma < \xi$$

$$S_1(\xi, \gamma) = -3\gamma (\sqrt{\gamma + \xi} + \sqrt{\gamma - \xi}) - \frac{3\xi}{2} \left[(2\gamma + 1) \sqrt{1 - \gamma} \times \arccos \frac{1 - \gamma + \sqrt{\gamma^2 - \xi^2}}{\sqrt{1 - \xi^2}} - (2\gamma - 1) \sqrt{1 + \gamma} \ln \frac{\sqrt{1 + \gamma} + \sqrt{\gamma + \xi}}{\sqrt{1 + \gamma} + \sqrt{\gamma - \xi}} \left(\frac{1 + \xi}{1 - \xi}\right)^{1/2} \right] \quad \text{при } \gamma > \xi \quad (3.15)$$

Поступила 18 IV 1964

Ин-т математики и механики
АН Армянской ССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Минков И. М. О некоторых функциональных уравнениях. ПММ, 1960, т. 24, вып. 5, стр. 964—967.
2. Баблюян А. А. Решение некоторых парных рядов. Докл. АН АрмССР, 1964, т. 39.
3. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, 1962, М., 1043.
4. Абрамян Б. Л. О кручении тела вращения осесимметричной нагрузкой. ПММ, 1960, т. 24, вып. 6, стр. 1047—1056.
5. Абрамян Б. Л., Баблюян А. А. Об одной контактной задаче, связанной с кручением полого полушара. ПММ, 1962, т. 26, вып. 3, стр. 471—480.