Прикладная математика и механика. Том 28, 1964

ВНУТРЕННИЕ НАПРЯЖЕНИЯ В АНИЗОТРОПНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ

И. А. Кунин

(Новосибирск)

В первом разделе работы делается попытка сформулировать математическую модель упругой анизотропной среды с источниками внутренних напряжений, такими, как дислокации, межузельные атомы и вакансии, неоднородные температурные поля и т. п. При этом существенно используются некоторые идеи, высказанные впервые, по-видимому, Кондо [1] и Крёнером [2]. Там же имеются ссылки на другие работы, примыкающие к этому направлению.

Во втором разделе дается явное решение поставленной Крёнером задачи об инвариантном разложении поля двухвалентного тензора на потенциальную и бивихревую составляющие (деформацию и несовместность в терминологии Кренера). Одновременно рассматривается задача о разложении более общего типа, которое можно интерпретировать как разложение тензора напряжений на напряжения, вызванные объемными силами, и на внутренние напряжения; определяется тензор Грина внутренних напряжений для неограниченной анизотропной среды и строится его явное выражение.

1. Геометрия упругого континуума с источниками внутренних напряжений. *Качественные характеристики континуума.* Начнем с понятия «близости». Физически это означает, что две частицы среды, которые были близкими в начальном состоянии, будут таковыми и в любом другом состоянии. Естественно, что этому требованию удовлетворяет упругая деформация среды с кристаллической решеткой и не удовлетворяет перемещение песка. Математическим эквивалентом понятия близости является предположение, что среда, рассматриваемая как множество материальных точек, будет топологическим пространством. При этом два топологических пространства считаются эквивалентными и не различаются, если существует взаимно однозначное и непрерывное преобразование одного пространства в другое. Такое преобразование называется гомеоморфизмом [1]. Можно сказать, что топологическое пространство определено с точностью до гомеоморфизма.

Описание положения материальной среды в пространстве практически невозможно без введения системы координат. Это, а также и другие соображения заставляют потребовать, чтобы по крайней мере в окрестности каждой точки можно было ввести систему координат. При этом в общем случае необоснованно было бы требовать существования одной системы координат для всего пространства, если рассматривать пространства, топологически не эквивалентные эвклидову пространству, например сферу, тор и т. д.

Будем предполагать, что окрестность каждой точки среды гомеоморфна n-мерному эвклидову пространству (или полупространству для среды с краем). Обычно $n=2$ или $n=3$, хотя иногда целесообразно рассматривать случаи $n>3$.

---

[1] Точные определения таких понятий, как топология, гомеоморфизм, многообразие и т. д. и их свойства, можно найти, например, в [3].

Наконец, чтобы в среде рассматривать поля достаточно гладких функций (например, дифференцируемых или аналитических), необходимо потребовать соответствующую гладкость самой среды. Наглядно это можно представлять себе следующим образом: если две кривые (или поверхности) в среде имеют касание определенного порядка в начальном состоянии, то они имеют его и в любом другом состоянии (таким свойствам, конечно, не обладает среда типа глины). Но это возможно только в том случае, если допустимыми преобразованиями являются не произвольные гомеоморфизмы, а лишь достаточно гладкие — диффеоморфизмы. Оказывается, что без существенного ограничения общности последние можно предполагать аналитическими.

Перечисленные выше требования можно кратко сформулировать в одном постулате: материальная среда есть дифференцируемое (аналитическое) многообразие.

Внешнее состояние и внешняя метрика. Будем в дальнейшем для определенности предполагать, что среда гомеоморфна трехмерному эвклидову пространству E_3. Обозначим точки среды через ξ и точки пространства — x. Пусть Φ есть некоторое фиксированное гладкое вложение (диффеоморфизм) среды в E_3

$$\Phi\colon \quad \xi \to x = \Phi(\xi) \tag{1.1}$$

По предположению существует обратный диффеоморфизм

$$\Phi^{-1}\colon \quad x \to \xi = \Phi^{-1}(x) \tag{1.2}$$

Будем говорить, что задание Φ определяет внешнее геометрическое состояние среды. Все характеристики среды, которые зависят только от Φ, будем называть внешними (геометрическими) характеристиками, или функциями внешнего состояния.

Для фактического задания Φ введем лагранжеву систему координат ξ^α, связанную со средой, и эйлерову систему координат x^i. Тогда

$$\Phi\colon \quad x^i = x^i(\xi^\alpha), \qquad \Phi^{-1}\colon \quad \xi^\alpha = \xi^\alpha(x^i) \tag{1.3}$$

Здесь $x^i(\xi^\alpha)$ — достаточно гладкие функции с отличным от нуля якобианом.

Основную внешнюю характеристику среды, внешнюю метрику, определим как расстояние между точками E_3, в которых находятся соответствующие точки среды в состоянии Φ

$$(ds^\Gamma)^2 = g^\Gamma_{\alpha\beta}(\xi)\, d\xi^\alpha d\xi^\beta = g^\Gamma_{ik}(x)\, dx^i dx^k \tag{1.4}$$

Здесь g^Γ_{ik} — эвклидов метрический тензор E_3. Если, в частности, в качестве x^i взяты декартовы координаты, то

$$(ds^\Gamma)^2 = \delta_{ik} dx^i dx^k = \sum_i (dx^i)^2 \tag{1.5}$$

Таким образом, внешняя метрика $(ds^\Gamma)^2$ однозначно индуцируется вложением Φ и имеет различные представления в лагранжевых и эйлеровых координатах.

Имеем очевидные соотношения

$$g_{\alpha\beta}^{\Gamma}(\xi) = g_{ik}^{\Gamma}(x(\xi)) \frac{\partial x^i}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial x^k}{\partial \xi^\beta}, \qquad g_{ik}^{\Gamma}(x) = g_{\alpha\beta}^{\Gamma}(\xi(x)) \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^k} \tag{1.6}$$

Легко показать, что справедливо и обратное утверждение: задание внешней метрики определяет однозначно Ф с точностью до движения среды как твердого тела. Естественно, что внешняя метрика при этом не может быть задана произвольно, а должна удовлетворять уравнению

$$R_{\lambda\mu\nu\rho}(g_{\alpha\beta}^{\Gamma}) = 0 \tag{1.7}$$

где $R_{\lambda\mu\nu\rho}$ — тензор кривизны Римана — Кристоффеля. Как известно, он представляет собой нелинейный дифференциальный оператор второго порядка, действующий на $g_{\alpha\beta}^{\Gamma}$ (см., например, [4]).

Внутреннее состояние и внутренняя метрика. Будем называть внутренними характеристиками среды те характеристики, которые не зависят от вложения Ф. Совокупность всех внутренних характеристик определяет внутреннее состояние среды. К числу внутренних характеристик относятся, в частности, указанные выше качественные характеристики: топология, близость, гладкость. Однако всеми этими свойствами могут обладать и неупругие среды. Попытаемся описать те внутренние характеристики, которые отличают упругую среду от неупругой; иными словами, определим понятие упругости.

Пусть ξ — точка среды и U_ξ — ее окрестность. Вырежем мысленно U_ξ из среды и изолируем от всех внешних силовых воздействий, но будем при этом считать температуру U_ξ неизменной. Тогда U_ξ будет находиться в некотором внешнем состоянии Φ_0, определенном с точностью до движения U_ξ как твердого тела. Будем говорить, что Φ_0 является естественным состоянием окрестности U_ξ. Точнее, под естественным состоянием понимается предельное состояние при $U_\xi \to 0$. Предполагается, что такой предел существует и не зависит от способа стягивания U_ξ в точку.

Пусть $\overset{\circ}{g}_{\alpha\beta}$ есть метрика окрестности U_ξ в естественном состоянии. Если подобный эксперимент произвести для окрестности каждой точки, то найдем $\overset{\circ}{g}_{\alpha\beta}(\xi)$ как функцию точки среды. Будем предполагать эту функцию достаточно гладкой. Построенная таким образом метрика

$$(ds^\circ)^2 = \overset{\circ}{g}_{\alpha\beta}(\xi)\, d\xi^\alpha d\xi^\beta = \overset{\circ}{g}_{ik}(x)\, dx^i dx^k \tag{1.8}$$

по определению не зависит от Ф и, следовательно, будет внутренней характеристикой. Назовем ее внутренней метрикой среды [1].

Среда будет считаться упругой лишь в том случае, если в условиях рассматриваемой задачи ее внутреннее состояние не изменяется.

Отметим, что естественное состояние для среды в целом, вообще говоря, не существует. Это значит, что внутренняя метрика, в отличие от внешней, не будет эвклидовой, и построенный для нее тензор кривизны в общем случае отличен от нуля. Таким образом, внутренняя геометрия упругой среды будет римановой геометрией.

[1] Внутреннюю метрику, по-видимому, впервые ввел в рассмотрение Кондо [1].

Упругая деформация. Упругую деформацию среды $\varepsilon_{\alpha\beta}$ целесообразно определить как меру уклонения внешнего состояния от естественного. Положим по определению

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(\xi) = \frac{1}{2}\left[g_{\alpha\beta}^{\Gamma}(\xi) - \overset{\circ}{g}_{\alpha\beta}(\xi)\right] \tag{1.9}$$

Говоря образно, упругое деформированное состояние среды будет разностью внешнего и внутреннего состояний. При заданной внутренней метрике деформация $\varepsilon_{\alpha\beta}$ не может быть произвольной, а должна удовлетворять уравнению (1.7) после подстановки в него $g_{\alpha\beta}^{\Gamma} = \overset{\circ}{g}_{\alpha\beta} + 2\varepsilon_{\alpha\beta}$. Это уравнение представляет собой обобщение известного условия совместности деформаций Сен-Венана; этим выясняется геометрический смысл условия совместности.

Если предположить, что естественное состояние существует для всей среды в целом, то в этом состоянии внутренняя метрика совпадает с внешней и, следовательно, является эвклидовой. Тогда выбрав соответствующим образом лагранжеву систему координат, можно положить

$$(ds^{\circ})^2 = \delta_{\alpha\beta}\, d\xi^{\alpha} d\xi^{\beta} \tag{1.10}$$

Зададим внешнее состояние Φ уравнениями

$$\Phi: \quad x^i = \delta_{\alpha}{}^{i}\xi^{\alpha} + u^i(\xi^{\alpha}) \tag{1.11}$$

При этом u^i можно интерпретировать как вектор смещения при переходе от Φ_0 к Φ. Учитывая (1.6), находим для внешней метрики в состоянии Φ выражение

$$g_{\alpha\beta}^{\Gamma} = \delta_{\alpha\beta} + \partial_{\beta}u_{\alpha} + \partial_{\alpha}u_{\beta} + \partial_{\alpha}u^{\gamma}\partial_{\beta}u_{\gamma} \qquad \left(\partial_{\alpha} = \frac{\partial}{\partial\xi^{\alpha}}\right) \tag{1.12}$$

Подставляя (1.12) в (1.9), получаем обычное выражение ε через u. В случае малых деформаций оно принимает вид

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = {}^1/_2\,(\partial_{\beta}u_{\alpha} + \partial_{\alpha}u_{\beta}) \quad \text{или} \quad \varepsilon = \operatorname{def} u \tag{1.13}$$

Уравнение совместности (1.7) в этом случае также принимает обычную форму. Таким образом, определение упругой деформации ε посредством (1.9) представляет собой естественное обобщение обычного определения (1.13).

Оператор Rot *и плотность источников внутренних напряжений.* В дальнейшем не будем предполагать эвклидовости внутренней метрики и рассмотрим наиболее важный случай, когда ее можно считать мало отличающейся от эвклидовой. Это значит, что существует такая система координат ξ^{α}, в которой внутренняя метрика представима в виде

$$\overset{\circ}{g}_{\alpha\beta}(\xi) = \delta_{\alpha\beta} + 2\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\beta}(\xi), \quad |\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\beta}| \ll 1 \tag{1.14}$$

При этом предполагается также малость первых двух производных $\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\beta}$. Иными словами, предполагается достаточная малость деформаций и смещений для того, чтобы можно было оставаться в рамках линейной теории аналогично классической линейной теории упругости.

Первым следствием этих упрощений будет возможность не делать различия между лагранжевой и эйлеровой системами координат. Возникающая при этом ошибка имеет второй порядок малости. Удобно будет также считать систему координат декартовой. Внешнюю и внутреннюю метрики, деформацию, тензор кривизны и т. д. возможно при этом рассматривать как соответствующие тензорные поля в E_3. Наконец, в выражении для $R_{\lambda\mu\nu\rho}$ можно пренебречь нелинейными членами и рассматривать тензор кривизны как линейный оператор. Если учесть его свойства симметрии, то в E_3 ему можно взаимно однозначно сопоставить некоторый линейный дифференциальный оператор второго порядка, который действует на двухвалентные тензоры и значениями которого также являются двухвалентные тензоры. Обозначим его символом Rot и определим соотношением

$$p = \mathrm{Rot}\, q, \qquad p^{\alpha\beta} = \varepsilon^{\alpha\lambda\mu}\varepsilon^{\beta\nu\rho}\partial_\lambda\partial_\nu q_{\mu\rho} \tag{1.15}$$

Здесь $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}$, как обычно, обозначает единичный антисимметричный псевдотензор.

Оператор Rot можно записать также в виде

$$\mathrm{Rot} = \mathrm{rot}\,(\mathrm{rot})' \tag{1.16}$$

где rot — обычный ротор, а штрих обозначает транспонирование.

Впервые этот оператор ввел в теорию упругости Ю. А. Крутков [5]. Выяснение его геометрического смысла и приложение к континуальной теории дислокаций, в основном, принадлежат Крёнеру [2] (последний обозначает его символом Ink).

Отметим некоторые важнейшие свойства этого оператора. Из определения следует, что Rot коммутирует с оператором транспонирования и, следовательно, с операторами симметрирования и альтернирования. Очевидны также соотношения

$$\mathrm{div\,Rot} = 0, \qquad \mathrm{Rot\,def} = 0 \tag{1.17}$$

Как будет видно из дальнейшего, оператор Rot имеет для полей тензоров второй валентности в некотором смысле то же значение, что и оператор rot для векторных полей. Этим объясняется принятое для него в настоящей работе обозначение. По-видимому, целесообразно называть его двойным ротором (биротором), а тензорное поле p, представимое в виде $p = \mathrm{Rot}\, q$,— бивихревым. Соответственно тензорное поле вида $\mathrm{grad}\, u$ или $\mathrm{def}\, u$, где u — вектор, можно было бы назвать потенциальным.

Уравнение (1.7) может быть теперь записано в виде

$$\mathrm{Rot}\, g^\Gamma = 0 \tag{1.18}$$

В случае, если внутренняя метрика эвклидова, уравнение

$$\mathrm{Rot}\, \varepsilon = 0 \tag{1.19}$$

будет компактной формой записи обычных условий совместности Сен-Венана. Из предыдущего вытекает, что это есть необходимое и достаточное условие того, чтобы упругая деформация ε (по крайней мере локально) была представима в виде $\mathrm{def}\, u$.

В случае неэвклидовой внутренней метрики, следуя Крёнеру, введем обозначение

$$\mathrm{Rot}\, g^\circ = -\,2\eta \tag{1.20}$$

Отсюда

$$\mathrm{Rot}\, \varepsilon = \eta \tag{1.21}$$

Здесь $\eta_{\alpha\beta}$ представляет собой плотность источников внутренних напряжений. Крёнер называет тензор $\eta_{\alpha\beta}$ несовместностью. Очевидно, условие $\eta = 0$ есть необходимое и достаточное условие отсутствия внутренних напряжений.

Отметим два важных случая. Если внутренние напряжения вызваны неравномерным распределением температуры, то из предыдущего немедленно следует, что

$$\eta = \operatorname{Rot} T, \qquad T_{\alpha\beta} = \gamma\theta(x)\,\delta_{\alpha\beta} \tag{1.22}$$

Здесь $\theta(x)$ — температура, γ — коэффициент температурного расширения. Если внутренние напряжения обусловлены распределением дислокаций, то, как показал Крёнер [2],

$$\eta = S\,(\operatorname{rot}\alpha)' \tag{1.23}$$

где α — плотность потока вектора Бюргерса, S — оператор симметрирования.

2. Тензор Грина внутренних напряжений. Так как ограничиваемся рассмотрением малых деформаций, естественно предположить справедливость закона Гука

$$\sigma^{\alpha\beta} = C^{\alpha\beta\lambda\mu}\varepsilon_{\lambda\mu}, \qquad \varepsilon_{\lambda\mu} = C^{-1\,*}_{\lambda\mu\alpha\beta}\,\sigma^{\alpha\beta}, \qquad C^{-1\alpha\beta\lambda\mu}C^{\;*}_{\lambda\mu\nu\rho} = \delta_\nu^{(\alpha}\delta_\rho^{\beta)} \tag{2.1}$$

Будем записывать эти соотношения также в прямых обозначениях

$$\sigma = C\varepsilon, \qquad \varepsilon = C^{-1}\sigma \tag{2.2}$$

Уравнения, определяющие напряжения в анизотропной упругой среде без источников внутренних напряжений, имеют вид

$$\operatorname{div}\sigma = -f, \qquad \operatorname{Rot} C^{-1}\sigma = 0 \tag{2.3}$$

где f — плотность объемных сил. Как следует из предыдущего, аналогичные уравнения при наличии только источников внутренних напряжений записываются в виде

$$\operatorname{div}\sigma = 0, \qquad \operatorname{Rot} C^{-1}\sigma = \eta \qquad (\operatorname{div}\eta = 0) \tag{2.4}$$

Общий случай получится наложением.

Будем рассматривать решения (2.3) и (2.4) для бесконечной анизотропной среды, обращающиеся в нуль на бесконечности. Относительно f и η предполагается, что они локально интегрируемы и либо отличны от нуля в ограниченной области, либо достаточно быстро убывают на бесконечности. Известно, что решение (2.3) можно представить в виде

$$\sigma^{\alpha\beta}(x) = \int G_i^{\alpha\beta}(x - x_0)\, f^i(x_0)\, dx_0 \tag{2.5}$$

где $G_i^{\alpha\beta}(x)$ — тензор Грина теории упругости для напряжений. В тех случаях, когда это не может вызвать недоразумений, удобно использовать знак $*$ для интегральной свертки двух функций по всему пространству. Тогда (2.5) запишется

$$\sigma = G * f \tag{2.6}$$

причем нужно учитывать, что, кроме интегральной свертки, здесь имеет место также тензорная свертка по одному индексу.

Очевидно, тензор Грина G должен удовлетворять уравнениям

$$\partial_\alpha G_i^{\alpha\beta} = -\delta_i^\beta \delta(x), \qquad \operatorname{Rot} C^{-1}_{\lambda\mu\alpha\beta} G_i^{\alpha\beta} = 0 \tag{2.7}$$

или в прямых обозначениях

$$\operatorname{div} G = -e, \qquad \operatorname{Rot} C^{-1} G = 0 \tag{2.8}$$

где $e(x)$ — ядро тождественного оператора, действующего на векторах.

Второе уравнение удовлетворяется тождественно, если положим

$$G_i^{\alpha\beta}(x) = C^{\alpha\beta\lambda\mu} \partial_\lambda U_{i\mu}(x) \tag{2.9}$$

Здесь $U_{i\mu}(x)$ — тензор Грина для смещений. Подставляя (2.9) в первое уравнение, находим уравнение, определяющее $U_{i\mu}$

$$C^{\alpha\beta\lambda\mu} \partial_\beta \partial_\lambda U_{i\mu} = -\delta_i^\alpha \delta(x) \tag{2.10}$$

Как было показано в работе И. М. Лифшица и Л. Н. Розенцвейга [6], построение $U^i{}_\mu$ в общем случае сводится к нахождению корней алгебраического уравнения шестой степени, коэффициенты которого определяются тензором упругих констант $C^{\alpha\beta\lambda\mu}$. В ряде случаев, например, для изотропной среды, для гексагональной симметрии и для всех типов слабой анизотропии, решение этого уравнения может быть записано в явном виде. В остальных случаях его приходится решать численно. В дальнейшем будем считать тензоры Грина $U_{i\mu}$ и $G_i^{\alpha\beta}$ известными. Попутно отметим, что $U_{i\mu}$ убывает на бесконечности, как r^{-1}, и, соответственно, $G_i^{\alpha\beta}$ — как r^{-2}.

Цель этого раздела — построение тензора Грина для системы уравнений (2.4). Однако понятие тензора Грина для данного случая пока не определено, так как правая часть в (2.4) должна удовлетворять дополнительному условию $\operatorname{div} \eta = 0$. Поэтому предварительно рассмотрим вспомогательную задачу, которая представляет и самостоятельный интерес.

Разложение тензорного поля на инвариантные составляющие. Как показал Крёнер [2], достаточно гладкий симметричный двухвалентный тензор A, исчезающий на бесконечности, может быть однозначно разложен на потенциальную составляющую A_1° и на бивихревую составляющую A_2°

$$A = A_1^\circ + A_2^\circ; \qquad \begin{matrix} \operatorname{Rot} A_1^\circ = 0, & A_1^\circ = \operatorname{def} b \\ \operatorname{div} A_2^\circ = 0, & A_2^\circ = \operatorname{Rot} B \end{matrix} \tag{2.11}$$

Здесь b и B — соответственно вектор и симметричный двухвалентный тензор, играющие роль потенциалов. При этом для однозначного определения B на него можно наложить дополнительное условие $\operatorname{div} B = 0$. Однако Крёнер не дал алгоритма, при помощи которого можно было бы найти потенциалы b и B и фактически осуществить данное разложение.

Эту задачу удобно сформулировать еще следующим образом. Введем на пространстве тензоров A операторы проектирования Π° и Θ°, определив их соотношениями

$$\begin{matrix} \Pi^\circ\Pi^\circ = \Pi^\circ, & \Theta^\circ\Theta^\circ = \Theta^\circ, & \Pi^\circ + \Theta^\circ = E \\ \operatorname{Rot} \Pi^\circ = 0, & \operatorname{div} \Theta^\circ = 0 & \end{matrix} \tag{2.12}$$

где E — тождественный оператор. Тогда все пространство разлагается в прямую сумму двух подпространств потенциальных и бивихревых тензоров

$$A_1^\circ = \Pi^\circ A = \pi^\circ * A, \qquad A_2^\circ = \Theta^\circ A = \vartheta^\circ * A \tag{2.13}$$

Здесь $\pi^\circ(x)$ и $\vartheta^\circ(x)$ — тензоры четвертой валентности — являются ядрами соответствующих операторов проектирования. Их следует понимать в смысле обобщенных функций [7].

Таким образом, задача заключается в нахождении явных выражений для Π° и Θ° или, что то же, для π° и ϑ°.

Введем обобщенный тензор Кронекера

$$\varepsilon^{\alpha\lambda}_{\beta\mu} = \delta^\alpha_\beta \delta^\lambda_\mu - \delta^\alpha_\mu \delta^\lambda_\beta \tag{2.14}$$

и запишем алгебраическое тождество

$$\varepsilon^{\alpha_1\lambda_1}_{\beta_1\mu_1}\varepsilon^{\alpha_2\lambda_2}_{\beta_2\mu_2} = \delta^{\alpha_1}_{\beta_1}\delta^{\alpha_2}_{\beta_2}\delta^{\lambda_1}_{\mu_1}\delta^{\lambda_2}_{\mu_2} + \delta^{\alpha_1}_{\mu_1}\delta^{\alpha_2}_{\mu_2}\delta^{\lambda_1}_{\beta_1}\delta^{\lambda_2}_{\beta_2} - \delta^{\alpha_1}_{\beta_1}\delta^{\alpha_2}_{\mu_2}\delta^{\lambda_1}_{\mu_1}\delta^{\lambda_2}_{\beta_2} - \delta^{\alpha_1}_{\mu_1}\delta^{\alpha_2}_{\beta_2}\delta^{\lambda_1}_{\beta_1}\delta^{\lambda_2}_{\mu_2} \tag{2.15}$$

Свертывая его с $\partial_{\lambda_1\lambda_2}\partial^{\mu_1\mu_2}$, получаем операторное тождество

$$\varepsilon^{\alpha_1\lambda_1}_{\beta_1\mu_1}\varepsilon^{\alpha_2\lambda_2}_{\beta_2\mu_2}\partial_{\lambda_1\lambda_2}\partial^{\mu_1\mu_2} = \delta^{\alpha_1}_{\beta_1}\delta^{\alpha_2}_{\beta_2}\triangle^2 + \partial_{\beta_1\beta_2}\partial^{\alpha_1\alpha_2} - \triangle\left(\delta^{\alpha_1}_{\beta_1}\partial_{\beta_2}\partial^{\alpha_2} + \delta^{\alpha_2}_{\beta_2}\partial_{\beta_1}\partial^{\alpha_1}\right) \tag{2.16}$$

Как нетрудно проверить, справедливо следующее соотношение

$$\varepsilon^{\alpha\lambda}_{\beta\mu} = \varepsilon_{\beta\mu\nu}\varepsilon^{\nu\alpha\lambda} \tag{2.17}$$

Вспоминая определение (1.15) оператора Rot и учитывая (2.17), можно после несложных преобразований записать окончательно (2.16) в виде

$$\triangle^2 = \operatorname{def}(2\triangle - \operatorname{grad}\operatorname{div})\operatorname{div} + \operatorname{Rot}\operatorname{Rot} \tag{2.18}$$

Это тождество будет аналогом известной формулы векторного анализа

$$\triangle = \operatorname{grad}\operatorname{div} - \operatorname{rot}\operatorname{rot} \tag{2.19}$$

Положим

$$R^{\alpha_1\alpha_2}_{\beta_1\beta_2} = r(x)\,\delta^{\alpha_1}_{\beta_1}\delta^{\alpha_2}_{\beta_2} \quad (r^2 = \delta_{\lambda\mu}x^\lambda x^\mu) \tag{2.20}$$

и применим обе части тождества (2.18) к выражению

$$-\frac{1}{8\pi}R^{\alpha_1\alpha_2}_{\beta_1\beta_2} * A_{\alpha_1\alpha_2}$$

Учитывая, что

$$\triangle^2 r(x) = -8\pi\delta(x) \tag{2.21}$$

получаем

$$A = -\frac{1}{8\pi}\operatorname{def}(2\triangle - \operatorname{grad}\operatorname{div})\operatorname{div} R * A - \frac{1}{8\pi}\operatorname{Rot}\operatorname{Rot} R * A \tag{2.22}$$

Легко видеть, что обобщенные тензор-функции

$$\pi^\circ = -\frac{1}{8\pi}\operatorname{def}(2\triangle - \operatorname{grad}\operatorname{div})\operatorname{div} R, \qquad \vartheta^\circ = -\frac{1}{8\pi}\operatorname{Rot}\operatorname{Rot} R \tag{2.23}$$

$$\left(\pi^{\circ\alpha_1\alpha_2}_{\beta_1\beta_2} + \vartheta^{\circ\alpha_1\alpha_2}_{\beta_1\beta_2} = \delta^{(\alpha_1}_{\beta_1}\delta^{\alpha_2)}_{\beta_2}\delta(x)\right)$$

будут ядрами искомых операторов проектирования, что и решает поставленную задачу о разложении тензорного поля на потенциальную и бивихревую составляющие. Одновременно получены выражения для векторного и тензорного потенциалов

$$b = \frac{r}{8\pi} * (\operatorname{grad}\operatorname{div} - 2\triangle)\operatorname{div} A, \qquad B = -\frac{r}{8\pi} * \operatorname{Rot} A$$

$$\operatorname{div} B = 0 \tag{2.24}$$

Отметим, что, действуя аналогичным образом, легко обобщить данное разложение на случай асимметричных двухвалентных тензоров.

Тензор Грина для внутренних напряжений. Представим решение системы (2.4) в виде

$$\sigma^{\alpha\beta} = H^{\alpha\beta}_{\lambda\mu} * \eta^{\lambda\mu} \tag{2.25}$$

Очевидно, тензор Грина H должен удовлетворять первому уравнению системы. Что касается второго уравнения для H, то в его правой части должно стоять ядро оператора, который совпадает с тождественным на подпространстве бивихревых тензоров и дивергенция которого равна нулю. Но этими свойствами как раз и обладает Θ°. Таким образом

$$\operatorname{div} H = 0, \qquad \operatorname{Rot} C^{-1}H = \vartheta^\circ \tag{2.26}$$

Выше был построен алгоритм разложения тензора на потенциальную и бивихревую составляющие. Рассмотрим разложение более общего вида. Пусть A, как и ранее,—симметричный двухвалентный тензор, исчезающий на бесконечности. Положим

$$A = A_1 + A_2, \qquad \operatorname{Rot} C^{-1}A_1 = 0, \qquad \operatorname{div} A_2 = 0 \tag{2.27}$$

или в терминах операторов проектирования

$$A_1 = \Pi A, \qquad A_2 = \Theta A; \qquad \Pi\Pi = \Pi, \qquad \Theta\Theta = \Theta, \qquad \Pi + \Theta = E$$
$$\operatorname{Rot} C^{-1}\Pi = 0, \qquad \operatorname{div}\Theta = 0 \tag{2.28}$$

Это разложение можно интерпретировать следующим образом. Пусть A — тензор напряжений. Тогда A_1 — составляющая напряжений, вызванная объемными силами, т. е. решение системы (2.3), а A_2 — внутренние напряжения, т. е. решение системы (2.4). Разложение (2.12) можно при этом рассматривать как частный случай данного, если положить

$$C^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot\lambda\mu} = \delta_\lambda^{(\alpha}\delta_\mu^{\beta)} \tag{2.29}$$

Легко проверить, что одно из возможных представлений для Π и Θ дается выражениями

$$\Pi = -G * \operatorname{div}, \qquad \Theta = E + G * \operatorname{div} \tag{2.30}$$

где G — определенный выше тензор Грина теории упругости. Однако это представление еще нельзя непосредственно использовать для построения H.

Основное значение имеет операторное тождество

$$\Theta = \Theta C \Theta^\circ C^{-1} \tag{2.31}$$

Для его доказательства прежде всего замечаем, что дивергенция обеих частей равенства, в силу (2.28), равна нулю. С другой стороны, из (2.12) и (2.28) следует, что

$$\operatorname{Rot}\Theta^\circ = \operatorname{Rot}, \qquad \operatorname{Rot} C^{-1}\Theta = \operatorname{Rot} C^{-1} \tag{2.32}$$

Применяя теперь к обеим частям равенства (2.31) оператор $\operatorname{Rot} C^{-1}$ и учитывая (2.32), получаем тождество. Но если результаты применения операторов div и Rot C^{-1} к двум тензорам, обращающимся в нуль на бесконечности, совпадают, то совпадают и сами тензоры, так как их разность есть исчезающее на бесконечности решение однородных уравнений теории упругости. А это и доказывает тождество (2.31).

Таким образом, для внутренних напряжений σ имеем

$$\sigma = \Theta\sigma = \Theta C \Theta^{\circ} C^{-1}\sigma = -\frac{1}{8\pi}(C + G * \operatorname{div} C)(\operatorname{Rot}\operatorname{Rot} R * C^{-1}\sigma) \tag{2.33}$$

Из свойств свертки [7] следует

$$\begin{aligned} &\operatorname{Rot}\operatorname{Rot} R * C^{-1}\sigma = \operatorname{Rot}\operatorname{Rot}(r * C^{-1}\sigma) = \\ &= \operatorname{Rot}(r * \operatorname{Rot} C^{-1}\sigma) = \operatorname{Rot} R * \operatorname{Rot} C^{-1}\sigma \end{aligned} \tag{2.34}$$

Подставляя в (2.33), находим

$$\sigma = -\frac{1}{8\pi}(C \operatorname{Rot} R + G * \operatorname{div} C \operatorname{Rot} R) * \operatorname{Rot} C^{-1}\sigma \tag{2.35}$$

Отсюда получаем для тензора Грина внутренних напряжений следующее выражение

$$H(x) = -\frac{1}{8\pi}[C \operatorname{Rot} R(x) + G(x) * \operatorname{div} C \operatorname{Rot} R(x)] \tag{2.36}$$

что и решает поставленную задачу. Непосредственной проверкой можно убедиться, что H удовлетворяет уравнениям (2.26). Легко также видеть, что $H \sim r^{-1}$ при $x \to \infty$.

Задача об определении внутренних напряжений в изотропной среде была ранее решена другим методом Крёнером [2].

В заключение отметим, что общую задачу о нахождении тензора напряжений в бесконечной анизотропной среде при наличии внешних и внутренних источников напряжений можно сформулировать следующим образом: требуется найти симметричный тензор σ при условии $\sigma(\infty) = 0$, если заданы

$$\operatorname{div}\sigma = -f, \qquad \operatorname{Rot} C^{-1}\sigma = \eta \tag{2.37}$$

Решение записывается в виде

$$\sigma = G * f + H * \eta \tag{2.38}$$

В частном случае, когда C удовлетворяет (2.29), из (2.23) следует

$$G^{\circ} = \frac{1}{8\pi}\operatorname{def}(\operatorname{grad}\operatorname{div} - 2\Delta) R, \qquad H^{\circ} = -\frac{1}{8\pi}\operatorname{Rot} R \tag{2.39}$$

Поступила 14 I 1964

Институт теплофизики
Сибирского отделения АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Kondo K. Memoirs of the unifying study of the basic problems in engineering sciences by means of geometry. Tokyo, Gakujutsu Bunken Fukyu-Kai, vol. 1, 1955, vol. 2, 1958.
2. Kröner E. Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen. Springer-Verlag, Berlin, 1958.
3. Александров П. С. Комбинаторная топология. М., 1947.
4. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ, М., 1964.
5. Крутков Ю. А. Тензор функций напряжений и общие решения в статике теории упругости. АН СССР, М., 1949.
6. Лифшиц И. М., Розенцвейг Л. Н. ЖЭТФ, 1947, т. 17, 783.
7. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции, М., 1959, вып. I.